Corso di laurea in Matematica, Università di Firenze

Esame di Algebra II - esame scritto del 13 giugno 2019

Esercizio 1 (9 punti). Sia $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ il gruppo moltiplicativo dei numeri razionali diversi da zero. Nel prodotto diretto $G = \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ si consideri

$$N = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^*,\ ab = 2^z \text{ per qualche } z \in \mathbb{Z}\}.$$

(1) Si provi che N è un sottogruppo di G.

(2) Si provi che il gruppo quoziente G/N è infinito.

(3) Si trovi un omomorfismo suriettivo $N \to (\mathbb{Z}, +)$ e si determini il suo nucleo.

Esercizio 2 (8 punti). Sia G un gruppo con $|G| = 455$.

(1) Si determini $n_{13}(G)$ (numero di 13-sottogruppi di Sylow di G); si provi quindi che G ha un sottogruppo normale di ordine 65.

(2) Sia data un'azione di G su Ω con $|\Omega| = 25$, e quindi un'omomorfismo $\phi : G \to S_{25}$; si provi che si verifica una e una sola delle due seguenti possibilità: ϕ è iniettivo oppure G ha un punto fisso su Ω.

Esercizio 3 (12 punti). Sia $f = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(1) Sia $u \in \mathbb{C}$ radice di f; si provi che u è una radice primitiva 9-esima dell'unità.

(2) Si provi che f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

(3) Posto $E \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$, si determini a meno di isomorfismo il gruppo $Gal(E \mid \mathbb{Q})$

(4) Si determini $w \in E$ tale che $[\mathbb{Q}[w] : \mathbb{Q}] = 2$.

Esercizio 4 (4 punti). Sia $E = F[a]$ un'estensione del campo F con $[E : F] = p^2$ per un numero primo p. Si determini il grado $[F[a^{p-1}] : F]$.