Corso di Laurea in Matematica
Compito di ALGEBRA II
20 maggio 2013

Esercizio 1. (9 punti) Sia G un gruppo di ordine 91.

1. Si provi che G è ciclico;
2. si provi che l'applicazione $\phi : G \to G \times G$ definita da
$$\phi(g) = (g^{21}, g^{39})$$
per ogni $g \in G$, è un omomorfismo; si provi poi che ϕ è iniettiva;
3. sia $H = \{(g^a, g^b) \mid g \in G,\ a \in 13\mathbb{Z},\ b \in 7\mathbb{Z}\} \leq G \times G$ (questo non occorre provarlo); si provi che
$$G \times G = H \times \phi(G).$$

Esercizio 2. (7 punti) Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e $\Omega = A^A = \{f \mid f : A \to A\}$.

1. Si provi che porre, per ogni $(\alpha, \beta) \in S_3 \times S_3$ e ogni $f \in \Omega$,
$$(\alpha, \beta) \cdot f = \alpha \circ f \circ \beta^{-1}$$
definisce un azione del gruppo $G = S_3 \times S_3$ su Ω;
2. Si determini lo stabilizzatore in G dell'applicazione identica ι_A e quello della funzione costante c_1 (definita da $c_1(x) = 1$ per ogni $x \in A$); si dica quanti elementi contiengono le orbite di i_A e di c_1.

Esercizio 3. (11 punti) Siano ζ ed ω, rispettivamente, una radice primitive terza e quinta dell'unità in $\mathbb{C}$.

1. Si provi che $\mathbb{Q}[\zeta, \omega]|\mathbb{Q}$ è un'estensione di Galois e si determini l'ordine del suo gruppo di Galois;
2. si provi che $\mathbb{Q}[5\zeta + 3\omega]$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$;
3. si dica se $\mathbb{Q}[\zeta\omega] = \mathbb{Q}[\zeta, \omega]$.

Esercizio 4. (5 punti) Sia $E|F$ un'estensione di Galois. Fissato $u \in E$, siano $f \in F[x]$ il polinomio minimo di u su F e $w \in E$ un'altra radice di f; si provi che se $F[u] \neq F[w]$ allora il gruppo $Gal(E|F)$ non è abeliano.