Corso di Algebra I. A.A. 2005-2006

Esame scritto del 13 Giugno 2006

Esercizio 1. Applicando il principio d'induzione, si provi che per ogni $n \geq 1$

$$7^n + 3n - 1$$

è un multiplo di 9.

Esercizio 2. Sia $n \geq 1$ un fissato intero. Dato $a \in \mathbb{Z}$, siano $h, k \in \mathbb{Z}$ tali che $ah + nk = (a, n)$.
1) Si provi che porre

$$f(a) = (a, n)h + n\mathbb{Z}$$

definisce una funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2) Si provi che se $f(a) = 1 + n\mathbb{Z}$ allora $(a, n) = 1$, e quindi si determini la retroimmagine $f^{-1}(1 + n\mathbb{Z})$.

Esercizio 3 . Si determinino i numeri primi positivi p per cui valga la congruenza

$$3^{5(p^2-1)} \equiv 5^{3(p^2-p+1)} \pmod{p}\,.$$

Esercizio 4. Si determinino i valori $k \in \mathbb{Z}$ per cui il polinomio

$$p_k(x) = x^3 - 4kx^2 + k^2x + 3$$

è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

Esercizio 5. Sia X un insieme finito non vuoto e sia

$$A = \{f : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$$

l'insieme delle funzioni da A in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Rispetto alle operazioni definite da, per $f, g \in A$ e $x \in X$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$, l'insieme A è un anello commutativo (non occorre verificare questo).

Si definisca, per ogni $f \in A$,

$$T_f = \{x \in X | f(x) = 1 + n\mathbb{Z}\}\,.$$

a) Si provi che, per $f, g \in A$, $T_f \cup T_g = T_{fg+f+g}$.

b) Si provi che, per ogni ideale I di A, l'insieme parzialmente ordinato (rispetto all'inclusione) $\mathcal{T}_I = \{T_f | f \in I\}$ ha un massimo e un minimo [per il massimo: si osservi che, essendo finito, $\mathcal{T}_I$ ha elementi massimali ...].

c) Si provi che ogni ideale di A è principale.