Corso di Algebra II. A.A. 2006-2007

ESAME SCRITTO DEL 16 GENNAIO 2007

Esercizio 1. (6 punti) Siano M, N sottogruppi normali del gruppo G.

(a) Si provi che l'applicazione $\phi : G \to G/N \times G/M$ definita ponendo, per $g \in G$, $\phi(g) = (gN, gM)$ è un omomorfismo. Si determini il nucleo di ϕ.

(b) Supponendo che $N \cap M = 1$ e che G/N e G/M siano abeliani, si provi che G è abeliano.

Esercizio 2. (10 punti) Sia p un numero primo. Per ogni coppia ordinata (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, si consideri l'applicazione $\pi_{(a,b)} : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ definita ponendo, per $x \in \mathbb{Z}_p$, $x\pi_{(a,b)} = xa + b$. Sia

$$G = \{\pi_{(a,b)} | a, b \in \mathbb{Z}_p, a \neq 0\}.$$

(i) Si provi che G_p è un sottogruppo di $Sym(\mathbb{Z}_p)$ e che G_p è transitivo su $\mathbb{Z}_p$.

(ii) Si provi che $N = \{\pi_{(1,b)} | b \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo normale, di ordine p, di G_p.

(iii) Si determini lo stabilizzatore S di 0 in G_p e si provi che S agisce transitivamente su $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

Esercizio 3. (4 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + 2$ e $\beta = \alpha^2 + 1 \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Si determini l'elemento β^{-1} come combinazione lineare degli elementi di una base di $\mathbb{Q}[\alpha]$ su $\mathbb{Q}$ costituita da opportune potenze di α.

Esercizio 4. (10 punti) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducibile di grado 4, e sia $E \subseteq \mathbb{C}$ il suo campo di spezzamento. Si supponga che f abbia due radici reali e due radici non reali.

(i) Sia $L = E \cap \mathbb{R}$; si provi che $[E : L] = 2$ e che l'estensione $L|\mathbb{Q}$ non è normale.

(ii) Si provi che $[E : \mathbb{Q}] \in \{8, 24\}$.

(iii) Sia $f = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2 = (x^2 + x + \sqrt{2})(x^2 + x - \sqrt{2})$; si provi che f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ e che, posto $E \subseteq \mathbb{C}$ il suo campo di spezzamento, si ha $[E : \mathbb{Q}] = 8$.