Corso di Algebra I. A.A. 2005-2006

ESAME SCRITTO DEL 18 GENNAIO 2006

Esercizio 1. Sia A un insieme fissato e non vuoto. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme di tutte le relazioni d'equivalenza di A, ordinato mediante inclusione (ovvero, se ρ e σ sono equivalenze su A, si scrive $\rho \leq \sigma$ se $\rho \subseteq \sigma$ come sottoinsiemi di $A \times A$).

(a) Siano $\rho, \sigma \in \mathcal{E}$. Si provi che se $\rho \leq \sigma$ allora ogni classe di equivalenza relativa a σ è una unione di classi di equivalenza relative a ρ.

(b) Si dica se $\mathcal{E}$ ammette un elemento massimo e/o minimo.

(c) Sia ω la relazione banale su A. Si descrivano gli elementi massimali di $\mathcal{E} \setminus \{\omega\}$.

Esercizio 2. Si determinino le soluzioni dell'equazione diofantea:

$$910x + 1406y = 8.$$

Esercizio 3. Sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si definiscano le operazioni

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad \text{e} \qquad (a, b)(c, d) = (ac, ad + bc),$$

per ogni $(a, b), (c, d) \in A$.

(a) Rispetto a tali operazioni, A è un anello (non occorre dimostrare questo). Si determinino 0_A e 1_A, e si dica se A è commutativo.

(b) Si determinino gli elementi invertibili ed i divisori dello zero di A.

(c) Si provi che A ha un unico ideale massimale I.

(d) Si dimostri che A/I è isomorfo a $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4. Si provi che il polinomio

$$5(x-1)^5 + 6(x-1)^4 + 8(x-1)^3 + 12(x-1)^2 + 18$$

è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$. È irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$?

Esercizio 5. Procedendo per induzione, si provi che per ogni $n \geq 2$,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$