Corso di Laurea in Matematica

**Compito di ALGEBRA 2**

**13 luglio 2011**

**Esercizio 1.** (11 punti) Sia $A$ un gruppo abeliano (notazione moltiplicativa) e sia $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Si definisca l'applicazione $\rho_n : A \to A$, ponendo, per ogni $x \in A$, $\rho_n(x) = x^n$.

**(a)** Si provi che $\rho_n$ è un omomorfismo di gruppi.

**(b)** Si assuma $A$ finito; si provi che $\rho_n$ è un automorfismo se e solo se $(n, |A|) = 1$ [sugg.: se $(n, |A|) = 1$, allora $\ker(\rho_n) \ldots$].

**(c)** Si dia un esempio in cui $A$ è infinito e $\rho_2$ è iniettivo ma non suriettivo..

**(d)** Considerato il gruppo $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{2^i} = 1 \text{ per qualche } i \in \mathbb{N}\}$, si provi che $\rho_2$ è suriettivo ma non iniettivo [**non occorre** provare che $A$ è un gruppo abeliano].

**Esercizio 2.** (7 punti) Siano $1 \leq n \in \mathbb{N}$ e $G = S_n$ il gruppo simmetrico su $\{1, 2 \ldots, n\}$. Sia $\pi$ un $n$-ciclo in $G$.

**(a)** Si determini $C_G(\pi)$.

**(b)** Supposto $n = p$ sia un numero primo, si determini il numero di $p$-sottogruppi di Sylow di $G$.

**Esercizio 3.** (14 punti) Siano $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva sesta dell'unità e $u = \sqrt[6]{5}$.

**(a)** Si determini $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.

**(b)** Posto $f \in \mathbb{Q}[x]$ il polinomio minimo di $u$ su $\mathbb{Q}$ ed $E$ il campo di spezzamento di $f$, si determini $[E : \mathbb{Q}]$.

**(c)** Si provi che il gruppo il gruppo di Galois $Gal(E|\mathbb{Q})$ non è abeliano.

**(d)** Posto $L = \mathbb{Q}[\zeta, \sqrt{5}]$ si provi $L|\mathbb{Q}$ è un estensione normale; osservando che $L \leq E$ si deduca che $Gal(E|\mathbb{Q})$ ha un unico sottogruppo di ordine 3.