Compito di ALGEBRA II
16 febbraio 2011

Esercizio 1 (11 punti). Sia $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ il campo di ordine 7. Su $G = F \times F^*$ si definisca un'ioperazione ponendo, per ogni $(a, x), (b, y) \in G$,

$$(a, x)(b, y) = (a + xb, xy).$$

(a) Si provi che, con tale operazione, G è un gruppo.

(b) Si provi che ponendo, per ogni $u \in F$ ed ogni $(a, x) \in G$,

$$u \cdot (a, x) = x^{-1}(u + a)$$

definisce un'azione di G sull'insieme F. Si provi quindi che tale azione è fedele e transitiva (concludendo che G è isomorfo ad un sottogruppo di S_7).

(c) Si determini $n_7(S_7)$ (il numero di 7-sottogruppi di Sylow di S_7). Infine, denotato con P un tale sottogruppo di Sylow, si dimostri che $N_{S_7}(P) \simeq G$.

Esercizio 2 (7 punti). Sia N un sottogruppo di normale del gruppo finito G, e sia p un divisore primo di $|G|$. Sia P un p-sottogruppo di Sylow di G.

(a) Si provi che $N \cap P$ è un p-sottogruppo di Sylow di N.

(b) Si provi che $n_p(N)|n_p(G)$ [sugg.: s'osservi che $N_G(P) \leq N_G(N \cap P) \ldots$].

Esercizio 3 (6 punti). Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducibile di grado n, e sia E il suo campo di spezzamento. Si provi che se $Gal(E|\mathbb{Q})$ è abeliano, allora $[E : \mathbb{Q}] = n$.

Esercizio 4 (9 punti). Sia f il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $u = 1 - \sqrt[3]{7}$, e sia E il campo di spezzamento di f in $\mathbb{C}$.

(a) Si determini $[E : \mathbb{Q}]$ e il tipo di isomorfismo di $Gal(E|\mathbb{Q})$.

(b) Si descrivano (se ce ne sono) i campi intermedi $\mathbb{Q} \leq L \leq E$ tali che $L|\mathbb{Q}$ non è un'estensione normale.