

**Compito di ALGEBRA 2**  
**13 febbraio 2009**

1. Sia  $G$  un gruppo finito abeliano d'ordine dispari.
  - (a) Si provi che l'applicazione  $\sigma : G \rightarrow G$  definita da  $\sigma(x) = x^2$ , per ogni  $x \in G$ , è un automorfismo di  $G$ .
  - (b) Sia  $\alpha$  un automorfismo di  $G$  tale che  $\alpha^2 = \text{id}$  (automorfismo identico). Siano  $H = \{g \in G \mid \alpha(g) = g\}$  e  $K = \{g \in G \mid \alpha(g) = g^{-1}\}$ . Si provi che
    - i.  $H$  e  $K$  sono due sottogruppi di  $G$ ,
    - ii.  $H \cap K = 1$ ,
    - iii. per ogni  $g \in G$ , l'elemento  $g\alpha(g^{-1})$  appartiene a  $K$ , dedurre che  $G = H \times K$ .
2. Sia  $G$  un gruppo d'ordine  $11^2 \cdot 13^2$ . Provare che  $G$  è un gruppo abeliano.
3. Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ , dove per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$  gli  $a_i$  siano tali che  $a_i^2 \in \mathbb{Q}$ . Detto  $u$  un arbitrario elemento di  $\mathbb{K}$  mostrare che il grado del polinomio minimo di  $u$  su  $\mathbb{Q}$  è una potenza di 2.
4. Sia  $\mathbb{E}|\mathbb{Q}$  un'estensione normale di campi avente grado  $|\mathbb{E} : \mathbb{Q}| = p$ , ove  $p$  è un primo dispari. Provare quanto segue.
  - (a) Il gruppo di Galois  $\text{Gal}(\mathbb{E}|\mathbb{Q})$  è ciclico.
  - (b) Posto  $\text{Gal}(\mathbb{E}|\mathbb{Q}) = \langle \alpha \rangle$  e detto  $\text{Inv}_{\mathbb{E}}(\alpha)$  il sottocampo di  $\mathbb{E}$  degli elementi fissati da  $\alpha$ , si ha che  $\text{Inv}_{\mathbb{E}}(\alpha) = \mathbb{Q}$ ,
  - (c) Preso  $u \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{Q}$ , provare che

$$f = (X - u)(X - u^\alpha) \dots (X - u^{\alpha^{p-1}})$$

è il polinomio minimo di  $u$  su  $\mathbb{Q}$ .

- (d) Mostrare che per ogni  $u \in \mathbb{E}$  l'elemento  $c_u = uu^\alpha \dots u^{\alpha^{p-1}}$  appartiene a  $\mathbb{Q}$ .  
Preso  $u \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{Q}$  e detto  $v = uu^\alpha$ , si provi che  $\mathbb{Q}(v) = \mathbb{E}$  e che il termine noto del polinomio minimo di  $v$  su  $\mathbb{Q}$  è  $-(c_u)^2$ .