Compito di ALGEBRA 2
15 giugno 2009

Esercizio 1. Sia U il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{8}\}$., e sia $A = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$. Sia quindi

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in A,\ b \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \right\}.$$

1. Si provi che (con l'usuale operazione di moltiplicazione di matrici), G è un gruppo [**non occorre provare la associatività**]
2. Siano $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \overline{4} & 0 \\ 0 & \overline{7} \end{pmatrix}$; si determinino gli ordini di g e di x, ed iil numero di coniugati di x in G.
3. Si provi che $\langle g \rangle$ è normale in G, e che se $\psi : G \to S_5$ è un omomorfismo di gruppi allora $g^3 \in \ker \psi$.
4. Si consideri il gruppo [**non serve provarlo**]

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \right\};$$

   si dimostri che $|W| = |G|$, ma che G non è isomorfo a W [sugg.: trovare l'ordine di un generico elemento di W].

Esercizio 2. Siano p, q numeri primo con $p > q$, e sia G un gruppo tale che $36 \neq |G| = p^2q^2$. Si provi che G ha un sottogruppo normale non-banale (cioè diverso da G e da $\{1_G\}$).

Esercizio 3. Sia p un numero primo e $u = \sqrt[3]{p} \in \mathbb{R}$.

(a) Si determini $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$ e si dica se l'estensione $\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}$ è normale;

(b) Si determini $Gal(\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q})$;.

(c) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$, tale che $\deg f = 3$ e f ha una radice in $\mathbb{Q}(u) \setminus \mathbb{Q}$; si provi che f è irriducibile;

(d) sia f come al punto precedente e sia E il suo campo di spezzamento (in $\mathbb{C}$); si determini $[E : \mathbb{Q}]$ e $Gal(E|\mathbb{Q})$.

Esercizio 4. Sia $E|F$ un'estensione di campi; siano $b \in E$ e $f \in F[x]$. Si provi che b è algebrico su F allora $f(b)$ è algebrico su F.