Corso di Algebra I. A.A. 2007-2008

Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2006

Esercizio 1. Sia
$$A = \{ \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \}.$$

(a) Si provi che A è un anello commutativo rispetto alla somma ed al prodotto di matrici.

(b) Si determinino i divisori dello zero di A.

(c) Si provi che $\phi : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ definito da
$$\phi\left(\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix} \right) = a$$
è un omomorfismo di anelli.

(d) Si dica se $\mathrm{Ker}(\phi)$ è un ideale primo e/o massimale di A.

Esercizio 2. Sia
$$A = \frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}.$$

(a) Si determini la caratteristica di A.

(b) Si provi che se $a \in A$ verifica $5a = 0_A$, allora $a = 0_A$.

(c) Si provi che se b, c sono elementi di A tali che $41b = 31c$, allora $b = -c$.

Esercizio 3.

(a) Si provi che 3 è un elemento irriducibile ma non primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$.

(b) Si fornisca un esempio di divisore dello zero dell'anello quoziente
$$\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]}{I}$$
dove $I = (3)$ è l'ideale generato da 3 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$.

Esercizio 4. Si determini un generatore dell'ideale
$$I = (x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 4,\ x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 2)$$
di $\mathbb{Q}[x]$.

Si dica se l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$ è un campo.