Corso di Algebra I. A.A. 2005-2006

Esame scritto del 14 Febbraio 2006

Esercizio 1. Sia p un numero primo positivo, e sia $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p & \to & \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \\ & (a,b) & \mapsto & (a+b, ab) \end{array}$$

(a) Si dica se f è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Si determini $|Im(f)|$.

(c) Si provi che $(\bar{1}, \bar{1}) \in Im(f)$ se e solo se il polinomio $x^2 - x + \bar{1}$ non è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

Esercizio 2. Sia $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Sull'insieme $\mathbb{N}$ si definisca la relazione $\lhd_k$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \lhd_k b \qquad \text{se} \qquad (a,k) \leq (b,k) \;\text{ e }\; [a,k] \leq [b,k].$$

(a) Si provi che $\lhd_k$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{N}$.

(b) Si dica se l'insieme parzialmente ordinato $(\mathbb{N}, \lhd_k)$ ha un elemento massimo e/o un elemento minimo.

(c) Si provi $\lhd_k$ è un ordine totale se e solo se $k = 1$.

(d) Posto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < k\}$, si determinino i valori $k \geq 1$ per i quali l'insieme A ha un massimo (rispetto alla relazione d'ordine $\lhd_k$).

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo e siano I, J ideali di A. Si ponga

$$T_{I,J} = \{a \in A \mid ax \in J \text{ per ogni } x \in I\}.$$

(a) Si provi che $T_{I,J}$ è un ideale di A.

(b) Si provi che se A/J è un dominio d'integrità allora, per ogni ideale I di A, si ha $T_{I,J} = J$ oppure $T_{I,J} = A$.

(c) Sia $A = \mathbb{Z}$ e siano n, m interi positivi; si determini $T_{n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}}$.

Esercizio 4. Si determini per quali valori $\lambda \in \mathbb{Q}$ si ha

$$(x^5 + 3x^3 - \lambda^2 x + 3\lambda\,,\, x^3 - x^2 + \lambda x - \lambda) \neq \mathbb{Q}[x].$$