Corso di Algebra II. A.A. 2006-2007

ESAME SCRITTO DEL 12 FEBBRAIO 2007

Esercizio 1. (15 punti) Per ogni $a \in \{1, -1\}$ e $b \in \mathbb{Z}$, sia $\sigma_{a,b} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da, per ogni $z \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma_{a,b}(z) = az + b.$$

Sia $\Sigma = \{\sigma_{a,b} \mid a \in \{1, -1\},\ b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Si provi che Σ è un sottogruppo di $Sym(\mathbb{Z})$.

(b) Si provi che $Z(\Sigma) = \{\iota_{\mathbb{Z}}\}$.

(c) Sia $\eta = \sigma_{1,1}$. Si provi che $\langle \eta \rangle$ è un sottogruppo normale di Σ e si determini l'indice $[\Sigma : \langle \eta \rangle]$.

(d) Sia p un numero primo, e $\Omega_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$. Si provi che ponendo, per ogni $\sigma \in \Sigma$ e $u \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{u} \cdot \sigma = \overline{\sigma^{-1}(u)}$$

si definisce un'azione di Σ su Ω_p.

(e) Si dica se l'azione definita al punto (d) è transitiva; se ne determini il nucleo K_p, e si calcoli $|\Sigma/K_p|$.

Esercizio. (9 punti) Sia $u \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $x^4 - 2x^2 + 9 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Si dica se l'insieme $\{a + bu^2 \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ è un campo.

(b) Si provi che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^3)$.

(c) Si determini il grado dell'estensione $\mathbb{Q}(u^3 - u)|\mathbb{Q}$.

Esercizio 3. (6 punti) Si determini il gruppo di Galois del campo di spezzamento del polinomio $f(x) = (x^3 - 1)(x^4 - 1)$ su $\mathbb{Q}$.