Corso di Algebra I. A.A. 2005-2006 - COMPITO N. 2

Esercizio 1. Si determinino gli elementi invertibili ed i divisori dello zero dell'anello

$$A = \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}[x].$$

Esercizio 2. Sia p un numero primo fissato e sia

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \;\mid\; (p,n) = 1 \right\}.$$

(a) Si provi che A è un dominio d'integrità.

(b) Si determinino gli elementi invertibili di A.

(c) Si provi che, a meno di moltiplicazione per associati, esiste un unico elemento irriducibile in A.

(d) Si provi che A è un dominio a fattorizzazione unica.

Esercizio 3. Siano A un anello commutativo e I un ideale *primo* di A.

(a) Si provi che l'anello quoziente A/I è un dominio d'integrità.

(b) Siano X, Y ideali di A tali che $X \cap Y \subseteq I$; si provi che $X \subseteq I$ o $Y \subseteq I$.

(c) Sia $\phi : R \longrightarrow A$ un omomorfismo di anelli. Si provi che $\phi^{-1}(I)$ è un ideale primo di R.

Esercizio 5. In $\mathbb{Q}[x]$ si fattorizzino i seguenti polinomi in prodotto di polinomi irriducibli:

$$f = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$$

$$g = x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 5x^2 + 3x + 9.$$

Quindi si trovi un generatore dell'ideale $I = (f, g)$ in $\mathbb{Q}[x]$.