Compito di ALGEBRA 2
2 febbraio 2011

Esercizio 1 (6 punti). Sia V lo spazio vettoriale $V = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$. Su $V^\# = V \setminus \{0\}$ si consideri la relazione d'equivalenza $\sim$ definita da, per ogni $v, u \in V^\#$, $v \sim u$ se esiste $0 \neq \lambda \in \mathbb{Z}_5$ tale che $v = \lambda u$. Si denoti con $\mathcal{V}$ l'insieme quoziente $V^\#/\sim$. Sia consideri quindi il gruppo G (si osservi che $|G| = 4^2 \cdot 5 = 80$):

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_5,\ a \neq 0 \neq c \right\}$$

(a) Si determini $|\mathcal{V}|$.

(b) Si consideri l'azione di G su $\mathcal{V}$ definita da, per ogni $v = (x, y) \in V^\#$ e $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$,

$$[v] \cdot g = \left[(x \quad y) \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \right].$$

Si descriva l'orbita di $[(0,1)]$; si dica quante sono le orbite di G su $\mathcal{V}$.

Esercizio 2 (10 punti). (a) Siano p, q numeri primi positivi con $p > q$, e sia G un gruppo di ordine p^2q^2. Sia provi che $|G| = 36$ oppure G ha un p-sottogruppo di Sylow normale.

(b) Sia $G = S_3 \times C_6$; si determinino $n_2(G)$ e $n_3(G)$.

(c) Si descriva esplicitamente un gruppo G di ordine 36 e tale che $n_2(G) = 9$,

Esercizio 3 (6 punti). Sia K un campo di ordine 27, e sia

$$f = x^5 + x^3 + x^2 + 1 \in K[x].$$

Sia E un campo di spezzamento di f su K. Si determini il suo ordine $|E|$.

Esercizio 4 (10 punti). Sia $f = x^4 - 2x + 9 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia E il suo campo di spezzamento. Si determini il gruppo di Galois $Gal(E|\mathbb{Q})$, e si dica quanti sono i campi intermedi dell'estensione $E|\mathbb{Q}$.