Corso di Algebra I. A.A. 2005-2006

Esame scritto del 11 Luglio 2006

Esercizio 1. Sia ω la relazione su $\mathbb{Z}$ definita ponendo, per $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a\omega b \quad \text{se} \quad a^3 \equiv b^3 \pmod 7.$$

a) Si provi che ω è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$.

b) Si determini l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\omega$.

Esercizio 2. Si determinino gli interi k per cui il numero

$$2^{1198765432104} + k$$

sia divisibile per 13.

Esercizio 3. Per ogni $2 \leq n \in \mathbb{N}$, sia

$$\Delta_n = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{2}\right]$$

(dove, per $a \in \mathbb{Q}$, $[a]$ denota la parte intera di a). Si provi che

$$\Delta_n = \begin{cases} [n/2]^2 & \text{se n è pari} \\ [n/2]^2 + [n/2] & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia A un dominio di integrità. Si supponga che ogni elemento non nullo e non invertibile di A si fattorizzi in prodotto di irriducibili e che, se $x, y \in A$ sono irriducibili, allora x e y sono associati in A. Si provi che:

a) A è un dominio a fattorizzazione unica;

b) A è un dominio a ideali principali e gli ideali di A sono un insieme totalmente ordinato rispetto all'inclusione;

c) $A \setminus U(A) = \{a \in A \mid a \text{ non invertibile}\}$ è l'unico ideale massimale di A

Esercizio 5. Sia $f = x^4 - 6x^2 + 8x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Si dica se l'ideale (f) è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x]$.

b) Sia $\overline{f}$ la riduzione di f modulo 5; si dica se l'ideale $(\overline{f})$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$.