Corso di Algebra II. A.A. 2006-2007

ESAME SCRITTO DEL 9 LUGLIO 2007

Esercizio 1. (6 punti) Sia G un gruppo e siano $g, h \in G$ con $|g| = n$, $|h| = m$ (dove m ed n sono interi ≥ 1). Assumendo che G sia un gruppo ciclico, si determini $|gh|$.

Esercizio 2. (8 punti) L'insieme T delle terne ordinate

$$T = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

con l'operazione definita da

$$(a, b, c)(a', b', c') = (a + a', b + b', ab' + c + c')$$

è un gruppo (questo non occorre dimostrarlo)

(a) Sia $A = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$; si provi che A è un sottogruppo di T, e si dica se è normale.

(b) Si determini un omomorfismo suriettivo $T \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e si provi che il suo nucleo è contenuto nel centro di T.

Esercizio 3. (11 punti) Sia $E|\mathbb{Q}$ un'estensione di Galois, e sia $G = Gal(E|\mathbb{Q}) = \{1 = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ il suo gruppo di Galois. Sia $u \in E \setminus \mathbb{Q}$.

(a) Si provi $g_u = (x - \alpha_1(u)) \cdots (x - \alpha_n(u))$ è un polinomio in $\mathbb{Q}[x]$. .

(b) Si provi che se $[E : \mathbb{Q}]$ è un numero primo allora g_u è irriducibile.

(c) Sie E il campo di spezzamento di $x^4 - 2$ su $\mathbb{Q}$, e sia $u = \sqrt{2}$. Si provi che $u \in E$ e che g_u non è irriducibile.

Esercizio 3. (5 punti) Sia $E|F$ un'estensione di campi, siano M_1, $M_2, \dots,$ M_n sottocampi di E contenenti F (dove $2 \leq n \in \mathbb{N}$), e sia $M = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$. Si provi che se ciascuna delle estensioni $M_i|F$ (per $i = 1, \dots, n$) è normale allora anche l'estensione $M|F$ è normale. Quanto è rilevante il fatto che i campi M_i siano in numero finito?