Corso di Algebra I. A.A. 2005-2006

Esame scritto del 25 settembre 2006

Esercizio 1. (a) Si provi che porre, per $a \in \mathbb{Z}$,

$$f(a + 30\mathbb{Z}) = 14a + 105\mathbb{Z}$$

definisce una funzione $f : \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$.
(b) Si dica se f è iniettiva e/o suriettiva.
(c) Si determini la retroimmagine $f^{-1}(21 + 105\mathbb{Z})$.

Esercizio 2. Dato un insieme finito I si consideri su $A = \mathcal{P}(I)$ la relazione definita da, per $X, Y \in A$,

$$X \trianglelefteq Y \quad \text{se} \quad X \subseteq Y \quad \text{e} \quad |Y \setminus X| \quad \text{è pari.}$$

(a) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su A.
(b) Si determinino gli elementi massimali e minimali in $(A, \trianglelefteq)$

Esercizio 3. a) Si determinino le soluzioni intere della congruenza

$$x^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

ammette soluzioni intere.

(b) Sia $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, e sia $0 \neq a \in F$. Si provi che, in $F[x]$, il polinomio $x^3 + a$ è irriducibile oppure si decompone come il prodotto di tre fattori distinti.

Esercizio 3. Un ideale I di un anello R si dice *minimale* se $I \neq \{0\}$ e per ogni ideale Y con $\{0\} \subseteq Y \subseteq I$ si ha $Y = \{0\}$ oppure $Y = I$.
(a) Sia R un anello commutativo e sia I un ideale minimale di R. Si provi che tutti gli elementi $\neq 0$ di I sono tra loro associati in R.
(b) Sia A un Dominio d'integrità. Si provi che se A ammette un ideale minimale I, allora $I = A$ e A è un campo.