Corso di Laurea in Matematica

Esame scritto di ALGEBRA II

26 settembre 2011

Esercizio 1. (9 punti) Sia G un gruppo di ordine 253.

(a) Quali sono le possibili cardinalità della classi di coniugio di G?

(b) Provare che se $Z(G) \neq \{1_G\}$ allora G è abeliano.

(c) Assumendo che G non sia abeliano, si dica quante sono le classi di coniugio di cardinalità 11.

Esercizio 2. (4 punti) Sia G un gruppo finito, p un primo e sia $N \trianglelefteq G$ tale che p non divide $[G : N]$. Si provi che ogni p-sottogruppo di Sylow di G è contenuto in N.

Esercizio 3. (10 punti) Sia $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, e sia K il campo di spezzamento su $\mathbb{Z}_5$ del polinomio $f = x^3 + 2x + 1$.

(a) Sia $a \in K$ una radice di f; si provi che a e a^{-1} sono linearmente indipendenti (come vettori di K spazio vettoriale su $\mathbb{Z}_5$).

(b) Si determini $|K|$.

(c) Si provi che per ogni $b \in K \setminus \mathbb{Z}_5$, si ha $\mathbb{Z}_5[b] = K$.

(d) Si provi che K contiene un campo di spezzamento su $\mathbb{Z}_5$ del polinomio $x^{31} - 1$.

Esercizio 4. (7 punti) Sia E il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^3 + 2$.

(a) Si determini l'ordine ed il tipo di isomorfismo del gruppo $Gal(E|\mathbb{Q})$.

(b) Si dica quanti sono i campi L, con $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq E$ tali che, rispettivamente:

- $L|\mathbb{Q}$ è normale;
- $E|L$ è normale.