

Corso di Algebra 1. A.A. 2007/2008.  
Prima prova intermedia - 15 novembre 2007

**Esercizio 1.** Si provi che porre  $f(z + 60\mathbb{Z}) = (z + 6\mathbb{Z}, z + 10\mathbb{Z})$  definisce una applicazione

$$f : \frac{\mathbb{Z}}{60\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}.$$

Si dica se  $f$  è iniettiva e/o suriettiva.

**Esercizio 2.** Sull'insieme  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  si definisca la relazione  $\omega$  ponendo, per  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$(a, b)\omega(c, d) \text{ se } a^2 - c^2 = b - d.$$

(a) Si provi che  $\omega$  è una relazione di equivalenza.

(b) Posto  $A = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ , si provi che

$$\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\omega} = \{[a]_\omega \mid a \in A\}.$$

(c) Si provi che, per ogni  $a, a' \in A$ ,  $[a]_\omega = [a']_\omega \Leftrightarrow a = a'$ .

**Esercizio 3.** Sull'insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  si definisca la relazione  $\triangleleft$  ponendo, per ogni  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,

$$(a, b) \triangleleft (c, d) \text{ se } a \neq c, a|c \text{ oppure } a = c, b \leq d.$$

(a) Si provi che  $\triangleleft$  è una relazione d'ordine su  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

(b) Si trovino, se esistono, massimo, minimo, elementi minimali ed elementi massimali di  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \triangleleft)$ .

**Esercizio 4.** Determinare gli  $x \in \mathbb{Z}$  tali che

$$4^{36001} \cdot x \equiv 6^{34568172} \pmod{19}.$$