Corso di Laurea in Matematica
Compito di ALGEBRA 2
7 settembre 2011

Esercizio 1. (9 punti) Siano G un gruppo e $A, B \leq G$ tali che $G = AB$. Si assuma inoltre che

- $A = \langle a \rangle$ è ciclico di ordine infinito, e $A \trianglelefteq G$,
- $B = \langle b \rangle$ è ciclico di ordine 7,.

(a) Si provi che $a^b = a$ [sugg. poiché $A \trianglelefteq G$, $a^b \in A$, quindi esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che $\ldots$];

(b) si provi che $B \trianglelefteq G$, e si deduca che $G \simeq A \times B$ [sugg.: per il primo passo basterà provare che $b^a = b$];

(c) posto $H = \langle a^2 \rangle$, si provi che $H \trianglelefteq G$ e che G/H è ciclico.

Esercizio 2. (6 punti) Sia G un gruppo di ordine 3000, con $n_5(G) > 1$. Si provi che esiste un omomorfismo non banale $G :\to S_6$; si deduca che G possiede almeno un sottogruppo normale proprio non banale.

Esercizio 3. (8 punti) Sia $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, i)$.

(a) Provare che E è il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $(x^3 - 3)(x^2 - 3)$..

(b) Determinare il gruppo di Galois dell'estensione $E|\mathbb{Q}$.

Esercizio 4. (9 punti) Siano $\omega \in \mathbb{C}$ una radice tredicesima primitiva dell'unità e sia $E = \mathbb{Q}(\omega)$. Sia $g \in Gal(E|\mathbb{Q})$ definito da $\omega \mapsto \omega^3$, sia $H = \langle g \rangle$ e $F = Inv_E(H)$. Si determinino:

(a) Il grado $[F : \mathbb{Q}]$;

(b) i sottocampi K di F tali che $[K : \mathbb{Q}] = 2$;

(c) il grado $[F : F \cap \mathbb{R}]$.