Corso di Algebra I. A.A. 2005-2006

ESAME SCRITTO DEL 6 SETTEMBRE 2006

Esercizio 1. Se a è un numero reale, si indica con $[a]$ la *parte intera* di a, ovvero il massimo numero intero minore o uguale ad a. Sia

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

l'applicazione definita da, per ogni $z \in \mathbb{Z}$, $f(z) = (\bar{z}, [z/2])$
(dove $\bar{z}$ è la classe di congruenza modulo 2 di z).

a) Si provi che f è una biezione.

b) Si descriva l'applicazione inversa.

c) Posto $A = \{(\bar{1}, 3z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$, si determini la controimmagine $f^{-1}(A)$.

Esercizio 2. Sia p un numero primo positivo. Si determinino gli interi x soluzione della congruenza

$$x^{p-2} \equiv 1 \pmod{p} .$$

Esercizio 3. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri il sottoinsieme

$$J = \{(x - 2y) + i(2x + y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} .$$

a) Si provi che J è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.

b) Si determini un generatore di J.

c) Si dica se J è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 4. Si dica per quali numeri primi positivi p, l'ideale

$$(x^4 - px^3 + 3x - p)$$

è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x]$.