Corso di Algebra II. A.A. 2006-2007

ESAME SCRITTO DEL 24 SETTEMBRE 2007

Esercizio 1. (10 punti) Sull'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ si definisca l'operazione $*$ ponendo, per $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a * b = \begin{cases} a + b & \text{se } a \text{ è pari} \\ a - b & \text{se } a \text{ è dispari.} \end{cases}$$

(a) Si provi che $G = (\mathbb{Z}, *)$ è un gruppo.

(b) Si provi che il sottoinsieme P dei numeri interi pari è un sottogruppo normale di G.

(c) Si determini il tipo di isomorfismo del gruppo quoziente G/P.

Esercizio 2. (7 punti) Sia G un gruppo di ordine 21 e si assuma che esista un omomorfismo non banale $\phi : G \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (cioè tale che G non coincide col nucleo).

(a) Si provi che G ha un unico sottogruppo normale di ordine 3.

(b) Si provi che G è ciclico.

Esercizio 3. (7 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ un elemento algebrico su $\mathbb{Q}$.

(a) Si provi che esiste una minima estensione normale E di $\mathbb{Q}$ che contiene $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(b) Supposto che $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = n$, si provi che $[E : \mathbb{Q}]$ divide $n!$

Esercizio 4. (9 punti) Si provi che $E = \mathbb{Q}[i\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}]$ è il campo di spezzamento del polinomio $x^3 - 3$ su $\mathbb{Q}$. Si determini il gruppo di Galois dell'estensione $E|\mathbb{Q}$.