Corso di Algebra 1. A.A. 2007/2008.

Prova scritta del 18 gennaio 2008

Esercizio 1. Fissato $2 \leq q \in \mathbb{N}$, nell'anello di polinomi $\mathbb{Z}[x]$ si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, con $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $g = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$,

$$f \sim g \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv \sum_{i=0}^{m} b_i \pmod q$$

(a) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

(b) Si determini il numero di classi di equivalenza in $\mathbb{Z}[x]$ modulo $\sim$, e si dica quali tra tali classi sono ideali di $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 2. Sia p un numero primo; sia $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, e $0 \neq f \in A[x]$. Si provi che, posto N il numero di radici distinte di f in A, si ha:

$$N + p\mathbb{Z} = \sum_{a \in A} (1 - f(a)^{p-1}).$$

Esercizio 3. Sia R un anello e sia $\emptyset \neq S \subseteq R$ un suo sottoinsieme. Si definisce l'*annullatore* (sinistro) di S in R con

$$Ann_R(S) = \{x \in R \mid xs = 0_R \text{ per ogni } s \in S\}.$$

(a) Sia $R = M_2(\mathbb{R})$ e $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; si dica se $Ann_R(\{s\})$ è un ideale di R.

(b) Sia R un anello commutativo; si provi che $Ann_R(S)$ è un ideale di R per ogni $\emptyset \neq S \subseteq R$, .

(c) Fissati $p, n \in \mathbb{N}$ con p un primo e $n \geq 2$, sia $R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Si determini $Ann_R(\{s\})$, con $s = p^{n-1} + p^n\mathbb{Z} \in R$.

(d) Sia R un anello commutativo, e sia I un ideale massimale di R; si provi che $Ann_R(I) \subseteq I$ oppure $Ann_R(I) \cap I = \{0_R\}$. [sugg.: se $Ann_R(I) \not\subseteq I$, allora $Ann_R(I) + I = \ldots$]

Esercizio 4. Sia p un fissato numero primo positivo. Si dica per quali valori $0 \leq a \in \mathbb{Z}$ l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/(x^3 + ax + p)$ è un campo.