Corso di Algebra II. A.A. 2006-2007

ESAME SCRITTO DEL 12 GIUGNO 2007

Esercizio 1. (12 punti) Sia p un numero primo e sia $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ il campo di ordine p. Sull'insieme $G = \{(a, b) \mid a, b \in K,\ b \neq 0\}$ si definisca l'operazione:

$$(a, b)(c, d) = (a + bc, bd).$$

(a) Sapendo che l'operazione sopra definita è associativa, si provi che $(G, \cdot\,)$ è un gruppo.

(b) Si provi che $H = \{(0, b) \mid 0 \neq b \in K\}$ è un sottogruppo di G e si dica se è normale.

(c) Sia P un p-gruppo finito, e sia $\phi : G \longrightarrow P$ un omomorfismo. Si provi che $H \leq \ker(\phi)$; si deduca che ϕ è l'omomorfismo banale.

Esercizio 2. (10 punti) Sia E il campo di spezzamento (in $\mathbb{C}$) del polinomio razionale $f = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$

(a) Si provi che f ha una sola radice reale in E.

(b) Si provi che il coniugio complesso γ induce un $\mathbb{Q}$–automorfismo di E.

(c) Si determini $[Inv_E(\langle\gamma\rangle) : \mathbb{Q}]$, e si dica se l'estensione $Inv_E(\langle\gamma\rangle)|\mathbb{Q}$ è di Galois.

Esercizio 3. (10 punti) Sia $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i\sqrt{3})$.

(a) Si provi E contiene tutte le radici di $x^3 - 3$.

(b) Si dice se l'estensione $E|\mathbb{Q}$ è normale.

(c) Si determini il grado $[E : \mathbb{Q}]$ e il gruppo $Gal(E|\mathbb{Q})$.