Corso di Algebra 1. A.A. 2007/2008.
Prova scritta del 13 giugno 2008

Esercizio 1. Sull'insieme $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ di tutte le applicazioni da $\mathbb{N}$ in se stesso, si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $f, g \in \Omega$,

$$f \sim g \quad \text{se esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \; f(x) = g(x) \; \text{ per ogni } x \geq n.$$

(a) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su Ω.

(b) Sia $\overline{\Omega} = \Omega/\sim$ l'insieme quoziente. Si provi che il porre, per ogni $f, g \in \Omega$,

$$[f]_\sim \trianglelefteq [g]_\sim \quad \text{se e solo se esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } f(x) \leq g(x) \text{ per ogni } x \geq n$$

definisce una relazione su $\overline{\Omega}$.

Esercizio 2. Sia determini l'ultima cifra nella scrittura in base 7 del numero intero 3^{2515}.

Esercizio 3. Siano $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q},\; a - b = b + c \right\}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} q & r \\ 0 & q \end{pmatrix} \;\middle|\; q, r \in \mathbb{Q} \right\}.$$

(a) Si provi A e B sono sottoanelli dell'anello $M_2(\mathbb{Q})$.

(b) Si provi che l'applicazione $\phi : A \to B$ definita da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - b & b \\ 0 & b + c \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di anelli.

(c) Si determinino gli elementi invertibili e i divisori dello zero di A.

(d) Posto $U(A)$ l'insieme degli elementi invertibili di A, si provi che $A \setminus U(A)$ è un ideale di A.

Esercizio 4. Siano I e J ideali propri dell'anello commutativo R, con $I \neq J$.

(a) Si provi che se I è massimale, allora $I + J = R$.

(b) Si provi che se I è massimale e $I \cap J$ è primo, allora $J \subseteq I$ oppure $J = R$.

(c) Si provi che un anello commutativo in cui ogni ideale proprio è primo, ha un solo ideale massimale.