I compitino di ALGEBRA 2
8 gennaio 2009

1. Indicato con $\mathbb{Q}$ il gruppo **additivo** dei numeri razionali, sia G il gruppo costituito dagli elementi di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ rispetto al prodotto così definito:

$$(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 + a_1 b_3, a_3 + b_3)$$

$(a_i, b_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, 3)$. (**N.B. che G è un gruppo non si deve dimostrare!**).

Sia $N := \{(a_1, a_2, a_3) \in G | a_3 = 0\}$. Si provi quanto segue:

   (a) N è un sottogruppo normale di G.

   (b) N è isomorfo al prodotto diretto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,

   (c) G/N è isomorfo a $\mathbb{Q}$.

2. Si considerino i seguenti elementi del gruppo simmetrico S_7

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

e sia ρ la permutazione $\sigma\tau$.

   (a) Scrivere ρ come prodotto di cicli disgiunti e dire se ρ appartiene al gruppo alterno A_7.

   (b) Determinare l'ordine di ρ e quello di $\tau^{-1}\rho\tau$.

   (c) Dire quanti sottogruppi possiede $< \rho >$.

3. Il gruppo S_3 opera sull'insieme $\Omega := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nel modo seguente:

$$(a_1, a_2, a_3)^\sigma = (a_{1^\sigma}, a_{2^\sigma}, a_{3^\sigma}),$$

per ogni $(a_1, a_2, a_3) \in \Omega$, e ogni $\sigma \in S_3$. (**N.B. Non serve mostrare che questa è un'azione!**).

Provare che vi è un'unica orbita di lunghezza 6.