1. Media aritmetica contro media geometrica

Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri reali con $a_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.
La *media aritmetica* dei valori $a_1, \ldots, a_n$ è

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n};$$

mentre la loro *media geometrica* è

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Proviamo che, per ogni $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty)$,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}. \tag{1}$$

Cominciamo con l'osservare che la (1) è equivalente a

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \cdots a_n \tag{2}$$

Esistono diverse dimostrazioni di questo fatto; quella che vediamo, che fa uso del principio di induzione in una maniera relativamente insolita e istruttiva, è dovuta a L. A. Cauchy.

passo1. *(2) è vera per $n = 2$.*

Infatti, dalla diseguaglianza elementare $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$, segue

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \geq 4a_1a_2.$$

passo 2. *Se (2) è vera per n allora è vera per $2n$.*

Infatti, se la disuguaglianza sussiste per n termini, allora, utilizzando anche il passo 1,

$$\begin{aligned}
a_1 \cdots a_{2n} &= (a_1 \cdots a_n)(a_{n+1} \cdots a_{2n}) \leq \left[\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}\right]^n \leq \\
&\leq \left[\frac{1}{4}\Big(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}\Big)^2\right]^n = \\
&= \left[\Big(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{2n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{2n}\Big)^2\right]^n = \left[\frac{a_1 + \ldots + a_{2n}}{2n}\right]^{2n}.
\end{aligned}$$

passo 3. *Per ogni $t \geq 0$ la (2) è vera per $n = 2^t$.*

Applicando il passo 1 per $t = 1$ e quindi, grazie al passo 2, con una semplice induzione su t.

passo 4. *(2) è vera per ogni n.*

Sia $n \geq 2$ e sia m il massimo intero positivo tale che $2^m \geq n$. Se $n = 2^m$ la cosa è gia stata provata; supponiamo quindi che $t = 2^m - n \geq 1$. Dati i nostri n termini $a_1, \ldots a_n$, poniamo

$$M = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(ovvero: $a_1 + \ldots + a_n = nM$), e consideriamo dei termini aggiuntivi

$$a_{n+1} = \ldots = a_{n+t} = M.$$

Allora

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} \ldots + a_{n+t}}{n+t} = \frac{a_1 + \ldots + a_n + tM}{n+t} = \frac{nM + tM}{n+t} = M.$$

Poiché $n + t = 2^m$, per il passo 3 si ha quindi

$$(a_1 \cdots a_n)M^t = a_1 \cdots a_{n+t} \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n+t}}{n+t}\right)^{n+t} = M^{n+t}$$

da cui

$$a_1 \cdots a_n \leq \ M^n$$

che è quello che si voleva provare.

2. Il numero di funzioni suriettive

Siano A e B due insieni finiti, con $|A| = m$ e $|B| = n$. Abbiamo visto (Proposizione 2.11) che, quando $n \geq m$, il numero di funzioni **iniettive** da A a B è dato da

$$D(n, m) = n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

(chiaramente, se $n < m$ non esistono applicazioni iniettive da A in B, per cui potremmo porre $D(n, m) = 0$ se $n < m$); se $n = m$ si ha - come deve essere - $D(n, n) = n!$.

Vogliamo ora una formula in n e m che dia il numero di applicazioni **suriettive** da A in B, che denoteremo con $\mathcal{J}(m, n)$. Chiaramente, se $m < n$ non ci sono applicazioni suriettive da A in B, dunque

$$\mathcal{J}(m, n) = 0 \ \text{ se } \ m < n.$$

Osserviamo anche che dovrà essere, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{J}(n, n) = n!$

Proviamo che, per ogni $1 \leq n \leq m$, si ha

$$\mathcal{J}(m, n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m. \tag{3}$$

La nostra dimostrazione ricorre al cosiddetto principio di inclusione-esclusione. Questo, nella sua forma più semplice, non è altro che la formula generale che esprime la cardinalità di un'unione finita di insiemi finiti (si tratta della generalizzazione del secondo punto della Proposizione 2.9 a cui si fa cenno dopo l'enunciato di quella). Precisamente:

Inclusione-Esclusione: *Siano* $A_1, \dots, A_k$ *insiemi finiti, e* $X = \{1, 2, \dots, k\}$*; allora*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq X} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|. \tag{4}$$

Veniamo alla questione delle applicazioni suriettive. Per ogni $b \in B$ denotiamo con A_b l'insieme delle funzioni $\phi : A \to B$ tali che $b \notin Im(\phi)$ (ovvero $Im(\phi) \subseteq B \setminus \{b\}$). Banalmente, dunque, l'insieme delle applicazioni suriettive da A in B è

$$B^A \setminus \bigcup_{b \in B} A_b,$$

quindi

$$\mathcal{J}(m, n) = |B^A| - \Big| \bigcup_{b \in B} A_b \Big|. \tag{5}$$

Per ogni $X \subseteq B$ denotiamo con A_X l'insieme di tutte le applicazioni $\phi : A \to B$ tali che $Im(\phi) \subseteq B \setminus X$; se $|X| = j$ (con $0 \leq j \leq n = |B|$), si ha

$$|A_X| = |(B \setminus X)^A| = (n - j)^m. \tag{6}$$

Inoltre, chiaramente,

$$A_X = \bigcap_{b \in X} A_b$$

Applicando la formula (4):

$$\Big| \bigcup_{b \in B} A_b \Big| = \sum_{\emptyset \neq X \subseteq B} (-1)^{|X|+1} \Big| \bigcap_{b \in X} A_b \Big| = \sum_{\emptyset \neq X \subseteq B} (-1)^{|X|+1} |A_X|$$

e quindi

$$\Big| \bigcup_{b \in B} A_b \Big| = \sum_{1 \leq j \leq n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} (n - j)^m = - \sum_{1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n - j)^m.$$

Finalmente, dalla (5), ricaviamo la formula voluta

$$\mathcal{J}(m, n) = n^m + \sum_{1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n - j)^m = \sum_{0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n - j)^m.$$