Compito di ALGEBRA 2
28 settembre 2009

1. Siano h e k i seguenti elementi del gruppo simmetrico S_8

$$h = (12345678) \qquad k = (24)(37)(68).$$

(a) Si calcoli $k^{-1}hk$ e si dica se il sottogruppo $\langle h \rangle$ è normale in $G := \langle h, k \rangle$.

(b) È vero che $G = \langle h \rangle \langle k \rangle$?

(c) Si determini il centro di G.

2. Il gruppo $G := S_3$ opera sull'insieme $\Omega := \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ permutando le componenti, ovvero

$$(a_1, a_2, a_3)^\sigma = (a_{1^\sigma}, a_{2^\sigma}, a_{3^\sigma}), \quad \forall (a_1, a_2, a_3) \in \Omega, \forall \sigma \in G.$$

(Non serve provare che questa è un'azione.)

(a) Si provi che lo stabilizzatore in G di ogni elemento $\omega \in \Omega$, è non banale.

(b) Si scriva l'equazione delle orbite per Ω rispetto a tale azione.

3. Sia $\mathbb{E}|\mathbb{F}$ un'estensione di Galois e sia $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{E}|\mathbb{F})$ il gruppo di Galois associato.

(a) Preso $a \in \mathbb{E}$ e posto f il suo polinomio minimo su $\mathbb{F}$, si mostri che l'insieme delle radici di f coincide con $\{\sigma(a) | \sigma \in G\}$.

(b) Sia K un sottogruppo normale di G. Si provi che per ogni $\sigma \in G$ vale $\sigma(\mathrm{Inv}(K)) = \mathrm{Inv}(K)$.

4. Sia $u := 2 + \sqrt[4]{2}$.

(a) Si determini il polinomio minimo, f, di u su $\mathbb{Q}$.

(b) Si dica se $\mathbb{Q}[u]$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$.

(c) Si determini il campo di spezzamento, $\mathbb{E}$, di f in $\mathbb{C}$ ed il grado $|\mathbb{E} : \mathbb{Q}|$.

(d) Si esibisca un'estensione normale su $\mathbb{Q}$ di grado 4 che sia contenuta in $\mathbb{E}$.