Corso di Algebra 1. A.A. 2007/2008.
Prova scritta del 11 luglio 2008

Esercizio 1. Sia p un numero primo e sull'insieme $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{se} \quad ad = bc.$$

(a) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su A.

(b) Si determini un sistema di rappresentanti per le classi di equivalenza di A modulo $\sim$..

Esercizio 2. Si stabilisca per quali coppie $(x, y) \in \mathbb{Z}$ vale

$$\begin{cases} 3x + 2y \equiv 1 \quad (mod\ 7) \\ 2x - y \equiv 2 \quad (mod\ 7) \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(a) Si determinino l'insieme dei divisori dello zero e l'insieme degli elementi invertibili di R.

(b) Sia $I = (r)$, dove $r = (3 + 15\mathbb{Z}, 2 + 7\mathbb{Z}) \in R$; si dica se I è un ideale primo e/o massimale di R.

(c) Si determini la caratteristica di R.

(d) Si dica se esiste un omomorfismo $\phi : R \to S$, con $S = \mathbb{Z}/155\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $\Sigma = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(n) = f(-n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Si provi che Σ è un sottoanello di $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Si provi che Σ è un dominio euclideo.

(c) Sia $f \in \Sigma$; si provi che $f(r) = f(-r)$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$.