Corso di laurea in Matematica, Università di Firenze
Esame di Algebra II - esame scritto del 11 luglio 2019

Esercizio 1 (12 punti). Sia $\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Per ogni coppia ordinata (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}_7$, $a \neq 0$, si consideri l'applicazione $\phi_{(a,b)} : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{Z}_7$, $\phi_{(a,b)}(x) = ax + b$. Sia

$$G = \{\phi_{(a,b)} | a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq 0\}.$$

(1) Si provi che G è un sottogruppo di $Sym(\mathbb{Z}_7)$ e che $N = \{\phi_{(1,b)} | b \in \mathbb{Z}_7\}$ è un sottogruppo normale di G.

(2) Si provi che G/N è un gruppo commutativo.

(3) Si determini $n_3(G)$ (numero di 3-sottogruppi di Sylow).

(4) Sia $V = \mathbb{Z}_7 \times Z_7$; per ogni $\phi_{(a,b)} \in G$ e $(x, y) \in V$ si ponga

$$\phi_{(a,b)} \cdot (x, y) = (ax + by, y);$$

si provi che questo definisce un'azione di G su V, e si dica quante sono le orbite di G su V.

Esercizio 2 (5 punti). Sia N un sottogruppo normale del gruppo G e sia $g \in G$ tale che $|gN| = 7$ (l'ordine dell'elemento $gN \in G/N$); si provi che G contiene un elemento di ordine 7.

Esercizio 3 (5 punti). Sia $E|F$ un'estensione di campi, siano $a, u \in E$ con a algebrico su F, e $1 \leq m \in \mathbb{N}$. Si provi che se $a(u^m + 1)$ è algebrico su F allora u è algebrico su F.

Esercizio 4 (12 punti). Siano $f = x^5 - 5x^3 - 5x^2 + 25 \in \mathbb{Q}[x]$, $E \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$, e $L = \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}]$.

(1) Determinare il grado $[L : \mathbb{Q}]$.

(2) Determinare $|Gal(E|\mathbb{Q})|$.

(3) Trovare un campo intermedio $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq E$ tale che $M|\mathbb{Q}$ è un'estensione normale e $[M : \mathbb{Q}] = 4$.

(4) Dire se $Gal(E|\mathbb{Q})$ è abeliano.