Corso di Algebra 1. A.A. 2007/2008.
Prova scritta del 4 settembre 2008

Esercizio 1. Sia $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Sull'insieme $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per $a, b \in A$,

$$a \sim b \text{ se } (a-b)(a+b-1) = n\mathbb{Z}.$$

(a) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su A.

(b) Assumendo che n sia un primo dispari, si determini il numero di classi di equivalenza di A modulo $\sim$.

Esercizio 2. Si determinino i numeri interi x tali che

$$2^{x^2} \equiv 2^x \pmod{15}.$$

Esercizio 3. Sia A un dominio di integrità.

(a) Si provi che (x) è un ideale primo dell'anello dei polinomi $A[x]$.

(b) Si dimostri la seguente affermazione:

ogni ideale primo $I \neq 0$ di $A[x]$ è massimale se e solo se A è un campo.

Esercizio 4. Sia $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

(a) Si determinino i divisori dello zero e gli elementi invertibili di A.

(b) Si determini il massimo intero n per cui esite un omomorfismo

$$\varphi : A \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

(c) Si provi che $I = \{a \in A : a + a + a = 0\}$ è un ideale di A. Si dica se I è principale e, se lo è, se ne determini un generatore.