Corso di Algebra 2.

Prova scritta del 28 aprile 2009

Esercizio 1. Sia H un gruppo. Sull'insieme $G = H \times H$ si definisce l'operazione $\cdot$ ponendo

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, c^{-1}bcd)$$

per ogni $(a, b), (c, d) \in G$. Tale operazione è associativa (**non occorre provare questo**).

(a) Si provi che $(G, \cdot\,)$ è un gruppo.

Siano $S = \{(a^{-1}, a) \mid a \in H\}$, $T = \{(a, 1_H) \mid a \in H\}$, $U = \{(1_H, a) \mid a \in H\}$,

(b) Si provi che S, T, U sono sottogruppi di G e che sono tutti isomorfi ad H;

(c) si provi che $G \simeq S \times U$;

(d) si provi che $T \trianglelefteq G$ se e solo se H è abeliano.

Esercizio 2. Sia G un gruppo ciclico di ordine finito n. Si provi che esiste un'azione *transitiva* di G su qualche insieme di cardinalità d se e solo se d divide n.

Esercizio 3. Per ogni numero primo $p \geq 2$ sia $u_p = \sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{p}$.

(a) Determinare il polinomio minimo f_p di u_p su $\mathbb{Q}$ ed il grado d dell'estensione $\mathbb{Q}(u_p)|\mathbb{Q}$;

(b) si scriva u_p^{-1} come combinazione a coefficienti in $\mathbb{Q}$ di 1, $u_p, \ldots, u_p^{d-1}$;

(c) si dica se l'estensione $\mathbb{Q}(u_p)|\mathbb{Q}$ è normale.

Sia E il campo di spezzamento di f_p su $\mathbb{Q}$:

(d) si determini $[E : \mathbb{Q}]$, e si identifichi (a meno di isomorfismo) il gruppo di Galois $Gal(E|\mathbb{Q})$;

(e) è vero che E coincide con il campo di spezzamento del polinomio $x^3 - p$?