

Corso di Algebra I. A.A. 2005-2006 - COMPITO N. 1

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  l'applicazione definita da, per ogni  $x \in \mathbb{Q}$ ,

$$f(x) = \frac{2x}{|x| + 1}.$$

Si dica se  $f$  è iniettiva e/o suriettiva.

**Esercizio 2.** Sia  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  e su  $A$  definiamo la relazione  $\sim$  ponendo, per ogni  $(a, b), (c, d) \in A$ ,

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{se} \quad 2^{a^2+d^2} \equiv 2^{b^2+c^2} \pmod{5}$$

- (a) Si provi che  $\sim$  è una relazione d'equivalenza su  $A$ .
- (b) Si provi che se  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  è definita da  $f((a, b)) = (a^2 - b^2) + 4\mathbb{Z}$  (per ogni  $(a, b) \in A$ ), si ha  $\sim = \sim_f$ .
- (c) Si determini  $Im(f)$  [sugg.: se  $x$  è dispari allora  $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ ].
- (d) Si determini  $|A/\sim|$ .

**Esercizio 3.** Ragionando per induzione, si provi che per ogni intero  $n \geq 1$  si ha:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i(i+1)}{8} = \sum_{i=1}^n i^2.$$

**Esercizio 4.** Si provi che, per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,

$$5^a \equiv 5^b \pmod{7} \quad \text{se e solo se} \quad a \equiv b \pmod{6}.$$

**Esercizio 5.** Sull'insieme  $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq b \leq 8\}$  definiamo la relazione  $\triangleleft$  ponendo, per ogni  $(a, b), (c, d) \in A$ ,

$$(a, b) \triangleleft (c, d) \quad \text{se} \quad a|c \text{ e } b|d.$$

- (a) Si provi  $\triangleleft$  è una relazione d'ordine su  $A$ .
- (b) Si determinino, se ve ne sono, elementi massimi, minimi, massimali e minimali dell'insieme parzialmente ordinato  $(A, \triangleleft)$ .
- (c) Posto  $B = \mathbb{N} \times \{2, 3\}$  (si osservi che  $B \subseteq A$ ), si determinino (se esistono)  $\sup_A(B)$  e  $\inf_A(B)$ .