Corso di Algebra 1. A.A. 2007/2008.

Prova scritta del 5 febbraio 2008

Esercizio 1. Sull'insieme $A = \{a^n \mid a, n \in \mathbb{N},\ a, n \geq 2\}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo

$$a^n \trianglelefteq b^m \quad \text{se} \quad a \mid b \ \text{ e } \ n \leq m.$$

(a) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su A.

(b) Si determinino eventuali elementi massimali, minimali, massimi, minimi in $(A, \trianglelefteq)$.

(c) Posto $B = \{a^n \in A \mid 1 \leq a \leq 7,\ n|6\}$, si determinino, se esistono, $\inf B$ e $\sup B$.

Esercizio 2. Sia determinino le soluzioni intere della congruenza

$$x^{201} \equiv x^{21} \pmod{209}.$$

Esercizio 3. Sia $\phi : R \longrightarrow S$ un omomorfismo di anelli.

(a) Si provi che se u è un elemento invertibile di R, allora $\phi(u)$ è un elemento invertibile di S.

(b) Si mostri con un esempio opportuno che è possible che, per qualche $a \in A$, $\phi(a)$ sia invertibile in S ma a non sia invertibile in R.

(c) Si dica se è sempre vero che, dato $a \in A$, se $\phi(a)$ è un divisore dello zero di S allora a è un divisore dello zero di R

Esercizio 4. sia A un Dominio a Ideali Principali e sia $a \in A$ un elemento irriducibile; fissato $1 \leq m \in \mathbb{N}$, sia $I = (a)$.

(a) Si provi che (a) è l'unico ideale massimale di A che contiene I.

(b) Dato $b \in A$, si dimostrii che $b + I$ è invertibile in A/I se e solo se a non divide b.

Esercizio 5. Sia $f = x^4 - x^3 - x^2 + 4x \in \mathbb{Q}[x]$ e, al variare di $a \in \mathbb{Q}$, sia $h_a = x^2 + a$. si dica per quali valori razionali di a si ha che h_a divide f, e per quali si ha $(f, h_a) = 1$.