Corso di Laurea in Matematica

Compito di ALGEBRA 2

14 giugno 2011

Esercizio 1. (9 punti) Sia $G = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \mid f \text{ applicazione}\}$. Definiamo una operazione su G ponendo, per $f, g \in G$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) .$$

Rispetto a tale operazione G è un gruppo commutativo (non occorre dimostrarlo).

(a) Provare che $H = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \mid f(n) \text{ è pari } \forall n \in \mathbb{N}\}$ è un sottogruppo di G.

(b) Provare che $|G : H|$ è infinito.

(c) Provare che H è isomorfo a G.

(Suggerimento: considerare $\varphi : H \to G$ definita, per $f \in H$ e $n \in \mathbb{N}$, da $\varphi(f)(n) = f(n)/2$.)

Esercizio 2. (7 punti) Sia G un gruppo finito, $|G| = n$. Sia $\phi : G \to S_n$ l'omomorfismo definito (numerando gli elementi di G) dall'azione di Cayley (moltiplicazione a sinistra).

(a) Sia $x \in G$ un elemento di ordine 2. Provare che $\phi(x) \in A_n$ se e solo se 4 divide n.

(b) Assumendo che $|G| = 2 \cdot d$ con d dispari:

(i) si provi che $\phi^{-1}(A_n)$ è un sottogruppo proprio di G;

(ii) concludere che esiste un sottogruppo K di G con $|G : K| = 2$.

Esercizio 3. (10 punti) Sia $f(x) = x^{23} - 1$ ed E il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$ (nel campo $\mathbb{C}$). Si determini:

(a) il gruppo di Galois $Gal(E|\mathbb{Q})$;

(b) il numero di sottocampi intermedi dell'estensione $E|\mathbb{Q}$;

(c) un elemento $u \in E$ tale che $|\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}| = 2$.

Esercizio 4. (5 punti)

Sia $g(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ un polinomio irriducibile di grado 2. Provare che $g(x)$ divide $h(x) = x^{624} - 1$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.