

Corso di Teoria dei Grafi e Combinatoria  
A.A. 2016/2017

Carlo Casolo, Francesco Fumagalli



# Indice

<b>1</b>	<b>Grafi: concetti di base.</b>	<b>5</b>
1.1	L'idea di grafo. . . . .	5
1.2	Vertici, cammini, cicli. . . . .	12
1.3	Cammini euleriani e hamiltoniani. . . . .	17
1.4	Alcuni invarianti fondamentali. . . . .	24
1.5	Grafi diretti . . . . .	29
1.6	Esercizi. . . . .	31
<b>2</b>	<b>Altra combinatoria</b>	<b>35</b>
2.1	Il principio dei cassetti. . . . .	35
2.2	Catene e anticate. . . . .	39
2.3	Geometrie finite . . . . .	41
2.4	Insieme delle parti. . . . .	45
2.5	Esercizi. . . . .	54
<b>3</b>	<b>Alcune classi di grafi</b>	<b>57</b>
3.1	Alberi. . . . .	57
3.2	Grafi planari. . . . .	64
3.3	Grafi bipartiti. . . . .	70
3.4	Esercizi e complementi. . . . .	79
<b>4</b>	<b>Reti, flussi, connettività</b>	<b>87</b>
4.1	Reti e flussi. . . . .	87
4.2	Connettività e Teorema di Menger. . . . .	93
4.3	Fattori. . . . .	99
4.4	Esercizi . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Colorazioni</b>	<b>105</b>
5.1	Colorazioni dei vertici. . . . .	106
5.2	Colorazioni dei lati. . . . .	111
5.3	L-colorazioni. . . . .	115
5.4	Grafi perfetti . . . . .	118
5.5	Esercizi. . . . .	121

<b>6</b>	<b>Teoria di Ramsey</b>	<b>125</b>
6.1	Teoremi di Ramsey per grafi. . . . .	125
6.2	Teoremi di Ramsey per insiemi. . . . .	130
6.3	Alcune applicazioni dei teoremi di Ramsey. . . . .	132
6.4	I Teoremi di Van der Waerden e di Hales-Jewett . . . . .	137
6.5	Esercizi. . . . .	143
<b>7</b>	<b>Grafi e algebra</b>	<b>147</b>
7.1	Grafi regolari. . . . .	147
7.2	Matrice d'adiacenza. . . . .	150
7.3	Grafi fortemente regolari. . . . .	157
7.4	Expanders . . . . .	161
7.5	Esercizi e complementi. . . . .	166
<b>8</b>	<b>Grafi e gruppi</b>	<b>171</b>
8.1	Automorfismi. . . . .	171
8.2	Grafi di Cayley. . . . .	175
8.3	Grafi di Schreier . . . . .	181
8.4	Esercizi . . . . .	182

# Capitolo 1

## Grafi: concetti di base.

### 1.1 L'idea di grafo.

Sia  $V$  un insieme e sia  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ; si denota con  $V^{[n]}$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $V$  di cardinalità  $n$ . Dunque, in particolare, se  $V$  è un insieme finito,  $|V^{[n]}| = \binom{|V|}{n}$ .

Un **multigrafo** è una tripla  $G = (V, E, \phi)$ , dove  $V$  ed  $E$  sono insiemi, con  $V \neq \emptyset$ , e  $\phi$  è un'applicazione

$$\phi : E \longrightarrow V^{[2]}.$$

In tal caso,  $V$  ed  $E$  sono detti, rispettivamente, l'insieme dei **vertici** e quello degli **archi** (o *lati*) di  $G = (V, E, \phi)$ . Il multigrafo  $G = (V, E, \phi)$  si dice *finito* se entrambi gli insiemi  $V$  e  $E$  lo sono. Se  $e \in E$ , allora i due vertici appartenenti a  $\phi(e)$  si dicono gli *estremi* di  $e$ . Dato  $v \in V$ , il **grado** (o *valenza*) di  $v$  è il numero di archi  $e \in E$  di cui  $v$  è un estremo, e si denota con  $d_G(v)$ . Un vertice che non sia estremo di alcun arco (cioè tale che  $d_G(v) = 0$ ) si dice vertice *isolato* di  $G$ .

Chiameremo **grafo** un multigrafo  $G = (V, E, \phi)$  in cui l'applicazione  $\phi$  è iniettiva. In tal caso è conveniente identificare  $E$  con la sua immagine in  $V^{[2]}$  tramite  $\phi$ , e quindi vedere l'insieme degli archi di  $G$  come un sottoinsieme di  $V^{[2]}$ . Esplicitamente: un grafo è una coppia  $(V, E)$ , dove  $V$  è un insieme non vuoto ed  $E$  è un sottoinsieme (che può anche essere vuoto) dell'insieme dei sottoinsiemi di ordine 2 di  $V$ . Chiaramente, la differenza tra multigrafo e grafo è che, in un grafo, per ogni coppia di vertici c'è al più un arco che ha tali vertici come estremi, mentre in un generico multigrafo è consentito che ve ne siano più d'uno (ma non sono ammessi archi che abbiano un solo estremo). Denoteremo con  $V(G)$  l'insieme dei vertici e con  $E(G)$  l'insieme dei lati di un grafo  $G$ .

Conviene avvisare che la terminologia in teoria dei grafi è soggetta a variazioni da testo a testo. La definizione di (multi)grafo che abbiamo dato non è la più generale; in alcuni testi sono detti grafi quelli che noi qui abbiamo definito come multigrafi, mentre i nostri grafi sono detti grafi semplici. L'argomento principale di queste note sono i grafi finiti. Tuttavia alcuni risultati possono essere provati senza ulteriore fatica per i multigrafi in generale, o per grafi infiniti, cosa che (quando non troppo onerosa) cercheremo di fare.

È comodo (quando si sia in grado di farlo) rappresentare uno specifico (multi)grafo mediante un diagramma, nel quale i vertici sono punti in un piano, ed ogni arco è rappresentato da una linea continua (non necessariamente un segmento di retta) congiungente i due vertici che corrispondono agli estremi dell'arco. Ad esempio, sia  $X = \{1, 2, 3\}$ , e sia  $G$  il grafo i cui vertici sono i sottoinsiemi di  $X$ , e due di essi formano un arco se la loro differenza simmetrica contiene almeno due elementi. Allora,  $G$  si può rappresentare mediante il diagramma:

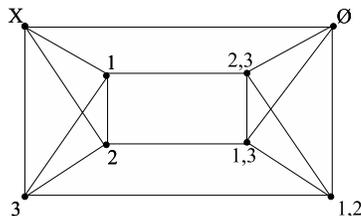


Figura 1.1: un grafo

La nozione di grafo si presta alla più svariate utilizzazioni, costituendo un modo comodo e compatto per descrivere relazioni binarie in senso lato. Ad esempio il grafo della Figura 1.2 è il diagramma della molecola di etanolo, la cui formula chimica è  $H_6C_2O$ .

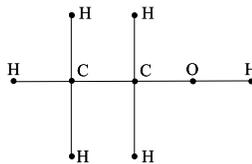


Figura 1.2: la molecola dell'etanolo

In altri casi, risulta conveniente utilizzare i multigrafi: ad esempio, per rimanere nella rappresentazione delle molecole, un multigrafo riesce a descrivere con maggior precisione i legami tra gli atomi (semplici, doppi, etc.). Così il multigrafo della figura 1.3 rappresenta la molecola dell'adenina ( $H_2C_5N_5$ , uno degli aminoacidi di base degli acidi nucleici). .

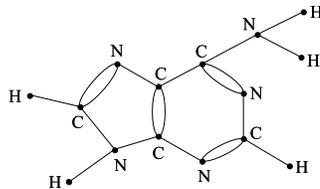


Figura 1.3: la molecola dell'adenina

Oltre a ciò, è possibile che, per rappresentare particolari situazioni, si debba prevedere l'eventualità che alcuni archi inizino e terminino nello stesso vertice. Tali archi sono detti *cappi*; e chiamiamo *pseudografi* i multigrafi in cui sono ammessi i cappi. Si tratta, tuttavia, di

una generalizzazione che non prenderemo in considerazione (e che, per molti, aspetti, può comunque essere ricondotta la caso dei multigrafi).

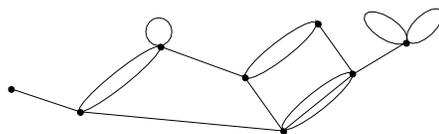


Figura 1.4: uno pseudografo

Un'altra maniera (forse più importante) di estendere il concetto di grafo è quella di assegnare ad ogni arco una "direzione", che nel diagramma viene di solito rappresentata mediante una freccia (come ad esempio negli alberi genealogici, nei diagrammi che descrivono flussi, o in schemi di reti di distribuzione di varia natura). In tal caso, si parla di *grafi diretti*: oggetti che hanno importanti applicazioni, e che non trascureremo del tutto (vedi capitolo 4).

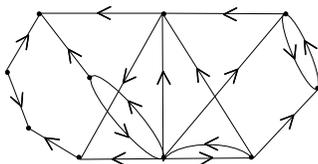


Figura 1.5: un grafo diretto

Naturalmente, può poi essere conveniente ricorrere a multigrafi o a pseudografi con direzione.

Comunque lo si prenda, il fatto importante è che, spesso, i grafi, nelle diverse varianti, non solo forniscono schemi visivo più o meno suggestivi e accessibili, ma costituiscono il naturale strumento matematico per rendere accessibile lo studio di determinati problemi. Cominciamo con il definire i concetti (entrambi piuttosto naturali) di isomorfismo tra grafi e di sottografo.

**Isomorfismi.** Quando due grafi sono lo "stesso grafo"? Un grafo  $G = (V, E)$  è sostanzialmente l'espressione di una relazione binaria simmetrica su  $V$ , indipendentemente dalla natura degli elementi di  $V$ . È facile quindi arrivare alla definizione seguente:

Un *isomorfismo* tra due grafi  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  è una biezione  $\alpha : V \rightarrow V'$  tra gli insiemi dei vertici tale che, per ogni  $x, y \in V$ ,

$$\{x, y\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\alpha(x), \alpha(y)\} \in E'.$$

Se una tale applicazione esiste, si dice che  $G$  e  $G'$  sono **isomorfi** (e si usa scrivere l'isomorfismo come  $\alpha : G \rightarrow G'$ ).

Questo concetto giustifica il fatto che un grafo possa essere "rappresentato" da un diagramma, che non è soltanto un mezzo per aiutare l'intuizione, ma contiene tutte le informazioni sul grafo in quanto tale; in un certo senso, esso è *il grafo*. Difatti, il più delle volte, un grafo viene dato direttamente e solo come diagramma. Nel disegnare il diagramma del grafo che ha dato origine alla figura 1.1, avremmo potuto, ad esempio, disporre in modo diverso i punti sul foglio (ad esempio, come vertici di un ottagono regolare), e far corrispondere ad essi in

modo diverso i vertici del grafo (cioè i sottoinsiemi di  $X = \{1, 2, 3\}$ ): avremmo probabilmente ottenuto un disegno abbastanza diverso, che tuttavia rappresenta lo stesso grafo.

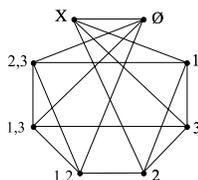
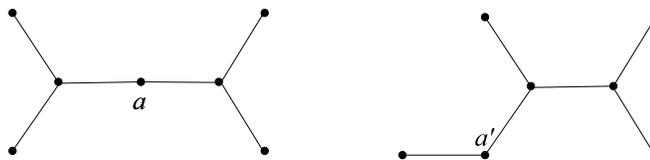


Figura 1.6: la figura 1.1 in un suo (riuscito?) travestimento

La definizione di *isomorfismo per i multigrafi* dovrà tener conto del fatto che l'insieme degli archi non è individuato da coppie di vertici. Si dirà quindi che due multigrafi  $G = (V, E, \phi)$  e  $G' = (V', E', \psi)$  si dicono *isomorfi* se esiste una coppia di biezioni,  $\alpha : V \rightarrow V'$  e  $\beta : E \rightarrow E'$ , tali che, per ogni  $e \in E$ ,  $\psi(\beta(e)) = \alpha(\phi(e))$ .

In generale, non è facile stabilire se due grafi siano isomorfi, e non esiste un metodo generale ed efficiente per farlo. Talvolta non rimane che procedere per tentativi: se il grafo non è molto grande ci si può aiutare pensando ai vertici come a palline rigide ed ai lati come ad elastici, che si possono deformare ed incrociare, ma non staccare dalle palline che uniscono, e quindi tentare di immaginare se tendendo, contraendo, incrociando, etc. codesti elastici, avvenga di passare da una configurazione all'altra. È chiaro che poi, se ci va bene, il tutto va tradotto in un argomento formalmente corretto (ad esempio indicando esplicitamente la corrispondenza tra i vertici che realizza l'isomorfismo).

Naturalmente, vi sono anche considerazioni del tutto rigorose che è possibile fare prima di lanciarsi nei tentativi: ad esempio, se  $\phi : G \rightarrow G'$  è un isomorfismo di grafi, si vede facilmente che  $d_G(v) = d_{G'}(\phi(v))$  per ogni vertice  $v$  di  $G$ ; quindi, in particolare, grafi isomorfi hanno lo stesso numero di vertici di ciascun grado. Questa condizione non è tuttavia sufficiente a garantire che due grafi siano isomorfi; ad esempio, essa è soddisfatta dai due grafi della figura seguente, i quali non sono isomorfi: infatti se vi fosse un isomorfismo tra di essi, allora il vertice  $a$  dovrebbe corrispondere al vertice  $a'$  (dato che questi sono i soli vertici di grado 2 in ognuno dei due grafi), ma nel grafo a sinistra  $a$  è adiacente ai due vertici di grado 3, ai quali dovrebbero corrispondere i due vertici di grado 3 del grafo di destra, che tuttavia non sono entrambi adiacenti ad  $a'$ .



Ma anche questo tipo di considerazioni "locali" (cioè relative a quel che accade in prossimità di vertici che, in un ipotetico isomorfismo, si devono corrispondere) non sono sempre sufficienti per concludere.

ALCUNI GRAFI FONDAMENTALI. Come già detto, un grafo è *finito* se l'insieme dei suoi vertici (e, di conseguenza, quello dei suoi archi) è finito. A meno che non venga esplicitamente detto il contrario, tutti i grafi (e anche tutti i multigrafi) che considereremo nel seguito saranno implicitamente intesi essere finiti.

Vi sono alcuni grafi, dalla struttura molto semplice e regolare, che possiamo considerare come basi per la nostra comprensione; tra questi, i primi che descriviamo sono i grafi completi.

**Grafo completo.** Un grafo  $G = (V, E)$  si dice *completo* se  $E = V^{[2]}$ . Se  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ , denotiamo con  $K_n$  il grafo completo su  $n$  vertici.

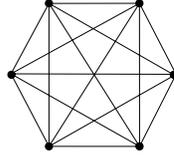


Figura 1.7: il grafo completo  $K_6$

In un grafo completo su  $n$  vertici, il numero degli archi è dunque uguale al numero di sottoinsiemi di ordine due dell'insieme dei vertici, quindi è  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ . È poi chiaro che due grafi completi sono isomorfi se e solo se i loro insiemi di vertici hanno la stessa cardinalità. Ad esempio, il primo grafo a sinistra nella figura 1.8 è isomorfo a  $K_5$  (una qualsiasi corrispondenza biunivoca tra i vertici funziona); i due grafi a destra sono isomorfi tra loro (la numerazione indica una corrispondenza tra i vertici che realizza un isomorfismo di grafi), ma non sono isomorfi a  $K_5$  (infatti non sono completi).

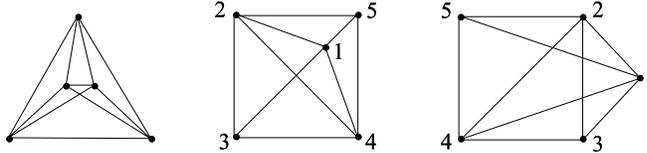


Figura 1.8: isomorfismo

Un'importante estensione del concetto di grafo completo è quella di *grafo bipartito completo*: siano  $n, m$  numeri interi positivi,  $V_1, V_2$  insiemi disgiunti di cardinalità, rispettivamente,  $n$  ed  $m$ , si definisce  $K_{n,m}$  come il grafo il cui insieme di vertici è  $V := V_1 \cup V_2$ , e l'insieme degli archi  $E$  è composto da tutti e soli gli insiemi  $\{x, y\}$  con  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$ ; si osservi quindi che  $|V| = n + m$ , mentre  $|E| = nm$ :

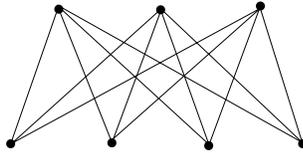


Figura 1.9: il grafo  $K_{3,4}$

(nella figura,  $V_1$  è l'insieme dei vertici nella riga superiore e  $V_2$  quello della riga inferiore). Torneremo diffusamente sui grafi bipartiti più avanti (Capitolo 3); per ora ci basta aver menzionato questo tipo di esempi.

**Cicli.** Un'altra fondamentale classe di grafi è quella dei cosiddetti cicli: posto  $n \geq 1$ , il *ciclo di lunghezza  $n$*  (o  *$n$ -ciclo*) è (a meno di isomorfismo) il grafo i cui lati sono tutti e soli quelli che costituiscono il perimetro del  $n$ -agone: esso si denota con  $C_n$  (ovviamente, in questo tipo di grafi, il numero di lati è uguale a quello dei vertici).

Formalmente:  $C_n = (V, E)$ , con  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  ed  $E = \{\{i, i+1\}, \{n, 1\} | 1 \leq i \leq n-1\}$ .

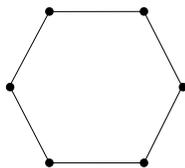


Figura 1.10: il ciclo  $C_6$

**Cammini.** Con  $P_n$  (per  $n \geq 1$ ) denoteremo invece il grafo con  $n+1$  vertici, i cui archi si seguono come nella figura (lasciamo al lettore di darne una definizione formale),



Figura 1.11: il grafo  $P_5$

**Grafo di Petersen.** Tra i grafi con un numero ridotto di vertici, uno dei più interessanti (e che richiameremo spesso negli esercizi e negli esempi) è il *grafo di Petersen* (dal matematico danese Julius Petersen (1839-1910), che lo descrisse nel 1898), costituito da 10 vertici e 15 archi. Si tratta di un grafo con caratteristiche non sempre intuitive, il che lo rende un soggetto da test: quando si tratta di valutare una qualche congettura, il primo caso che si prende in esame è spesso il grafo di Petersen.

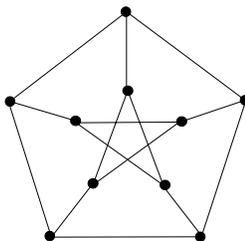


Figura 1.12: il grafo di Petersen

**Sottografi.** Un multigrafo  $G' = (U, F, \phi')$  si dice un *sottografo* del multigrafo  $G = (V, E, \phi)$  se  $\emptyset \neq U \subseteq V$ ,  $F \subseteq E$  e  $\phi' = \phi|_F$ . Nel caso dei grafi, quindi,  $G' = (V', E')$  si dice un *sottografo* del grafo  $G = (V, E)$  se  $\emptyset \neq V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ ; ad esempio, i diagrammi in figura

1.13 mostrano (rilevandone vertici e lati) alcuni sottografi del grafo di Petersen.

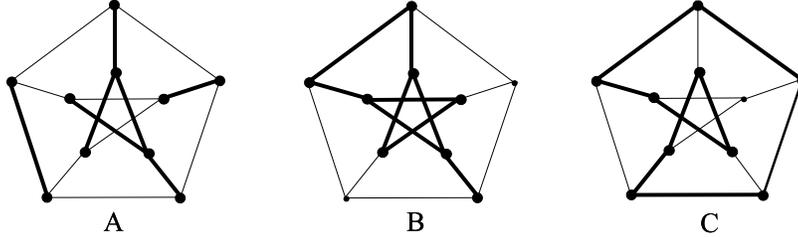


Figura 1.13: sottografi

Un tipo importante di sottografi è quello indotto: un sottografo  $G' = (V', E')$  del grafo  $G = (V, E)$  si dice **sottografo indotto** se, per ogni  $u, v \in V'$ ,  $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \in E'$ ; ovvero se ogni arco di  $G$  i cui estremi appartengono a  $V'$  è anche un arco di  $G'$ . Se  $\emptyset \neq S \subseteq V$  è un sottoinsieme dell'insieme dei vertici di  $G$ , il sottografo *indotto* da  $S$  è il sottografo indotto di  $G$  il cui insieme di vertici è  $S$ . Negli esempi di figura 1.13 solo il caso B descrive un sottografo indotto. Nell'esempio in figura 1.14, l'insieme dei vertici è  $V = \{1, 2, \dots, 8\}$ , e il grafo  $G'$  è il sottografo indotto da  $S = V \setminus \{3\}$ .

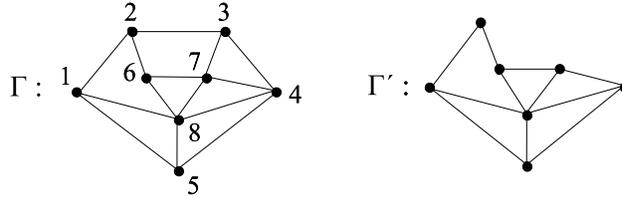


Figura 1.14: un sottografo indotto

**Sottografi speciali.** Spesso, in particolare negli argomenti per induzione, è utile considerare particolari sottografi, ottenuti 'togliendo' un vertice oppure un arco. È dunque conveniente introdurre fin d'ora le notazioni seguenti. Sia  $G = (V, E, \phi)$  un multigrafo; fissato un suo arco  $e \in E$ , denotiamo con  $G - e$  il multigrafo ottenuto da  $G$  rimuovendo l'arco  $e$  (ma lasciando tutti i vertici), pertanto  $G - e = (V, E \setminus \{e\}, \phi)$ ; mentre se  $v \in V$  è un vertice di  $G$ , denotiamo con  $G - v$  il multigrafo ottenuto da  $G$  togliendo il vertice  $v$  e tutti i lati ad esso adiacenti (si tratta quindi di un sottografo indotto, ed anzi ogni sottografo indotto si ottiene da  $G$  mediante un numero finito di sottrazioni di vertici).

**Grafo complementare.** Un concetto molto utile è quello di grafo complementare. Sia  $G = (V, E)$  un grafo; il *grafo complementare*  $\overline{G} = (V', E')$  è definito nel modo seguente  $V' = V$  e, per ogni  $u, v \in V$  con  $u \neq v$ ,  $\{u, v\} \in E'$  se e solo se  $\{u, v\} \notin E$ . Ad esempio, il complementare di un grafo completo  $(V, V^{[2]})$  è il grafo privo di archi  $(V, \emptyset)$ ; mentre il grafo complementare del ciclo  $C_4$  è il grafo costituito da due archi disgiunti (i cui estremi sono i vertici del grafo). È chiaro che per ogni grafo  $G$ , il complementare di  $\overline{G}$  è  $G$  stesso.

**Line-graph.** Dato un grafo semplice  $G = (V, E)$ , si definisce il grafo  $L(G) = (V_c, E_c)$  (detto *line-graph* associato a  $G$ ) nel modo seguente. I vertici di  $L(G)$  sono gli archi di  $G$  (cioè  $V_c = E$ ), e due elementi  $e, e' \in E$  sono congiunti da un lato di  $L(G)$  se e solo se hanno un vertice in comune in  $G$ ; quindi  $E_c = \{\{e, e'\} \in E^{[2]} \mid e \cap e' \neq \emptyset\}$ .

Ad esempio, il line-graph di un ciclo  $C_n$  è esso stesso un ciclo  $C_n$  (vedi esercizio 1.31); il line-graph del grafo completo  $K_n$  è isomorfo al grafo il cui insieme di vertici è  $I_n^{[2]}$  (dove  $I_n = \{1, \dots, n\}$ ) e due vertici distinti sono adiacenti se, come sottoinsiemi di  $I_n$ , hanno intersezione non vuota.

**Esercizio 1.1.** Si rappresentino mediante un diagramma i seguenti grafi:

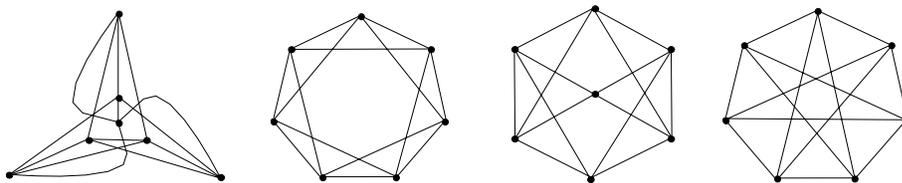
1)  $G = (V, E)$ , dove  $V = \{0, 1\}^3$  è l'insieme delle terne a coefficienti in  $\{0, 1\}$ , e dati  $a, b \in V$ ,  $\{a, b\} \in E$  se e solo se  $a$  e  $b$  differiscono esattamente per una componente.

2) Sia  $B_6 = (V, E)$ , dove  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , e per  $a, b \in V$ ,  $\{a, b\} \in E$  se e solo se  $a - b$  è dispari.

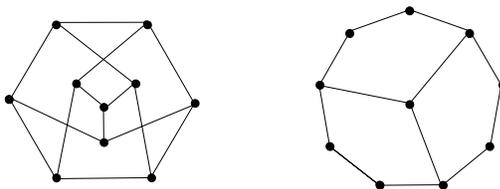
3) Il line-graph  $L(K_4)$ .

**Esercizio 1.2.** Si dica quanti sono, a meno di isomorfismo, i grafi con quattro vertici. Quanti sono quelli privi di vertici isolati?

**Esercizio 1.3.** Si dica quali tra i seguenti grafi sono tra loro isomorfi:



**Esercizio 1.4.** Si provi che il grafo a sinistra nella figura di sotto è isomorfo al grafo di Petersen. Al grafo di destra si aggiungano opportunamente tre lati in modo da ottenere un grafo isomorfo al grafo di Petersen.



**Esercizio 1.5.** Si dimostri che il grafo complementare di  $C_5$  è  $C_5$ .

## 1.2 Vertici, cammini, cicli.

Sia  $G = (V, E, \phi)$  un multigrafo, che supporremo da ora in poi finito. Come detto, se  $e \in E$ , i due vertici appartenenti a  $\phi(e)$  si dicono gli *estremi* di  $e$ . Un vertice  $v$  ed un arco  $e$  si dicono

*incidenti* se  $v \in \phi(e)$  (cioè se  $v$  è un estremo di  $e$ ); due vertici  $v, w \in V$  si dicono *adiacenti* se  $\{v, w\} \in \phi(E)$  (ovvero, sono estremi di uno stesso arco); similmente, diremo che due archi  $e, e' \in E$  sono *consecutivi* se hanno un estremo in comune (cioè se  $e \neq e'$  e  $\phi(e) \cap \phi(e') \neq \emptyset$ ). Dato  $v \in V$ , il **grado** (o *valenza*) di  $v$  è il numero di archi incidenti a  $v$  e si denota con  $d_G(v)$ ; nel caso dei grafi (semplici) il grado di un vertice coincide con il numero di vertici ad esso adiacenti. Un vertice che non sia incidente ad alcun arco (cioè tale che  $d_G(v) = 0$ ) si dice vertice *isolato* di  $G$ . Il primo risultato generale della teoria dei grafi è una semplice ma fondamentale osservazione:

**Teorema 1.1.** *Sia  $G = (V, E, \phi)$  un multigrafo. Allora*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo l'insieme  $S = \{(v, e) \in V \times E \mid v \in \phi(e)\}$ . Ora, ogni vertice  $v \in V$  è incidente a tanti archi in  $E$  quanto è il suo grado; viceversa, ad ogni arco corrispondono esattamente due estremi. Si ha quindi, contando in due modi gli elementi dell'insieme  $S$ , facendo cioè separatamente variare in primo luogo la prima componente (i vertici), e quindi la seconda (gli archi):

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = |S| = 2|E|,$$

da cui l'enunciato. ■

Ovviamente, un vertice si dirà (dis)pari se il suo grado è (dis)pari. Poiché una somma di numeri interi è pari se e soltanto se il numero di addendi dispari è pari, dal teorema 1.1 discende subito il seguente

**Corollario 1.2.** *In un multigrafo il numero di vertici dispari è pari.*

Se  $x$  è un vertice del multigrafo  $G = (V, E, \phi)$ , denotiamo con  $N_G(x)$  l'insieme di tutti i vertici di  $G$  adiacenti a  $x$ , ovvero

$$N_G(x) = \{v \in V \mid \{x, v\} \in \phi(E)\}$$

(quindi,  $|N_G(x)| = d_G(x)$ ). Più in generale, se  $S \subseteq V$ , poniamo

$$N_G(S) = \left( \bigcup_{x \in S} N_G(x) \right) \setminus S$$

**Sequenza dei gradi.** Ad ogni grafo  $G$  può essere associata la *sequenza dei gradi*, intendendo con ciò la successione dei gradi di tutti i vertici di  $G$  ordinati in modo crescente. Ad esempio, la sequenza dei gradi del grafo della figura 1.14 è  $(3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5)$ . È chiaro che la sequenza dei gradi non individua il grafo (come abbiamo già osservato a pagina 9), e che non tutte le sequenze crescenti di numeri naturali  $\geq 1$  sono sequenze dei gradi di un qualche grafo. Di conseguenza, un certo interesse riveste il problema di determinare quali sequenze numeriche siano sequenze dei gradi di un opportuno grafo.

**Regolarità.** Un multigrafo si dice *regolare* se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado; se tale grado comune è  $d$ , si dice che il grafo è regolare  $d$ -valente, o  $d$ -regolare. Un esempio è il

grafo in figura 1.1, che è 4-regolare. Si osservi che, se  $G$  è  $d$ -regolare, allora la formula del teorema 1.1 diventa  $d|V| = 2|E|$ .

Il grafo completo  $K_n$  è  $(n-1)$ -regolare (ed è il solo grafo con tale proprietà su un insieme di  $n$  vertici). Un  $n$ -ciclo ( $n \geq 3$ ) è un grafo 2-regolare (infatti, si prova - esercizio 1.10 - che ogni grafo connesso 2-regolare è isomorfo ad un ciclo  $C_n$ ). I grafi 3-regolari sono spesso chiamati *grafi cubici* e possono essere molto complicati; costituiscono perciò una classe assai interessante (e difficile) di grafi regolari. Il grafo di Petersen è cubico; un altro esempio di grafo cubico con 10 vertici (non isomorfo al grafo di Petersen), è il seguente.

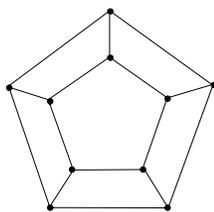


Figura 1.15: un grafo cubico

Famosi grafi regolari si ottengono considerando la relazione d'incidenza tra i vertici e gli spigoli nei poliedri regolari (i cosiddetti solidi platonici). La figura 1.16 mostra i grafi del tetraedro, del cubo (esaedro), dell'ottaedro, e del dodecaedro; si disegni per esercizio il grafo dell'icosaedro (20 facce triangolari, 12 vertici e 30 spigoli).

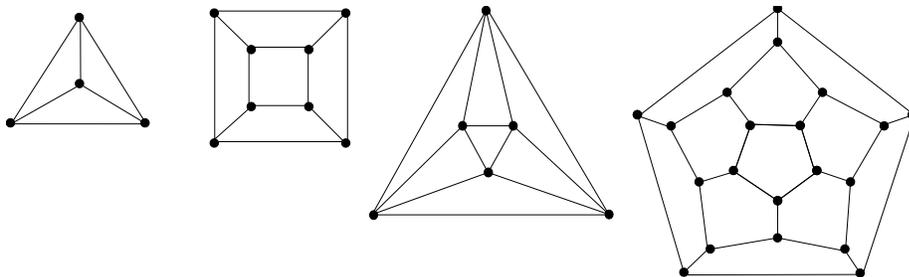


Figura 1.16: i grafi di alcuni solidi regolari

**Cammini e circuiti.** Sia  $G = (V, E, \phi)$  un multigrafo, e siano  $v, w \in V$  due vertici di  $G$  (non necessariamente distinti). Un **cammino** in  $G$  da  $v$  a  $w$  è una sequenza:

$$v = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-2} e_{n-1} v_{n-1} e_n v_n = w$$

di vertici  $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$  (non necessariamente distinti), ed archi  $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$ , *tutti distinti* e tali che  $\phi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ , per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ .

L'intero  $n \geq 0$  si dice la **lunghezza** del cammino (osserviamo che prendiamo in considerazione anche cammini di lunghezza 0 (cammini *banali*), formati cioè da un solo vertice e nessun arco). Se  $v_0 = v_n$ , il cammino è detto **circuito**. Un cammino (circuito) si dice **semplice** se tutti i vertici che lo compongono, tranne eventualmente il primo e l'ultimo, sono diversi; ovvero se,

per ogni  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$  (il cammino non "ripassa" per uno stesso vertice). Un circuito semplice non banale (cioè con almeno tre archi) è detto anche **ciclo** (in sostanza, un ciclo di lunghezza  $n$  è un sottografo isomorfo al  $n$ -ciclo  $C_n$ ).

Osserviamo che, nel caso in cui  $G$  sia un grafo (cioè ci sia al più un arco per ciascuna coppia di estremi), nella descrizione di cammino non è necessario includere esplicitamente gli archi  $e_i$ . Sarà sufficiente dire che un cammino in un grafo  $G$  è una sequenza di vertici di  $G$

$$v_0, v_1, \dots, v_n$$

tale che, per ogni  $i, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ , e  $\{v_{i-1}, v_i\} \neq \{v_{k-1}, v_k\}$  se  $i \neq k$ .

La definizione di cammino che abbiamo dato, richiedendo che tutti i lati siano distinti, è talvolta troppo restrittiva. Un concetto più ampio è quello di **passeggiata** in un grafo  $G$ , ovvero una sequenza di vertici e lati alternativamente  $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$ , sottoposta alla sola condizione che ogni lato  $e_i$  abbia come estremi i vertici  $v_{i-1}$  e  $v_i$  (si possono quindi "percorrere" più di una volta gli stessi lati, anche "avanti e indietro" – come, appunto, di solito accade in una reale passeggiata). Ogni cammino è dunque una passeggiata, ma non viceversa. (Non esiste un accordo ecumenico a proposito della nomenclatura relativa a cammini, passeggiate, etc.; anche perché, la letteratura essendo in modo preponderante di lingua inglese, occorrerebbe accordarsi su come tradurre i vari termini come *walk*, *track*, *trail*, *path*, e simili. In considerazione dello scopo circoscritto di queste note, abbiamo cercato di limitare l'introduzione di termini diversi, preferendo piuttosto impiegare qualche aggettivo in più, ma avvisando però che, trovandovi a consultare altri testi, una delle prime cose da fare è quella di controllare le definizioni di *cammino*, *circuito*, etc.)

**Connessione.** Un multigrafo  $G$  si dice **connesso** se per ogni coppia di suoi vertici  $v, w$ , esiste in  $G$  un cammino tra  $v$  e  $w$ .

**Proposizione 1.3.** *Sia  $G = (V, E, \phi)$  un multigrafo. Se  $G$  è connesso allora*

$$|E| \geq |V| - 1.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G = (V, E, \phi)$  un multigrafo connesso, e procediamo per induzione sul numero  $n$  di vertici di  $G$  (cioè  $n = |V|$ ). Se  $n = 1$  o  $2$  l'asserto è ovvio. Sia  $n \geq 3$ , ed assumiamo che la proprietà sia soddisfatta da ogni multigrafo con un numero di vertici strettamente minore di  $n$ .

Supponiamo che si abbia  $d_G(v) \geq 2$ , per ogni  $v \in V$ ; allora, per il Teorema 1.1,

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

e quindi  $|E| \geq |V|$ . Altrimenti, esiste un vertice  $v$  tale che  $d_G(v) = 1$  (essendo connesso con almeno due vertici,  $G$  non ha vertici isolati). Consideriamo il multigrafo  $G' = G - v$ . Allora,  $G'$  è connesso, perché un cammino che in  $G$  congiunge due vertici diversi da  $v$  è tutto contenuto in  $G'$  (infatti, se passasse per  $v$  dovrebbe contenere due volte il solo lato incidente a  $v$ ). D'altra parte, l'insieme  $E'$  dei lati di  $G'$  è costituito da tutti i lati di  $G$  con l'esclusione del solo lato incidente a  $v$ . Dunque, applicando l'ipotesi induttiva,

$$|E| = |E'| + 1 \geq (|V| \setminus \{v\} - 1) + 1 = |V| - 1$$

come si voleva. ■

A questo punto è naturale, dato un multigrafo  $G$ , introdurre una relazione sull'insieme  $V$  dei vertici, dicendo che due vertici sono in relazione se esiste un cammino (eventualmente di lunghezza 0) che li congiunge. È chiaro che tale definizione stabilisce una relazione d'equivalenza sull'insieme  $V$ . Le **componenti connesse** di  $G$  non sono altro che i sottografi indotti dalle singole classi di equivalenza di vertici. Si osserva facilmente che le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali. È anche immediato provare (lo si faccia per esercizio) che dato un multigrafo  $G$  ed un isomorfismo  $\phi : G \rightarrow G'$ ,  $G$  è connesso se e solo se  $G'$  è connesso.

Se  $u$  e  $v$  sono due vertici di una stessa componente connessa del grafo  $G$ , definiamo la **distanza**  $d_G(u, v)$  come la minima lunghezza di un cammino da  $u$  a  $v$  in  $G$ .

**Alberi.** Un grafo connesso *privo di circuiti non banali* (il che equivale all'essere connesso e privo di cicli) si dice **albero**. Un grafo privo di cicli (ma non necessariamente connesso) si chiama una **foresta**; è chiaro dunque che un grafo è una foresta se e solo se ogni sua componente connessa è un albero.

Gli alberi sono spesso un naturale metodo di rappresentare relazioni di dipendenza. Il diagramma della molecola di etanolo di Figura 1.2 è un esempio di albero; un altro esempio è l'albero di affinità genetica tra alcune specie di primati (secondo le ipotesi più recenti):

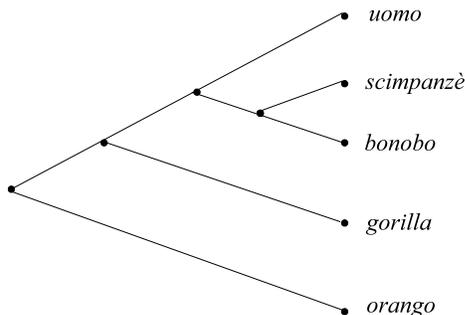


Figura 1.17: l'albero genetico di alcune specie di primati

Torneremo diffusamente sugli alberi nel terzo capitolo; per il momento proviamo il seguente fatto elementare.

**Lemma 1.4.** *Un albero con due o più vertici ha almeno due vertici di grado 1.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G$  un albero con almeno due vertici (e quindi, essendo connesso, almeno un lato), e sia  $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$  un cammino semplice in  $G$  di lunghezza massima possibile. Poiché in  $G$  non vi sono cicli,  $v_0 \neq v_n$ , e  $v_0, v_n$  sono vertici di grado 1. Infatti se così non fosse e, ad esempio,  $v_n$  avesse grado almeno 2, esisterebbe un altro lato  $e = \{v_n, w\}$  (con  $w \neq v_{n-1}$ ) incidente a  $v_n$ . Ma allora, per la massimalità del cammino semplice scelto, la sequenza  $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n e w$  non è un cammino semplice, e dunque  $w = v_i$  per un  $0 \leq i \leq n-2$  (che è unico perché il cammino iniziale è semplice). Ma allora si avrebbe in  $G$  il circuito non banale  $v_i e_{i+1} \dots v_{n-1} e_n v_n e w = v_i$ , e quindi una contraddizione. ■

**Esercizio 1.6.** Provare che ogni grafo con 2 o più vertici ha almeno due vertici dello stesso grado.

**Esercizio 1.7.** Dire se esistono grafi le cui sequenze dei gradi dei vertici sono, rispettivamente:

$$(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5), \quad (1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 7), \quad (1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5).$$

**Esercizio 1.8.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo regolare 3-valente. Si provi che  $|V|$  è pari. Si provi che per ogni numero pari  $n$  esiste un grafo connesso regolare 3-valente con  $n$  vertici. Si provi che, a meno di isomorfismo, esistono due grafi 3-regolari con 6 vertici.

**Esercizio 1.9.** Siano  $v, w$  vertici di un grafo  $G$ . Si provi che se esiste un cammino in  $G$  da  $v$  a  $w$ , allora esiste anche un cammino semplice da  $v$  a  $w$ .

**Esercizio 1.10.** Si dimostri che ogni grafo connesso 2-regolare con  $n$  vertici è isomorfo al ciclo  $C_n$ .

### 1.3 Cammini euleriani e hamiltoniani.

**Cammini e circuiti euleriani.** I grafi sono spesso associati alla matematica ricreativa ed ai cosiddetti "rompicapo": problemi di natura logico-matematica la cui formulazione ricorre (in modo spesso forzatamente immaginifico) a situazioni reali o, almeno, realisticheggianti, e può essere compresa anche senza una specifica preparazione teorica. Questa propensione antielitaria è presente nella teoria dei grafi sin dal suo ingresso ufficiale nella matematica, avvenuto nel 1736, anno della pubblicazione negli atti dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo di una memoria di Leonardo Eulero, nella quale egli affrontava e risolveva il famoso

*Problema dei ponti di Königsberg.* La città di Königsberg (oggi Kaliningrad) nella Prussia Orientale (oggi un enclave russa tra la Polonia e la Lituania) sorge alla foce del fiume Pregel, che in quel punto forma due isole. Nel settecento le varie parti della città erano collegate da un sistema di sette ponti (figura 1.18), ed era costume delle famiglie borghesi del tempo (tra cui immaginiamo la famiglia Kant con il piccolo Immanuel che ancora succhia un lecca-lecca) recarsi a passeggiare, nelle domeniche di bel tempo, lungo le rive del fiume e le sue isole.

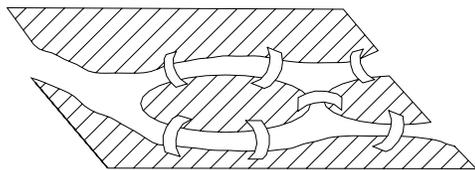


Figura 1.18: i ponti di Königsberg...

Assieme ai cittadini, circolava anche il problema seguente: è possibile fare una passeggiata che partendo ed arrivando nello stesso luogo porti ad attraversare una ed una sola volta tutti e sette i ponti di Königsberg?

Sia  $G = (V, E, \phi)$  un multigrafo. Un cammino  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m$  in  $G$  si dice **euleriano** se  $\{e_1, \dots, e_m\} = E$  (ricordiamo che i lati che compongono un cammino sono per definizione

tutti distinti). Similmente, un circuito si dice euleriano se l'insieme dei lati che lo compongono è tutto  $E$ . Un grafo in cui esiste un circuito euleriano si chiama **grafo euleriano**.

Il problema dei ponti di Königsberg è dunque quello dell'esistenza di un circuito euleriano nel multigrafo in figura 1.19.

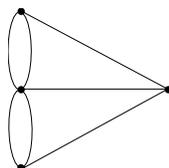


Figura 1.19: ... il loro multigrafo.

La risposta di Eulero (del tutto generale) costituisce, come detto, il primo teorema di teoria dei grafi nella storia della matematica occidentale.

**Teorema 1.5.** (Eulero). *Un multigrafo privo di vertici isolati è euleriano se e soltanto se è connesso ed ogni suo vertice ha grado pari.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G$  un multigrafo privo di vertici isolati. Se  $G$  è euleriano è ovvio che  $G$  è connesso, dato che non contiene vertici isolati. Inoltre, per ciascun vertice  $v$ , un fissato circuito euleriano di  $G$  attraversa una ed una sola volta tutti i lati incidenti a  $v$ ; poiché ogni volta che il circuito tocca  $v$  deve arrivare e uscire per due lati distinti (se  $v$  è il vertice iniziale, il circuito inizia e si chiude in  $v$  con due lati diversi), si conclude che il grado di  $v$  è pari.

Viceversa, supponiamo che  $G$  sia connesso e che tutti i suoi vertici abbiano grado pari. Proviamo che  $G$  ha un circuito euleriano per induzione sul numero  $m$  di lati di  $G$  (osserviamo che  $m \geq 2$ ). Se  $m = 2$ , allora  $G$  è un multigrafo costituito da due vertici connessi da due lati, e quindi ammette banalmente un cammino euleriano. Sia  $m \geq 3$ . Allora, poiché ogni vertice di  $G$  ha grado almeno 2,  $G$  non è un albero (se  $G$  fosse un albero, non avrebbe alcun lato multiplo e quindi, per il Lemma 1.4, avrebbe dei vertici di grado 1); quindi  $G$  ammette dei circuiti. Sia  $\mathcal{C}$  un circuito di  $G$  con il massimo numero possibile di lati e supponiamo, per assurdo, che  $\mathcal{C}$  non sia euleriano (cioè che non comprenda tutti i lati di  $G$ ). Allora, il multigrafo  $G - \mathcal{C}$ , ottenuto da  $G$  togliendo tutti i lati di  $\mathcal{C}$ , non è formato da soli vertici isolati, e ha pertanto una componente connessa  $\Delta$  non banale. Ora, poiché nel ricavare  $G - \mathcal{C}$  abbiamo tolto i lati di un circuito, e dunque per ciascun vertice  $v$  di  $G$ , abbiamo tolto un numero pari (eventualmente zero) di lati incidenti a  $v$ , ne segue in particolare che in  $\Delta$  tutti i vertici hanno grado pari e quindi, per ipotesi induttiva, esiste un circuito euleriano  $\mathcal{D}$  in  $\Delta$ . Ora, siccome  $G$  è connesso, almeno un vertice  $a$  del circuito  $\mathcal{C}$  appartiene a  $\Delta$  (si consideri un cammino in che inizia in un vertice  $u$  di  $\mathcal{C}$  e finisce in un vertice di  $\Delta$ ; se tutti i suoi lati sono in  $\Delta$ , allora  $a = u$ ; altrimenti consideriamo l'ultimo lato (ovvero di indice massimo) fra quelli non in  $\Delta$  e prendiamo come vertice  $a$  il suo secondo estremo) e quindi compare in  $\mathcal{D}$ . Ora, percorrendo il circuito  $\mathcal{C}$ , a partire da un suo vertice qualsiasi, sino al vertice  $a$ , poi percorrendo tutto  $\mathcal{D}$  fino a tornare ad  $a$ , e quindi riprendendo il tratto non ancora percorso di  $\mathcal{C}$ , si ottiene un circuito in  $G$  (dato che i lati di  $\Delta$ , e quindi quelli che formano  $\mathcal{D}$ , non compaiono in  $\mathcal{C}$ ) di lunghezza maggiore di  $\mathcal{C}$ , e questo va contro la scelta di  $\mathcal{C}$ . Pertanto  $\mathcal{C}$  è un circuito euleriano. ■

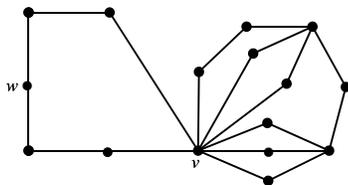
Un semplice adattamento della dimostrazione precedente consente di completare il risultato di Eulero al caso dei cammini euleriani.

**Teorema 1.6.** *Un multigrafo  $G$  privo di vertici isolati ha un cammino euleriano non chiuso se e soltanto se  $G$  è connesso ed ha esattamente due vertici dispari. In tal caso caso, se  $u$  e  $v$  sono i due vertici dispari  $u$  e  $v$ , allora tutti i cammini euleriani di  $G$  iniziano e terminano in  $u$  e  $v$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Esercizio. (suggerimento: se  $u$  e  $v$  sono i due vertici dispari, aggiungere al grafo un nuovo arco con estremi  $u$  e  $v$ , quindi applicare il Teorema precedente.) ■

Come prima applicazione, osserviamo che un grafo regolare  $k$ -valente è euleriano se e soltanto se  $k$  è pari. In particolare il grafo completo  $K_n$  (che è regolare di grado  $n - 1$ ) è euleriano se e solo se  $n$  è dispari. Se  $n$  è pari, togliendo opportunamente  $n/2$  lati (ad esempio, se  $K_n$  è disegnato sui vertici di un  $n$ -agone regolare, si possono togliere uno sì e uno no i lati del perimetro) si ottiene un grafo euleriano. Quindi, se  $n$  è pari,  $K_n$  ha un circuito di lunghezza  $\binom{n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$ ; e questa (lo si provi) è la massima lunghezza di un circuito di  $K_n$ . Un grafo completo bipartito  $K_{n,m}$  è euleriano se e solo se sia  $n$  che  $m$  sono pari.

*Grafi casualmente euleriani.* Il piano di un museo o esposizione può facilmente essere rappresentato mediante un grafo, i cui lati sono le varie gallerie o corridoi del museo, ed i vertici sono le congiunzioni di due o più gallerie. Un visitatore che sia interessato a esaminare l'intera collezione dovrà percorrere almeno una volta tutte le gallerie del museo (archi del grafo), e presumibilmente vorrà percorrerne ciascuna soltanto una volta. In termini del grafo sopra descritto, ciò è possibile se e soltanto se esso ammette un cammino euleriano tra i vertici corrispondenti all'entrata ed all'uscita del museo; nel caso in cui l'entrata e l'uscita coincidano, se e solo se si tratta di un grafo euleriano. In tal caso, la direzione del museo potrebbe fornire una mappa con l'indicazione del circuito euleriano. Ma se tali mappe fossero momentaneamente esaurite, quello che il nostro visitatore auspicherebbe è di poter comunque effettuare una visita "euleriana" mediante la semplice strategia di scegliere casualmente una nuova galleria (lato del grafo) ad ogni congiunzione (vertice) con la sola condizione che questa non sia già stata percorsa in precedenza. Naturalmente, ciò è possibile solo se il grafo del museo gode di proprietà piuttosto forti; ed è quello che viene chiamato un grafo casualmente euleriano (si tratta della solita pessima traduzione dell'inglese *randomly eulerian graph*). Più precisamente, se  $G$  è un grafo semplice e  $v$  un suo vertice,  $G$  si dice *casualmente euleriano* per  $v$  se ogni circuito massimale di  $G$  che includa il vertice  $v$  è un circuito euleriano (ci si convinca che questa definizione, posto  $v$  il vertice di entrata-uscita del museo, è equivalente a quella più "operativa" data di sopra). La figura seguente è un esempio di grafo casualmente euleriano per  $v$ .



**Cicli e grafi hamiltoniani.** Un circuito euleriano attraversa una ed una sola volta ogni arco di un grafo. Il problema duale (solo apparentemente simile, ma molto più difficile) ovvero lo stabilire se un certo grafo ammette un circuito che passa una ed una sola volta per ogni vertice, ha anch'esso una data di nascita precisa: il 1859, quando sir William Rowan Hamilton propose (e, pare, cercò anche di commercializzare) il seguente rompicapo:

*Problema del viaggiatore sul dodecaedro.* Ai venti vertici di un dodecaedro regolare sono assegnati i nomi di altrettante città famose. È possibile per un viaggiatore che parta da un dato vertice-città, visitare una e una sola volta tutte le città, trasferendosi lungo gli spigoli del dodecaedro, e facendo alla fine ritorno alla città di partenza ?

Il problema si traduce in termine di grafi (cosa che lo stesso Hamilton suggerì) nel modo seguente: esiste un circuito semplice nel grafo del dodecaedro (vedi Figura 1.16) che passa (una ed una sola volta) per tutti i vertici del grafo? (la risposta è sì).

Per affrontare questo e simili problemi, si comincia con il formalizzare il concetto di cammino che passa (una e una sola volta) per tutti i vertici.

Un cammino  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_n v_n$  in un grafo  $G = (V, E)$  si dice **hamiltoniano** se è semplice e  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} = V$ . Similmente, un circuito di  $G$  si dice hamiltoniano se è semplice (cioè è un ciclo) e l'insieme dei vertici che lo compongono è tutto  $V$ . Un grafo in cui esiste un ciclo hamiltoniano si chiama **grafo hamiltoniano**. In altre parole, un grafo con  $n$  vertici è hamiltoniano se e solo se contiene un sottografo isomorfo al ciclo  $C_n$ .

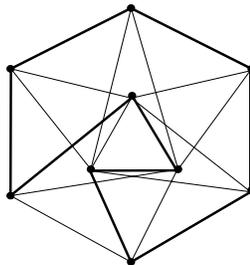


Figura 1.20: un ciclo hamiltoniano

Mentre è facile implementare un programma efficiente (qualsiasi cosa questo ragionevolmente significhi) che, utilizzando il teorema 1.5, stabilisce se un grafo è euleriano, decidere se un dato grafo ammetta un ciclo (o anche un cammino) hamiltoniano è in generale un problema molto più difficile. Di fatto, non si conosce alcuna caratterizzazione dei grafi hamiltoniani analoga a quella vista per i grafi euleriani, né si sa che non esiste (anche se la cosa è improbabile: per chi ha un poco di dimestichezza con la teoria della complessità, citiamo che è stato dimostrato che il problema di decidere se un grafo è hamiltoniano è NP-completo).

Questa questione ha da sempre attirato l'interesse di diversi studiosi, e sono stati ottenuti vari risultati i quali assicurano che, sotto condizioni di solito abbastanza specifiche, certi grafi sono (o non sono) hamiltoniani. Uno dei più semplici è il seguente, dovuto a O. Ore (1960). Prima di enunciarlo, osserviamo che, banalmente, ogni grafo completo  $\neq K_2$  è hamiltoniano.

**Teorema 1.7.** (Ore). *Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici,  $n \geq 3$ , tale che per ogni coppia di vertici  $v, w$  non adiacenti si ha  $d_G(v) + d_G(w) \geq n$ . Allora  $G$  è hamiltoniano.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G$  un grafo con  $n \geq 3$  vertici che soddisfa all'ipotesi del Teorema. Procediamo per induzione sul numero  $t$  di coppie (non ordinate) di vertici non adiacenti di  $G$ . Se  $t = 0$  allora  $G$  è un grafo completo e dunque, per quanto osservato prima dell'enunciato del Teorema, ammette un cammino hamiltoniano. Sia quindi  $t \geq 1$ . Allora esistono in  $G$  due vertici non adiacenti  $u$  e  $w$ . Consideriamo il grafo  $G'$  ottenuto da  $G$  aggiungendo il lato  $e = \{u, w\}$ . Chiaramente  $G'$ , che ha lo stesso numero di vertici di  $G$  e un lato in più, soddisfa le ipotesi del teorema. Ora,  $G'$  ha una coppia in meno di vertici non adiacenti, e dunque, per ipotesi induttiva, esiste un ciclo hamiltoniano  $\mathcal{C}$  di  $G'$ . Poiché  $G'$  ha gli stessi vertici di  $G$ , se  $\mathcal{C}$  non contiene il lato aggiunto  $e$ , allora è un ciclo hamiltoniano anche di  $G$ . Supponiamo quindi che il lato  $e = e_1$  appartenga al ciclo  $\mathcal{C}$ . Il resto del ciclo,  $w = v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n = u$ , è un cammino hamiltoniano in  $G$ . Poniamo

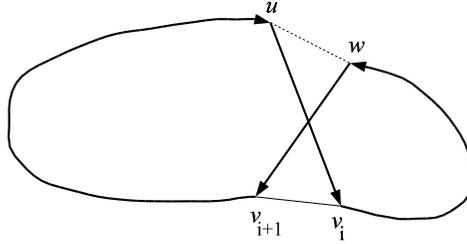
$$A = \{ v_i \mid 1 \leq i \leq n, u \text{ è adiacente in } G \text{ a } v_i \}$$

$$B = \{ v_i \mid 1 \leq i \leq n-1, w \text{ è adiacente in } G \text{ a } v_{i+1} \}.$$

Poiché  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  è l'insieme di tutti i vertici di  $G$ , si ha  $|A| = d_G(u)$ ,  $|B| = d_G(w)$ . Quindi, per ipotesi,  $|A| + |B| \geq n$ . Ora,  $u \notin A \cup B$ , e dunque

$$|A \cup B| \leq n - 1 < |A| + |B|.$$

Da ciò segue  $A \cap B \neq \emptyset$ . Sia  $v_i \in A \cap B$ ; allora  $\{w, v_{i+1}\}$  e  $\{u, v_i\}$  sono lati di  $G$ .



Partendo da  $w$ , facendo seguire il lato  $\{w, v_{i+1}\}$  (vedi la figura), percorrendo poi il circuito  $\mathcal{C}$  da  $v_{i+1}$  fino ad  $u$ , quindi facendo seguire il lato  $\{u, v_i\}$ , ed infine percorrendo  $\mathcal{C}$  a ritroso da  $v_i$  a  $w$  (vedi figura) si ottiene un ciclo hamiltoniano di  $G$ . ■

Il Teorema di Ore è un raffinamento di un celebre risultato di G. Dirac (1954), che possiamo ricavare come immediato corollario.

**Corollario 1.8.** *Sia  $G$  un grafo su  $n$  vertici,  $n \geq 3$ , e tale che  $d_G(v) \geq n/2$  per ogni vertice  $v$ . Allora  $G$  è hamiltoniano.*

Per citare (senza dimostrarlo) un esempio di un risultato più recente, ma di simile natura, peschiamo più o meno dal mazzo un bel teorema di B. Jackson (1980). Un grafo si dice 2-connesso se ogni coppia di vertici distinti appartiene a qualche ciclo del grafo.

**Teorema 1.9.** (Jackson) *Sia  $G$  un grafo 2-connesso  $d$ -regolare con  $n$  vertici. Se  $d \geq n/3$  allora  $G$  è hamiltoniano.*

Osserviamo che il grafo di Petersen è 3-regolare e 2-connesso, ma non è hamiltoniano, e verifica  $d = (n - 1)/3$ . Chiaramente, la 2-connessione è una condizione necessaria per l'esistenza di un ciclo hamiltoniano; il seguente esempio è un grafo regolare 4-valente con  $n = 11$  vertici (che soddisfa quindi  $d \geq n/3$ ) ma che non è 2-connesso:

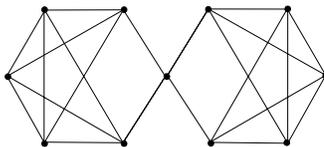


Figura 1.21: un grafo regolare non 2-connesso

*Il problema del commesso viaggiatore.* Al posto del viaggiatore ottocentesco, un po' astratto, e libero dalla necessità di lavorare, di sir W. R. Hamilton, che immaginiamo nella biblioteca di palazzo, avvolto nella più comoda delle vesti da camera, con un bicchierino di sherry in mano, serenamente intento a programmare il suo *grand tour*, seguendone con un dito l'itinerario sopra un mappamondo dodecaedrico, dobbiamo ora considerare un suo moderno pronipote: il *commesso viaggiatore*. Costui, poiché è il suo lavoro, deve visitare in successione, e tornando al termine al luogo di partenza, un certo numero  $n$  di città, ed è tenuto ad eseguire il proprio compito con la minore spesa possibile (in tempo, o in denaro, o rispettivamente a qualsiasi parametro quantificabile che può essere inteso come "prezzo da pagare"). Quindi valuta inizialmente, per ogni coppia di città distinte, il costo del trasferimento da una all'altra (che per semplicità assumiamo non dipendere dal verso di percorrenza). La situazione si rappresenta mediante un grafo completo su  $n$  vertici (il numero di città) in cui ad ogni lato è assegnato un costo (o *peso*); ed il problema è quello di come decidere, in modo efficiente, quali tra i circuiti che toccano tutti i vertici, abbia peso totale minimo. Se assumiamo che il commesso viaggiatore non possa ripassare per una città già visitata (se non per tornare alla fine a quella di partenza), il problema è quindi quello di trovare, in un grafo completo i cui lati sono pesati, un circuito hamiltoniano di peso totale minimo. Questo problema contiene quello di stabilire se un dato grafo  $G$  sia hamiltoniano. Infatti, si aggiungono a  $G$  tutti i lati che congiungono vertici di esso non adiacenti, in modo da ottenere un grafo completo sullo stesso insieme di vertici; quindi si assegna un peso 0 ai lati originari di  $G$  ed un peso 1 a quelli aggiunti.  $G$  è hamiltoniano se e solo se esiste, nel grafo completo che lo estende, un circuito hamiltoniano di peso totale 0.

Da quanto abbiamo detto dei grafi hamiltoniani, è intuibile come tale problema sia, allo stato attuale, intrattabile. Non è nostro compito discutere qui e definire con maggior precisione cosa si intenda per efficienza di un algoritmo; ma proviamo a darne un'idea dicendo perché l'algoritmo ovvio non è tale. L'algoritmo "ovvio" consiste nel considerare tutti i possibili cicli hamiltoniani del grafo completo (ce n'è un numero finito, dato che il numero di vertici è finito), calcolare il peso totale di ognuno, e scegliere quello di peso minimo. Ora, in un grafo completo  $K_n$ , ogni sequenza degli  $n$ -vertici (in cui ciascuno compare una ed una sola volta) è la sequenza dei vertici di un ciclo hamiltoniano (che si chiude al primo vertice della sequenza); se fissiamo il vertice iniziale  $v_1$  dei cicli, c'è quindi una corrispondenza biunivoca tra i cicli hamiltoniani in  $K_n$  e i modi per disporre i rimanenti  $n - 1$  vertici. Dunque il numero di cicli hamiltoniani in  $K_n$  è pari al numero di permutazioni degli  $n - 1$  vertici diversi da

$v_1$ , quindi è  $(n - 1)!$ . Il nostro algoritmo "ovvio" richiede pertanto un numero di passi che cresce, al crescere del numero  $n$  di vertici, come  $n!$ , e quindi diventa rapidamente un numero intrattabile per qualsiasi elaboratore. Una delle richieste ragionevoli affinché un algoritmo sia considerato (almeno dal punto di vista teorico) efficiente, è che il numero complessivo di operazioni necessarie a produrre un output sia limitato in modo polinomiale rispetto ai parametri in input. Nel nostro caso, un algoritmo è efficiente se esiste una costante intera  $c$ , tale che il numero totale di operazioni è limitato da  $n^c$ , dove  $n$  è il numero di vertici del grafo che si pone in input.

Nel caso del problema del commesso viaggiatore, non è ancora stato trovato (né è stato provato che non esiste) un algoritmo deterministico che sia "migliore" di quello ovvio (sia detto in senso teorico: è intuibile come siano stati proposti diversi accorgimenti che, per grafi non troppo grandi, funzionano da un punto di vista pratico molto meglio dell'algoritmo ovvio). Si tratta di una questione che, se risolta (in positivo o in negativo) avrebbe comunque delle conseguenze (teoriche e pratiche) di estrema importanza.

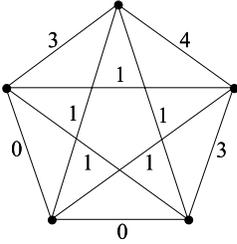
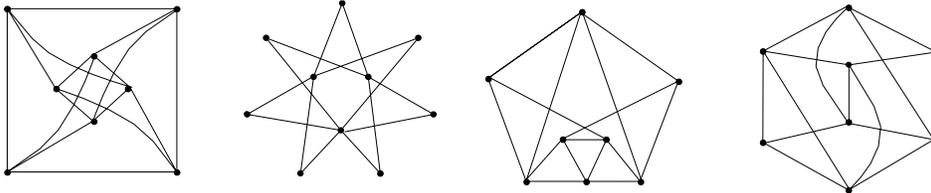


Figura 1.22: il grafo  $K_5$  con pesi

L'esempio della figura 1.22 dovrebbe perlomeno convincere che un algoritmo di tipo *greedy* (ovvero un algoritmo che ad ogni passo effettua la scelta 'migliore' a quel passo, senza tener conto di ciò che potrebbe avvenire dopo) non funziona: i lati disegnati all'interno hanno tutti peso 1, mentre quelli sul perimetro hanno il peso indicato dal numero accanto; c'è un solo ciclo hamiltoniano di peso minimo, che è quello che utilizza tutti e soli i lati che formano la stella interna, ed ha peso 5: in questo caso la scelta "greedy" (che partirebbe con i due archi di peso 0) si rivela sbagliata sin dal primo passo.

**Esercizio 1.11.** Si dica quali tra i seguenti grafi ammette un circuito euleriano, e in tali casi si trovi esplicitamente un tale circuito. Nei rimanenti casi si dica qual è la massima lunghezza di un circuito percorribile nel grafo.



**Esercizio 1.12.** È possibile tracciare una (e una sola) diagonale su ogni faccia di un cubo in modo che il grafo che si ottiene (i vertici sono quelli del cubo, ed i lati gli spigoli del cubo e le diagonali aggiunte) sia euleriano?

**Esercizio 1.13.** Sia  $G$  un grafo e  $v$  un suo vertice. Si provi che  $G$  è casualmente euleriano per  $v$  se e solo se  $G$  è euleriano e ogni ciclo di  $G$  contiene  $v$ .

**Esercizio 1.14.** Si provi che il grafo del dodecaedro è hamiltoniano. Si provi che il grafo di Petersen non è hamiltoniano (si osservi che la figura 1.13 mostra che il grafo di Petersen ammette un ciclo di lunghezza 9).

**Esercizio 1.15.** Sia  $K_6$  il grafo completo su sei vertici, e siano i vertici numerati da 1 a 6; si assegni poi ad ogni vertice  $e = \{n, m\}$  ( $n \neq m$ ) il peso  $c(e) = \min\{n, m\}$ . Si dica (provando l'affermazione senza fare tutti i tentativi) qual è il peso totale minimo di un cammino hamiltoniano in tale grafo.

## 1.4 Alcuni invarianti fondamentali.

In questa sezione introduciamo alcuni dei principali invarianti (in questo caso, si tratta di interi positivi) per grafi. Per ora, si tratta soltanto di fare nuove conoscenze; il significato di tali indicatori numerici nell'indirizzare diversi argomenti di studio emergerà più compiutamente nel seguito. Anche se quasi tutto quel che segue può facilmente essere definito per i multigrafi, ci limiteremo, per semplicità, al caso dei grafi.

**Distanza e diametro.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso, e siano  $u, v$  vertici di  $G$ ; definiamo la *distanza* tra  $u$  e  $v$  come la lunghezza minima di un cammino tra  $u$  e  $v$ , e la denotiamo con  $d_G(u, v)$ . Quindi,  $d_G(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ , mentre  $d_G(u, v) = 1 \Leftrightarrow \{u, v\} \in E$ .

Il **diametro** di un grafo connesso finito è definito come la massima distanza che intercorre tra i suoi vertici; più in generale, per un grafo connesso  $G = (V, E)$  (non necessariamente finito) si pone:

$$\text{diam}(G) = \sup\{d_G(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Assegnata in questo modo una distanza sul grafo connesso  $G$ , risulterà utile il concetto di *palla* e di *sfera*. Si tratta di quello familiare: per ogni  $v \in V$  e  $1 \leq k \in \mathbb{N}$  si definisce la palla di centro  $v$  e raggio  $k$  come l'insieme

$$B_G(v, k) = \{x \in V \mid d_G(v, x) \leq k\}$$

Chiaramente, un grafo connesso ha diametro 1 se e soltanto se è completo. Quando però si passa a considerare grafi connessi di diametro almeno 2 la faccenda si complica notevolmente: non è possibile dare una classificazione soddisfacente nemmeno per quelli di diametro 2, anche assumendone la regolarità: esempi facili di grafi di diametro 2 sono i grafi bipartiti completi  $K_{n,m}$ , e anche il grafo di Petersen ha diametro 2. Da un'altra parte, è intuibile che un grafo in cui i gradi dei vertici sono “piccoli” abbia un diametro “grande”; ad esempio si vede facilmente che  $\text{diam}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ .

**Calibro.** Sia  $G$  un grafo; si chiama **calibro** di  $G$  (in inglese: *girth*) la lunghezza minima di un ciclo (non banale) contenuto in  $G$ ; esso è di solito denotato con  $g = g(G)$ .

Ad esempio, un grafo completo con almeno 3 vertici (o comunque un grafo che contenga un triangolo) ha calibro 3, mentre il grafo del cubo (figura 1.16) ha calibro 4; il grafo del dodecaedro e il grafo di Petersen hanno calibro 5 (lo si verifichi). Per quanto riguarda gli alberi (che non hanno alcun ciclo), si conviene di dire che non hanno calibro, oppure (come preferiamo) che hanno calibro infinito. Grafi con calibro grande sono, in un senso deliberatamente vago, “sparsi”, il che spesso li rende appetibile nelle applicazioni. Il concetto opposto (ma, forse, meno importante) è quello di *circonferenza* di un grafo  $G$ , che indica la lunghezza massima di un ciclo di  $G$ . Osserviamo che la circonferenza di  $G$  è  $|V(G)|$  se e solo se  $G$  è hamiltoniano.

**Indice di stabilità.** Un sottoinsieme  $S$  dell'insieme dei vertici di un grafo  $G$  si dice *stabile* (o *indipendente*) se nessuna coppia di elementi di  $S$  è adiacente in  $G$ . L'*indice di stabilità* (o *indice di indipendenza*) di un grafo  $G$  è la massima cardinalità di un suo sottoinsieme stabile di vertici; lo denoteremo con  $\alpha(G)$  (quindi,  $\alpha(G)$  è il massimo intero  $n$  tale che il grafo complementare  $\overline{G}$  contiene un sottografo completo  $K_n$ ). È immediato che  $\alpha(G) = 1$  se e soltanto se  $G$  è un grafo completo; mentre nel caso dei cicli si ha (lo si dimostri),

$$\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor \quad (1.1)$$

(parentesi quadre denotano la parte intera). L'indice di stabilità del grafo di Petersen è 4.

**Numero cromatico.** Con *colorazione* di un grafo  $G$  si intende normalmente un'assegnazione di un colore a ciascun vertice di  $G$  in modo che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore (in altri termini: in modo che gli estremi di ogni lato siano colorati con colori diversi). Detto in modo formale, una colorazione di  $G = (V, E)$  è una applicazione  $\gamma : V \rightarrow S$ , dove  $S$  è un insieme non vuoto (i cui elementi sono detti *colori*), tale che per ogni  $u, v \in V$ , se  $u$  e  $v$  sono adiacenti allora  $\gamma(u) \neq \gamma(v)$ .

Sia  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ ; un grafo  $G$  si dice *k-colorabile* se esiste una colorazione di  $G$  con  $k$  colori. Banalmente, un grafo è 1-colorabile se e solo se non contiene alcun arco. Un grafo è 2-colorabile se l'insieme dei suoi vertici si può decomporre come l'unione di due sottoinsiemi disgiunti tali che nessun arco ha entrambi gli estremi appartenenti allo stesso sottoinsieme (i grafi di quest tipo, dei quali faremo una conoscenza approfondita più avanti, sono detti *grafi bipartiti*). Più in generale, è chiaro che un dire che un grafo è *k-colorabile* equivale a dire che ammette una *k-partizione* dell'insieme dei vertici con tale proprietà.

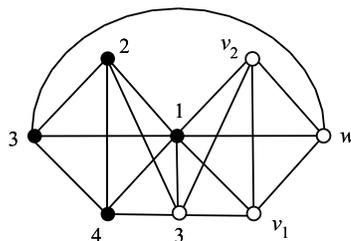
È ovvio che ogni grafo finito  $G$  ammette una colorazione con un numero finito di colori, ed è altresì ovvio che esiste un numero *minimo* di colori mediante i quali è possibile colorare  $G$ : tale numero è detto **numero cromatico** di  $G$  e si indica con  $\chi(G)$ . Dunque, dato un grafo  $G$ ,  $\chi(G) = k$  se e solo se  $G$  è *k-colorabile* e non è  $(k - 1)$ -colorabile.

Ad esempio, è chiaro che  $\chi(K_n) = n$  (dove  $K_n$  è il grafo completo con  $n$  vertici), ed è piuttosto facile vedere che, se  $C_n$  è il ciclo di lunghezza  $n$ , si ha

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad (1.2)$$

Il numero cromatico del grafo di Petersen è 3 (lo si dimostri), mentre quello del grafo del cubo (secondo a sinistra nella figura 1.16) è 2.

Per provare che un grafo ha numero cromatico  $k$ , occorre dunque provare che esiste una colorazione di mediante  $k$  colori, e che non è possibile colorare il grafo con meno di  $k$  colori. Consideriamo, ad esempio il seguente grafo



La figura mostra una possibile colorazione con 5 colori (rappresentati da numeri), dove i vertici  $v_1, v_2, w$  hanno, rispettivamente, colori 4, 2 e 5. Supponiamo ora di voler colorare il grafo con 4 colori  $\{1, 2, 3, 4\}$ ; allora è chiaro che, essendo a due a due adiacenti, i vertici segnati in nero devono avere colori diversi, che indichiamo con 1, 2, 3, 4 come nella figura. Il vertice in basso al centro, adiacente ai vertici già colorati con 1, 2, 4 deve pertanto avere colore 3 (come nella figura). Ora, i vertici  $v_1$  e  $v_2$  non possono essere colorati con 3 e nemmeno con 1, inoltre devono avere colori diversi; quindi i loro colori devono essere 2 e 4, il che forza ad assegnare al vertice  $w$  il colore 3, e questo non è consentito dato che  $w$  è adiacente al vertice di colore 3 all'estremità sinistra del grafo.

Chiaramente, il numero cromatico di un grafo è maggiore o uguale a quello di ogni suo sottografo; e, come anche suggerito dall'esempio di sopra, un limite inferiore al numero cromatico di un grafo è certamente dato dall'esistenza di sottografi completi: se infatti  $G$  contiene un sottografo isomorfo al grafo completo  $K_n$ , allora  $\chi(G) \geq \chi(K_n) = n$ . D'altra parte, tale limite è in generale lontano dall'effettivo valore di  $\chi(G)$ : esistono grafi privi di triangoli il cui numero cromatico è arbitrariamente grande (come vedremo più avanti). Più in generale, Erdős e Lovász hanno dimostrato, con metodi probabilistici, che per ogni intero positivo  $k$  esiste un grafo con calibro  $g(G) > k$  e numero cromatico  $\chi(G) > k$ .

C'è un semplice legame tra indice di stabilità e numero cromatico; infatti, se il grafo  $G$  ammette una colorazione allora l'insieme (chiamiamolo  $X$ ) dei vertici di uno stesso colore è, per definizione, un sottoinsieme stabile di  $G$ , e dunque  $|X| \leq \alpha(G)$ . da questa osservazione segue subito il fatto seguente.

**Proposizione 1.10.** *Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici. Allora  $\alpha(G)\chi(G) \geq n$ .*

Abbiamo introdotto solo alcuni tra i principali invarianti numerici mediante i quali si cerca di descrivere i grafi, e che approfondiremo nel seguito. Altri, come quelli riguardanti misure di connettività (di cui la 2-connessione nel Teorema 1.9 è un caso), li incontreremo più avanti.

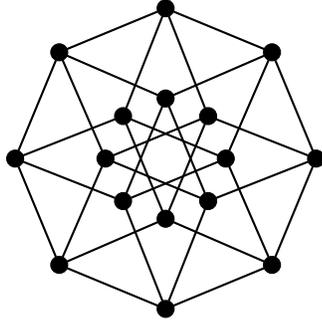
### Esempio: gli ipercubi

Illustriamo alcune delle definizioni date in questa e nelle precedenti sezioni esaminando una classe di grafi piuttosto interessante, quella appunto degli ipercubi.

Dato  $n \geq 2$ , il grafo  $Q_n$ , detto *n-ipercono* (o anche *n-cubo*), è il grafo i cui vertici sono le  $n$ -uple a coefficienti in  $\{0, 1\}$ , ovvero

$$V(Q_n) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}\},$$

e due  $n$ -uple sono adiacenti se e solo se differiscono esattamente per una componente. Dunque il numero di vertici di  $Q_n$  è  $|(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n| = 2^n$ ; inoltre,  $Q_n$  è regolare di valenza  $n$ , quindi, in particolare,  $2|E| = 2^n n$ , e dunque  $|E| = n2^{n-1}$ .  $Q_3$  non è altro che l'usuale cubo, mentre la seguente è una rappresentazione di  $Q_4$  (detto anche *grafo di Levi*).



Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sono vertici di  $Q_n$ , allora  $d_{Q_n}(x, y)$  è il numero di componenti di  $x$  diverse dalle corrispondenti in  $y$ , cioè la cosiddetta *distanza di Hamming*  $d_{Q_n}(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$  (lo si dimostri formalmente). Quindi  $\text{diam}(Q_n) = n$ . Per quanto riguarda il calibro, si ha chiaramente  $g(Q_n) = 4$  (per  $n \geq 2$ ).

È facile vedere che  $Q_n$  è un grafo bipartito (cioè il suo numero cromatico è 2); infatti una bipartizione dei vertici è data da  $V_0$ , l'insieme dei vertici la cui somma delle coordinate è pari, e da  $V_1$  quello dei vertici la cui somma delle coordinate è dispari; scritto per bene

$$V_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\},$$

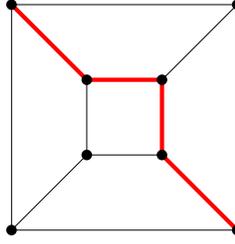
$$V_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}.$$

Sia  $V_0$  che  $V_1$  sono sottoinsiemi stabili: infatti ogni coppia di vertici distinti appartenenti a  $V_0$  (oppure a  $V_1$ ) differisce per almeno due componenti. L'indice di stabilità di  $Q_n$  è quindi  $\alpha(Q_n) = 2^{n-1}$ .

Proviamo ora che: *per ogni  $n \geq 2$ ,  $Q_n$  è hamiltoniano*. Procediamo per induzione su  $n$ ; l'affermazione essendo banale per  $n = 2$ . Assumiamo quindi  $n \geq 3$  e supponiamo che  $Q_{n-1}$  sia hamiltoniano. Sia  $v_1 = (0, 0, \dots, 0)$  vertice di  $Q_n$ . Siano  $A$  e  $B$  i sottografi indotti in  $Q_n$ , rispettivamente, dai vertici la cui prima coordinata è 0, e da quelli la cui prima coordinata è 1. Per ipotesi induttiva sia  $A$  che  $B$  ammettono un ciclo hamiltoniano. In particolare, esiste un cammino hamiltoniano  $v_1, \dots, v_N$  in  $A$  (con  $N = 2^{n-1}$ ); considerando la sequenza

dei vertici  $u_1, \dots, u_N$ , che si ottengono, per ogni  $i = 1, \dots, N$ , sostituendo con 1 la prima coordinata di  $v_i$ , si ottiene un cammino hamiltoniano in  $B$ . Ora, un ciclo hamiltoniano in  $Q_n$  si costruisce percorrendo il cammino  $v_1, \dots, v_N$ , passando quindi a  $u_N, u_{N-1}, \dots, u_1$  e quindi chiudendo in  $v_1$ .

*Snake-in-the-box.* In questo maniera viene chiamato il problema di trovare la massima lunghezza di un cammino (o ciclo) semplice in  $Q_n$  che sia un sottografo indotto. Ad esempio, uno snake in  $Q_3$  è il cammino tracciato in rosso:



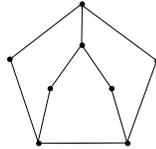
Diversamente dal caso dei cicli hamiltoniani trattati sopra, si tratta di una questione il cui eventuale trattamento induttivo non è per nulla scontato; di fatto, almeno per le tecniche tuttora sviluppate, è un problema che diventa presto (al crescere della dimensione) molto difficile: il valore esatto della massima lunghezza di un cammino semplice indotto in  $Q_n$  è nota solo fino a  $n = 8$ :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
snake	1	2	4	7	13	26	50	98

Per divertimento<sup>1</sup>, si trovi un cammino indotto di lunghezza 7 in  $Q_4$  della figura 1.

**Esercizio 1.16.** Si determinino diametro, calibro, indice di stabilità e esistenza di cicli hamiltoniani nei grafi bipartiti completi  $K_{n,m}$ .

**Esercizio 1.17.** Si determini il diametro del seguente grafo. Qual è il minimo numero di lati che occorre aggiungere in modo da ottenere un grafo di diametro 2?



**Esercizio 1.18.** Per ogni  $n \geq 2$ , sia  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Sia quindi  $B_n = (V, E)$  il grafo con  $V = I_n$ , e per  $a, b \in V$ ,  $\{a, b\} \in E$  se e solo se  $a - b$  è dispari. Si provi che  $B_n$  è connesso, che ha diametro 2, e che è regolare se e soltanto se  $n$  è pari.

**Esercizio 1.19.** Sia  $G$  un grafo connesso di diametro  $q$  e calibro  $g$ . Si provi che, se  $G$  non è un albero,  $g \leq 2q + 1$ . Si deduca che, se  $G$  è bipartito, allora  $g \leq 2q$ .

**Esercizio 1.20.** Si determini calibro, numero cromatico e indice di stabilità dei grafi dei solidi regolari (figura 1.16).

<sup>1</sup>Aggiornamenti sulla ricerca degli snakes negli ipercubi si possono trovare al sito: <http://ai1.ai.uga.edu/sib/sibwiki/doku.php/records>

## 1.5 Grafi diretti

Sinora abbiamo considerato quasi esclusivamente grafi semplici, i cui archi sono definiti come insiemi di due vertici distinti. Un grafo semplice è una relazione binaria *simmetrica* sull'insieme dei vertici tale che nessun vertice è in relazione con se stesso. Intendendo rappresentare una relazione binaria non necessariamente simmetrica, lo strumento è quello dei *grafi diretti*: grafi in cui i lati (che anche in questo caso chiameremo spesso archi) sono coppie ordinate di vertici. Quella che segue è una breve esposizione della terminologia di base per i grafi diretti: potremo essere relativamente sbrigativi dato che si tratta per lo più di naturali estensioni di analoghi concetti già discussi per i grafi semplici.

Sia  $V$  un insieme non vuoto, denotiamo con  $D(V) = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w\}$  l'insieme di tutte le coppie *ordinate* di elementi distinti di  $V$ .

Un **grafo diretto** (detto anche **di-grafo**) (in inglese: *directed graph* o *digraph*) è una coppia  $G = (V, A)$ , dove  $V$  (l'insieme dei vertici) è un insieme non vuoto, ed  $A$  è un sottoinsieme (che può anche essere vuoto) dell'insieme  $D(V)$ ; gli elementi di  $A$  sono detti gli **archi** del grafo diretto  $G$ .

Se  $a = (v, w) \in A$  è un arco, chiameremo  $v$  il vertice *iniziale* di  $a$  e  $w$  il vertice *finale*  $w$ . Un diagramma di un grafo diretto è simile a quello di un grafo semplice, ma ciascun arco viene disegnato con una freccia che punta dal suo vertice iniziale verso il suo vertice finale.

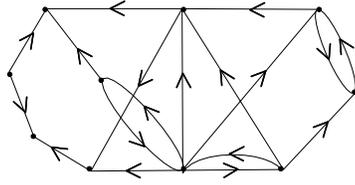


Figura 1.23: un grafo diretto

Con la dovuta attenzione, ma senza grosse difficoltà, la maggior parte delle definizioni di base date per i grafi si possono estendere ai grafi diretti. In particolare, per quanto riguarda il grado, se  $v$  è un vertice di un grafo diretto  $G = (V, A)$  distingueremo tra grado *in entrata*  $d^e(v)$  di  $v$ , che è il numero di archi distinti di cui  $v$  è il vertice finale, e grado *in uscita*  $d^u(v)$ , che è il numero di archi distinti di cui  $v$  è il vertice iniziale. Formalmente

$$d^e(v) = |\{(w, v) : w \in V, (w, v) \in A\}|$$

$$d^u(v) = |\{(v, w) : w \in V, (v, w) \in A\}|$$

Poiché ogni arco ha un solo vertice iniziale ed un solo vertice finale, il corrispondente per grafi diretti del Teorema 1.1 è ancora più facile da provare.

**Proposizione 1.11.** *Sia  $G = (V, A)$  un grafo diretto. Allora*

$$\sum_{v \in V} d^e(v) = |A| = \sum_{v \in V} d^u(v).$$

Un grafo diretto sull'insieme dei vertici  $V$  si dice *completo* se l'insieme degli archi coincide con  $D(V)$ . Il numero di archi di un grafo diretto completo su  $n$  vertici è quindi  $n(n-1)$ .

Un grafo diretto è *regolare* se il grado in entrata e quello in uscita sono gli stessi per tutti i vertici (chiaramente, se il grafo - come in genere continueremo ad assumere - è finito allora i due gradi sono anche uguali tra loro).

Un *sottografo* di un grafo diretto  $(V, A)$  è un grafo diretto  $(U, B)$  tale che  $\emptyset \neq U \subseteq V$  e  $B \subseteq A$ . Il concetto di sottografo *indotto* per grafi diretti è analogo a quello per i grafi semplici.

Un *isomorfismo* tra grafi diretti  $(V, A)$  e  $(V', A')$  è una biezione  $\phi : V \rightarrow V'$  tale che, per ogni  $u, v \in V$ ,

$$(u, w) \in A \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(w)) \in A'.$$

Ad esempio, i grafi diretti nella figura seguente non sono isomorfi:

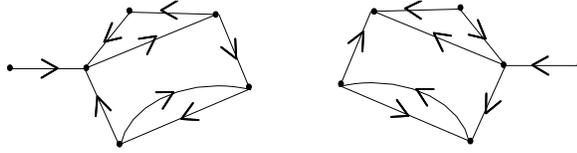


Figura 1.24: grafi diretti non isomorfi.

Siano  $u$  e  $v$  vertici di un grafo diretto  $G$ , un **cammino diretto** da  $u$  a  $v$  è una successione

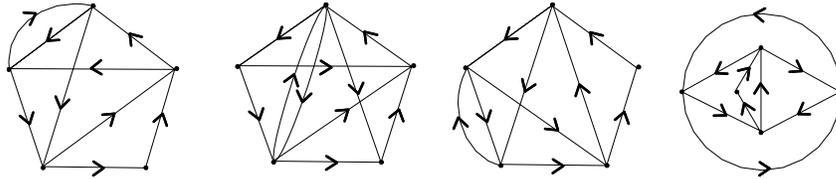
$$v_0 (v_0, v_1) v_1 (v_1, v_2) \dots v_{n-2} (v_{n-2}, v_{n-1}) v_{n-1} (v_{n-1}, v_n) v_n$$

di vertici ed archi di  $G$  in cui  $v_0 = u$ ,  $v_n = v$ , gli archi sono tutti distinti ed ognuno ha come vertice finale il vertice iniziale dell'arco successivo. Il numero naturale  $n$  è la *lunghezza* del cammino diretto, e se  $u = v$  si parla di *circuito diretto*.

Un grafo diretto  $G$  è **connesso** se è connesso (nel senso indiretto) il multigrafo (detto multigrafo indotto) che si ottiene "togliendo le frecce" dagli archi di  $G$ ; mentre  $G$  si dice **fortemente connesso** se per ogni coppia di vertici distinti  $u$  e  $v$  di  $G$  esiste un cammino diretto in  $G$  da  $u$  a  $v$ .

**Esercizio 1.21.** Si dica quanti sono, a meno di isomorfismo, i grafi diretti con tre vertici, e quanti quelli con quattro vertici.

**Esercizio 1.22.** Si dica quali tra i seguenti grafi diretti sono tra loro isomorfi.



**Esercizio 1.23.** Si faccia un esempio di grafo diretto connesso ma non fortemente connesso. Per ogni  $n \geq 1$  si faccia un esempio di grafo diretto con  $n$  vertici che non sia fortemente connesso, ma il cui multigrafo indotto abbia un circuito semplice di lunghezza  $n$ .

## 1.6 Esercizi.

**Esercizio 1.24.** Ciascuno dei sette agenti segreti 001, 002, ..., 007 è incaricato di controllare l'operato di tre dei suoi colleghi. Si dimostri che almeno uno dei sette agenti non è controllato dagli stessi tre colleghi che egli controlla.

**Esercizio 1.25.** Prescindendo da qualsiasi limitazione di natura chimico-fisica o di orientazione, dire quante sono le possibili diverse molecole con formula chimica  $H_4C_2O$  in cui tutti i legami atomici sono semplici. Quante sono se si ammettono anche legami bivalenti? (si ricordi che atomi di idrogeno, carbonio e ossigeno hanno, rispettivamente, valenza 1, 4 e 2).

**Esercizio 1.26.** Sia  $G$  un grafo connesso in cui ogni vertice è pari. Si provi che per ogni lato  $e$  di  $G$ , il sottografo  $G - e$  è connesso.

**Esercizio 1.27.** Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici e tale che per ogni coppia di vertici  $v, w$  non adiacenti si ha  $d_G(v) + d_G(w) \geq n - 1$ . Si provi che  $G$  è connesso ed ha diametro al più 2.

**Esercizio 1.28.** Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici e tale che il suo grafo complementare  $\bar{G}$  sia isomorfo a  $G$ . Si dica quanti lati ha  $G$  (in funzione di  $n$ ), mostrando inoltre che si ha  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Si costruiscano grafi con 4 e con 5 vertici che siano isomorfi al loro grafo complementare.

**Esercizio 1.29.** Sia  $G$  un grafo non connesso. Si provi che il suo grafo complementare è connesso. Sia  $G = (V, E)$  un grafo con  $n$  vertici. Si provi che se  $|E| > \binom{n-1}{2}$  allora  $G$  è connesso. Cosa si può dire se  $|E| = \binom{n-1}{2}$ ?

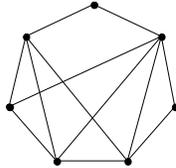
**Esercizio 1.30.** Si provi che se  $G$  è privo di punti isolati, allora il line-graph  $L(G)$  è connesso se e solo se  $G$  è connesso. Si provi che se  $G$  è euleriano, allora il line-graph  $L(G)$  è euleriano.

**Esercizio 1.31.** Sia  $L(G) = (V_c, E_c)$  il line-graph di  $G = (V, E)$ ; si provi che

$$|E_c| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_G(v)(d_G(v) - 1).$$

Si provi quindi che un grafo connesso  $G$  è isomorfo a  $L(G)$  se e soltanto se  $G$  è un ciclo  $C_n$ , dove  $n = |V|$ .

**Esercizio 1.32.** Qual è il minimo numero di lati che è necessario aggiungere al seguente grafo per ottenere un grafo euleriano?



**Esercizio 1.33.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso euleriano, e sia  $v \in V$ . Si consideri il grafo  $G - v = (V \setminus \{v\}, E')$ , dove  $E'$  è ottenuto togliendo da  $E$  i lati incidenti a  $v$ . Si provi che  $G - v$  è connesso, che non ha circuiti euleriani, e che ha cammini euleriani se e solo se  $d_G(v) = 2$ .

**Esercizio 1.34.** Si dica quali tra i grafi  $B_n$  definiti nell'esercizio 1.18 sono euleriani. Provare che  $B_n$  è hamiltoniano se e soltanto se  $n$  è pari.

**Esercizio 1.35.** Si dica quali tra i grafi di figura 1.25 grafi sono hamiltoniani.

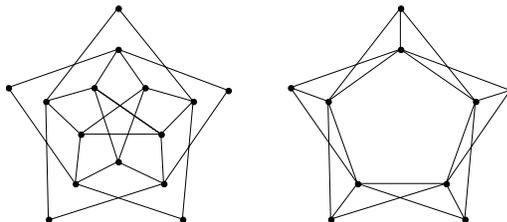


Figura 1.25: due grafi

**Esercizio 1.36.** Per  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ , sia

$$h(n) = \binom{n-1}{2} + 2 = \frac{n^2 - 3n + 6}{2}.$$

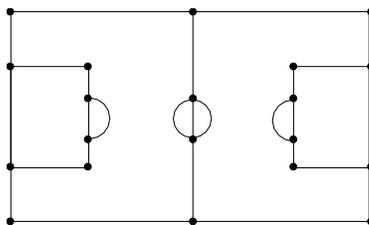
Sia  $G = (V, E)$  un grafo con  $n$  vertici; si provi che se  $|E| \geq h(n)$  allora  $G$  è hamiltoniano.

**Esercizio 1.37.** Sia  $G$  un grafo connesso con  $n$  vertici e sia  $\mu = \mu(G)$  la lunghezza massima di un cammino semplice di  $G$ . Si provi che aggiungendo a  $G$  al più  $n - \mu$  opportuni lati si ottiene un grafo hamiltoniano (si faccia induzione su  $n - \mu$ ).

**Esercizio 1.38.** (Nash–Williams) Sia  $k \geq 2$ , e sia  $G$  un grafo regolare  $k$ -valente con  $2k + 1$  vertici. Si provi che  $G$  è hamiltoniano.

**Esercizio 1.39.** Sia  $G$  un grafo connesso con  $n$  vertici, e sia  $3 \leq k \leq n$ . Assumendo che per ogni coppia di vertici  $v, w$  non adiacenti di  $G$  sia  $d_G(v) + d_G(w) \geq k$ , provare che  $G$  ha un ciclo di lunghezza almeno  $\frac{k+2}{2}$ .

**Esercizio 1.40.** L'addetto alla manutenzione di un campo di calcio deve ripassare con l'apposita macchina la vernice bianca sulle linee del campo (ogni linea una sola volta):



Si dica qual è il minimo numero di volte che egli deve interrompere l'erogazione della vernice (ed eventualmente spostarsi in un altro punto del campo).

**Esercizio 1.41.** 1) Si formuli in termini di esistenza di cammini hamiltoniani in un opportuno grafo il famoso *problema del cavallo*: è possibile, partendo da una opportuna casella, e procedendo mediante successive mosse del cavallo, toccare una ed una sola volta tutte le

caselle di una scacchiera? Dire se, nel caso di scacchiere di ordine  $3 \times 4$  e  $4 \times 4$ , il problema ha soluzione affermativa.

2) Sia  $\mathcal{C}_n$  il grafo che rappresenta il problema del cavallo su una scacchiera quadrata di  $n$  caselle per lato. Al variare di  $n \geq 4$  si dica se  $\mathcal{C}_n$  ha un circuito o un cammino euleriano. La cosa cambia se la scacchiera, invece che su un piano, viene disegnata su un nastro (cioè se si identificano due lati opposti)?

**Esercizio 1.42.** Si costruisca un grafo  $G$ , connesso e con 7 vertici, tale che  $d_G(v) + d_G(w) \geq 6$  per ogni coppia di vertici  $v$  e  $w$ , ma che non ha sottografi isomorfi a cicli di lunghezza maggiore o uguale a 5.

**Esercizio 1.43.** Sia  $n \geq 2$ , e siano  $G$  e  $G'$  due grafi completi su  $n$  vertici. Supponiamo che i due insiemi di vertici siano disgiunti:  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  l'insieme dei vertici di  $G$ , e  $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  quello dei vertici di  $G'$ . Sia  $\Delta_n = (V, E)$  il grafo definito nella maniera seguente:  $V = V \cup V'$  ed  $E$  è costituito da tutti i lati di  $G$  e di  $G'$  con l'aggiunta dei lati del tipo  $\{v_i, v'_i\}$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Si dica per quali valori di  $n$  il grafo  $\Delta_n$  è euleriano.

**Esercizio 1.44.** Si provi che il grafo di Grötzsch (figura sotto) ha numero cromatico 4.

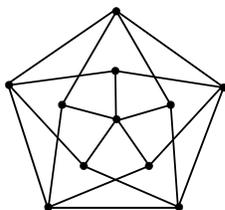
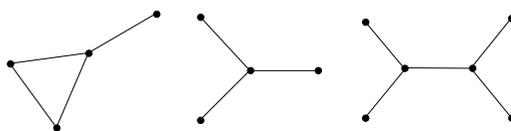


Figura 1.26: il grafo di Grötzsch

**Esercizio 1.45.** Si dia la definizione di automorfismo, e quindi quella di gruppo degli automorfismi, di un grafo. Si descriva poi il gruppo degli automorfismi dei seguenti grafi



**Esercizio 1.46.** Dopo aver osservato che il gruppo degli automorfismi di un grafo con  $n$  vertici è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo simmetrico  $S_n$ , si dimostri che i soli grafi con  $n$  vertici il cui gruppo degli automorfismi è isomorfo a  $S_n$  sono il grafo banale (cioè quello privo di lati) ed il grafo completo  $K_n$ .

**Esercizio 1.47.** Sia  $G$  un grafo tale che per ogni terna di vertici distinti esiste almeno un arco che congiunge due di tali vertici. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

- (1)  $G$  è connesso.
- (2) Se  $G$  non è connesso allora  $G$  ha due componenti connesse che sono grafi regolari.
- (3) Se  $G$  è connesso, allora  $diam(G) \leq 2$ .
- (4) Se  $G$  è connesso, allora  $diam(G) \leq 3$ .
- (5)  $G$  è hamiltoniano.

**Esercizio 1.48.** Costruire un grafo con sette vertici e calibro tre con il massimo numero di lati. Stesso problema per un grafo con sette vertici e calibro quattro.

**Esercizio 1.49.** Costruire un grafo connesso con 8 lati, calibro 4, ed il minimo numero possibile di vertici (a meno di isomorfismo ci sono due grafi possibili).

**Esercizio 1.50.** Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici ed  $m$  lati. Si provi che  $\alpha(G)^2 \leq n^2 - 2m$  (ricordo che  $\alpha(G)$  è l'indice di stabilità di  $G$ ).

**Esercizio 1.51.** Si provi che, per  $n \geq 2$ , l'ipercubo  $Q_n$  contiene cicli di lunghezza  $2t$  per ogni  $2 \leq t \leq 2^{n-1}$ .

**Esercizio 1.52.** Si dimostri che in un grafo diretto fortemente connesso il numero degli archi è maggiore o uguale al numero dei vertici. Si dica quali sono (a meno di isomorfismo) i grafi diretti fortemente connessi in cui il numero degli archi è uguale a quello dei vertici.

**Esercizio 1.53.** Un circuito euleriano diretto in un grafo diretto  $G$  è un circuito diretto che passa per ogni arco di  $G$ . Si provi che un grafo diretto  $G$  privo di vertici isolati ha un circuito euleriano diretto se e soltanto se è connesso e  $d^e(v) = d^i(v)$  per ogni vertice  $v$  di  $G$ .

**Esercizio 1.54.** Un grafo *orientato* è un grafo diretto in cui per ogni coppia di vertici c'è al più un arco che li connette; detto formalmente, è un grafo diretto  $(V, A)$  tale che, per ogni  $u, v \in V$ ,  $(u, v) \in A \Rightarrow (v, u) \notin A$  (in altri termini ancora, un grafo orientato è un grafo semplice in cui ad ogni lato è assegnata una direzione). Si provi che in un grafo orientato completo (cioè ogni coppia di vertici è connessa da uno e un solo arco) esiste un cammino hamiltoniano diretto (attenzione: non necessariamente un circuito).

## Capitolo 2

# Altra combinatoria

L'argomento principale di queste note è la Teoria dei Grafi: un'area già di per sé vastissima, e centrale, di quella che si denomina 'combinatoria'. Partendo dalla convinzione che la matematica non sia fatta da compartimenti stagni e che, al contempo, non sia possibile dare, anche di un settore più o meno artificialmente delimitato, un'introduzione rigorosa che dia eguale rilievo a tutte le parti ritenute rilevanti di quel settore, e infine non risulti in una selezione dovuta a preferenze personali, ci proponiamo di tanto in tanto di deviare dalla stretta osservanza grafica, per introdurre o anche solo per accennare ad alcuni altri aspetti di combinatoria. Va da sé che la scelta degli argomenti sarà estremamente limitata se confrontata all'ampiezza di questa area della matematica: e questi riguarderanno per lo più la combinatoria degli insiemi (*set combinatorics*), privilegiando quelli che presentano analogie con la Teoria dei Grafi, che la riguardano secondo un certo punto di vista (come ad esempio la Teoria di Ramsey che vedremo in un prossimo capitolo) o forniscono utili e duttili strumenti (come il Teorema di Dilworth della sezione 2.2, che applicheremo ai grafi già nel prossimo Capitolo).

### 2.1 Il principio dei cassetti.

Il *Principio dei cassetti* (in inglese *Pigeonhole Principle*, “principio della piccionaia”) afferma un fatto “ovvio”:  $n + 1$  buste non possono essere collocate in  $n$  cassetti in modo che ogni cassetto contenga una sola busta. In modo tecnico: *non esistono applicazioni iniettive da un insieme di  $n + 1$  elementi in uno di  $n$  elementi*. Più in generale, il principio si può estendere ed enunciare nella maniera seguente

**Principio dei cassetti.** *Se un insieme che consiste di almeno  $rs + 1$  oggetti viene ripartito in  $r$  classi, allora esiste una classe che contiene almeno  $s + 1$  oggetti.*

La prima formulazione ufficiale di tale principio è dovuta a Dirichlet nel 1834 col nome *Schubfachprinzip* (“principio del cassetto”). Per questo motivo tale principio è anche noto come principio di Dirichlet. Esso rappresenta uno dei più antichi principi “non costruttivi”, in quanto stabilisce solo l'esistenza di una classe avente più di  $s$  oggetti, e non dice nulla circa

come trovare tale classe. Oggigiorno esistono diverse generalizzazioni (alcune profonde) del principio (ad esempio i Teoremi di tipo Ramsey di cui parleremo in un capitolo specifico ed i metodi probabilistici per cui rimandiamo ai testi specializzati). Applicazioni di tale principio sono notevoli e coinvolgono tutti gli ambiti della matematica.

**Alcuni esempi in teoria dei grafi.** Vediamo, come primissimi esempi, alcune facili applicazioni alla teoria dei grafi; in parte si tratta di esercizi o semplici osservazioni dal capitolo precedente (che sicuramente avete già provato per conto vostro).

**ESEMPIO 1 (esercizio 1.6):** *In ogni grafo finito con almeno due vertici esistono due vertici aventi lo stesso grado.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G$  un grafo avente  $n$  vertici. Ovviamente per ogni vertice  $x$  di  $G$ , abbiamo che  $d_G(x) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Osserviamo però che se c'è un vertice isolato, cioè se  $0$  è uno dei gradi dei vertici di  $G$ , allora non esistono vertici di grado  $n-1$ . Quindi i gradi  $d_G(x)$  appartengono tutti all'insieme  $\{0, 1, \dots, n-2\}$  oppure tutti all'insieme  $\{1, \dots, n-1\}$ . In ogni caso ad un insieme con  $n-1$  elementi per cui, per il principio dei cassetti, esistono due vertici che hanno lo stesso grado. ■

**ESEMPIO 2 (Proposizione 1.10):** *Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici; allora  $n \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Assegnamo una colorazione ai vertici di  $G$  utilizzando esattamente  $\chi(G)$  colori. In base a tale colorazione gli  $n$  vertici vengono ripartiti in  $\chi(G)$  classi. Per il principio dei cassetti, esiste una classe contenente almeno  $n/\chi(G)$  vertici. Questi, poiché trattasi di vertici dello stesso colore, sono tra loro a mutuamente non-adiacenti. Ne segue che  $\alpha(G) \geq n/\chi(G)$ , da cui la tesi. ■

**ESEMPIO 3 (esercizio 1.27):** *Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici e tale che per ogni coppia di vertici non adiacenti  $x, y$  di  $G$  si ha  $d_G(x) + d_G(y) \geq n-1$ , allora  $G$  ha diametro al più due. In particolare  $G$  è connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $x, y \in V(G)$ . Se questi vertici non sono adiacenti, allora ci sono per ipotesi almeno  $n-1$  lati che collegano  $x$  ed  $y$  ai restanti vertici. Essendo i restanti vertici  $n-2$ , per il principio dei cassetti, esiste un vertice,  $z$ , adiacente sia ad  $x$  che ad  $y$ . Ne segue che ogni coppia di vertici non-adiacenti ha almeno un vicino in comune, ovvero  $\text{diam}(G) \leq 2$ . ■

Osserviamo che il risultato appena provato è il *migliore possibile*, nel senso che se proviamo ad indebolire l'ipotesi ci accorgiamo subito che l'asserto non vale. Sia ad esempio  $n$  pari e si prenda  $G$  l'unione disgiunta di due grafi completi su  $n/2$  vertici. Allora per ogni  $x \in V(G)$ ,  $d_G(x) = \frac{1}{2}(n-2)$ , ma  $G$  è disconnesso.

**Il Teorema di Mantel.** È ora il caso di fare un esempio meno immediato e che, soprattutto, provi qualcosa di nuovo, rispondendo alla domanda:

*“qual è il massimo numero di lati che può avere un grafo di  $n$  vertici privo di triangoli?”*

Si tratta questa di una tipica proprietà *estremale* per i grafi. Viene analizzata una collezione di oggetti finiti (in questo caso i grafi finiti) che soddisfano a precise restrizioni (nel caso: essere privi di triangoli) con l'intento di stabilire innanzitutto quanto grandi (o piccoli) tali oggetti possano essere; in secondo luogo si vuole determinare la struttura degli oggetti *estre-*

*mali* rispetto a tali restrizioni, ovvero quegli oggetti che sono massimali (o minimali) per le proprietà in esame. Tratteremo più diffusamente questo tipo di problemi nel Capitolo ??; per ora, come altro esempio di applicazione del principio dei cassetti, ci limitiamo ad una semplice, ma interessante, osservazione. (Ricordiamo che col simbolo  $\lfloor x \rfloor$  si indica la parte intera del numero reale  $x$ , ovvero il più grande intero relativo minore o uguale ad  $x$ ).

**Teorema 2.1** (Mantel 1907). *Se  $G$  è un grafo di  $n$  vertici avente più di  $\lfloor n^2/4 \rfloor$  lati, allora  $G$  contiene un triangolo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Proviamo il teorema nel caso  $n$  pari, lasciando ai lettori il compito di trattare il caso  $n$  dispari. Sia dunque  $n = 2m$  e mostriamo che ogni siffatto grafo avente almeno  $m^2 + 1$  lati contiene un triangolo. Ragioniamo per induzione su  $m$ . Se  $m = 1$ ,  $G$  non può avere  $m^2 + 1$  lati, dunque l'enunciato è vero. Assumiamo allora il risultato vero per  $m$  e sia  $G$  un grafo avente un  $2(m + 1)$  vertici e numero di lati  $\geq (m + 1)^2 + 1$ . Siano  $u$  ed  $v$  due vertici adiacenti di  $G$  e sia  $H$  il sottografo indotto sui restanti  $2m$  vertici. Se  $H$  ha almeno  $m^2 + 1$  lati, per ipotesi induttiva  $H$ , e quindi anche  $G$ , contiene un triangolo. Supponiamo allora che  $H$  contenga allora al più  $m^2$  lati. Ne segue che almeno  $(m + 1)^2 + 1 - m^2 - 1 = 2m + 1$  lati di  $G$  collegano  $u$  ed  $v$  ai  $2m$  vertici di  $H$ . Per il principio dei cassetti, esisterà un vertice  $w$  di  $H$  che sarà collegato sia con  $u$  che con  $v$ . Pertanto  $\{u, v, w\}$  risulta essere un triangolo in  $G$ . ■

Notiamo poi che l'esempio tipico di un grafo privo di triangoli è sicuramente quello del grafo completo bipartito  $K_{r,s}$ . In particolare se  $n$  è pari il numero di lati del grafo  $K_{n/2,n/2}$  è esattamente  $n^2/4$ . Il Teorema precedente mostra che questa è proprio una situazione estrema: nel capitolo ??, generalizzando il Teorema di Mantel, faremo di meglio, provando inoltre che, se  $n$  è pari, il grafo  $K_{n/2,n/2}$  è il solo che realizza le condizioni estremali di avere  $n^2/4$  lati e non avere triangoli.

Di fatto, risultati di natura estrema sono molto frequenti, e in un certo senso indispensabili, in teoria dei grafi; ad esempio, la Proposizione 1.3 è di questo tipo: essa assicura che il minimo numero di archi che deve avere un grafo con  $n$  vertici per essere connesso è  $n - 1$  (e nella sezione 3.1 vedremo che, in questo caso, gli oggetti estremali sono gli alberi).

Come altro esempio, riprendiamo l'esercizio 1.36. In esso si afferma che per  $n \geq 1$ , posto  $h(n) = \binom{n-1}{2} + 2$ , un grafo con  $n$  vertici e numero di archi maggiore o uguale ad  $h(n)$  è hamiltoniano. Dall'altra parte, sia  $G = (V, E)$ , con  $V$  unione disgiunta  $V = V_0 \cup \{x\}$ , il sottografo indotto da  $V_0$  sia il grafo completo  $K_{n-1}$  ed  $E$  contenga un unico altro arco che congiunge  $x$  ad uno ed un solo vertice in  $V_0$ . Chiaramente  $G$  non ammette cicli hamiltoniani, ed il numero dei suoi archi è:

$$|E| = \binom{n-1}{2} + 1 = h(n) - 1.$$

Abbiamo dunque provato (assumendo svolto l'esercizio) che *il massimo numero di archi per cui esiste un grafo non-hamiltoniano con  $n$  vertici è  $h(n) - 1$*  (vedi anche l'esercizio 2.5).

**Il Teorema di Dirichlet.** Riguarda la Teoria dei numeri piuttosto che quella dei grafi, ma è una delle applicazioni più note del principio dei cassetti. È un risultato molto utile, che concerne l'esistenza di una buona approssimazione razionale di un arbitrario numero irrazionale, e può essere provato in modo elegante utilizzando un argomento puramente combinatorio.

**Teorema 2.2** (Dirichlet 1879). *Sia  $x$  un numero reale. Per ogni intero naturale  $n$  esiste un numero razionale  $p/q$  tale che  $1 \leq q \leq n$  e*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}.$$

*Dimostrazione.* Dato un arbitrario numero reale  $y$ , indichiamo con  $\{y\}$  la sua *parte frazionaria*, ovvero la quantità  $\{y\} := y - [y]$ . (Ad esempio se  $x = \pi \simeq 3,141014\dots$ , allora  $[\pi] = 3$  e  $\{\pi\} = 0,141014\dots$ ). Si noti che  $[y] \in \mathbb{Z}$  mentre  $\{y\} \in [0, 1)$ .

Sia assegnato  $x \in \mathbb{R}$ . Al variare di  $a$  nell'insieme  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ , consideriamo gli  $n+1$  numeri  $\{ax\}$ . Ciascuno di questi appartiene ad uno degli  $n$  intervalli

$$[0, 1/n), \quad [1/n, 2/n), \quad \dots \quad [1 - 1/n, 1).$$

Per il principio dei cassetti, esiste un intervallo che contiene almeno due di questi numeri, ovvero esistono  $a > b$  in  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ , tali che  $\{ax\}$  e  $\{bx\}$  differiscono per meno di  $1/n$ . sia  $q := a - b$  e  $p = [ax] - [bx]$ . Allora  $q \leq n$  e

$$|qx - p| < 1/n,$$

da cui segue la tesi. □

**Il Teorema di Erdős-Szekeres.** Come ultimo esempio di ricorso al principio dei cassetti, vediamo la dimostrazione di una interessante proprietà delle sequenze numeriche.

Sia  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  una sequenza di  $n$  numeri reali tutti distinti. Una *sottosequenza* di  $A$  avente  $k$  termini è una sequenza  $B$  di  $k$  termini distinti di  $A$  che compaiono nello stesso ordine con cui compaiono in  $A$ . In simboli,  $B = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ , dove  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .  $B$  si dice *crescente* (*decescente*) se  $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$  (rispettivamente se  $a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_k}$ ).

**Teorema 2.3** (Erdős-Szekeres 1935). *Sia  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  una sequenza di  $n$  numeri reali distinti. Se  $n \geq rs + 1$  allora  $A$  possiede una sottosequenza crescente di  $s + 1$  termini, oppure una sottosequenza decrescente di  $r + 1$  termini.*

**DIMOSTRAZIONE.** [Seidenberg 1959] Ad ogni  $a_i \in A$  associamo una coppia ordinata  $(x_i, y_i)$ , dove  $x_i$  è il numero dei termini della più lunga sottosequenza crescente che termina in  $a_i$ , ed  $y_i$  il numero dei termini della più lunga sottosequenza decrescente che inizia in  $a_i$ .

Supponiamo, per assurdo, che per la sequenza data la proprietà non valga; allora, per ogni  $1 \leq i \leq n$ , la coppia  $(x_i, y_i)$  appartiene a  $\{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, r\}$ , che è un insieme con  $rs$  elementi. Per il principio dei cassetti, esistono indici  $i \neq j$  tali che  $(x_i, y_i) = (x_j, y_j)$ , ma questo è assurdo poiché, essendo gli  $a_i$  tutti distinti, si avrà  $a_i < a_j$  e allora  $x_i < x_j$ , oppure  $a_i > a_j$  e allora  $y_i > y_j$ . ■

**Esercizio 2.1.** Utilizzare il Principio dei cassetti per provare il Teorema cinese del resto, ovvero provare che dati  $a_1, \dots, a_k, b$  interi relativi ed  $m_1, \dots, m_k$  interi mutualmente coprimi, detto  $m = m_1 \dots m_k$ , esiste un unico intero  $a$ , con  $b \leq a < b + m$ , per cui  $a \equiv a_i \pmod{m_i}$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ .

**Esercizio 2.2.** Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ; si provi che esiste un sottoinsieme infinito  $A$  di  $\mathbb{N}$  tale che  $f$  è costante su  $A$  oppure  $f(x) \neq f(y)$  per ogni  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ .

**Esercizio 2.3.** Si dimostri il Teorema di Mantel nel caso  $n$  dispari.

**Esercizio 2.4.** Sia  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{rs+1}$  una successione di  $rs + 1$  interi. Si provi che è sempre possibile selezionare fra questi  $s + 1$  tali che nessuno divide ogni altro, oppure selezionare  $r + 1$  tali che ognuno divide il successivo.

**Esercizio 2.5.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo con  $|V| = n$  e  $|E| = \binom{n-1}{2} + 1$ . Si provi che  $G$  è hamiltoniano oppure contiene un sottografo completo di ordine  $n - 1$ .

## 2.2 Catene e antcatene.

Ricordiamo che un *insieme parzialmente ordinato* (o, equivalentemente, *poset*) è per definizione un insieme,  $P$ , munito di una relazione binaria,  $\leq$ , che sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva, ovvero

- per ogni  $x \in P$  vale  $x \leq x$ ,
- ogni qualvolta  $x \leq y$  e  $y \leq x$  vale  $x = y$ ,
- ogni qualvolta  $x \leq y$  e  $y \leq z$  vale  $x \leq z$ .

Un sottoinsieme  $C$  di  $P$  è una *catena* di  $P$  se ogni coppia di elementi di  $C$  è comparabile in  $P$ , ovvero se per ogni  $x, y \in C$  vale  $x \leq y$  o  $y \leq x$ . Dualmente, un sottoinsieme  $A$  di  $P$  è una *anticatena* se è costituito da elementi non comparabili, ovvero per ogni  $x \neq y \in A$ ,  $x \not\leq y$  e  $y \not\leq x$ . Denoteremo con  $\alpha(P)$  la cardinalità massima di una antcatena di  $P$  (la scelta della stessa notazione usata per l'indice di stabilità di un grafo non è una distrazione, e non provocherà confusione).

Nelle considerazioni della relazione in  $P$  tra catene e antcatene, cominciamo con una semplice applicazione (che, tra l'altro, risolve l'esercizio 2.4) del principio dei cassetti:

**Lemma 2.4** (Dilworth 1950). *Sia  $P$  un insieme parzialmente ordinato avente  $n$  elementi. Se  $n \geq sr + 1$  allora in  $P$  esiste una catena di lunghezza  $s + 1$ , o un'anticatena di cardinalità  $r + 1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $C_1, C_2, \dots, C_m$  catene massimali di  $P$  tali che  $P = \bigcup_{i=1}^m C_i$  e, per ogni  $1 \leq j \leq m$ ,  $P \neq \bigcup_{i \neq j} C_i$ . Supponiamo che  $|C_i| \leq s$  per ogni  $1 \leq i \leq m$ . Poiché l'unione di queste contiene gli  $n$  punti di  $P$ , per il principio dei cassetti, abbiamo che  $m \geq r + 1$ . Per ogni  $i = 1, 2, \dots, m$ , sia  $x_i$  l'elemento massimo di  $C_i \setminus \bigcup_{j \neq i} C_j$ . Allora se  $i \neq j$ ,  $x_i$  e  $x_j$  sono incomparabili. quindi gli elementi  $x_1, x_2, \dots, x_m$  formano una antcatena di lunghezza  $m \geq r + 1$ . ■

Con *decomposizione* di un poset (finito)  $P$  si intende una partizione sull'insieme  $P$ ; le più interessanti sono le decomposizioni i cui termini sono catene o antcatene. In particolare, dato un insieme parzialmente ordinato  $P$  ci chiediamo qual è il minimo numero di catene (o di antcatene) mediante le quali può essere decomposto  $P$ . Cominciamo con un'osservazione elementare:

Se  $C$  ed  $A$  sono rispettivamente una catena ed un'anticatena, allora  $|C \cap A| \leq 1$ .

Infatti, due eventuali punti dell'intersezione sarebbero contemporaneamente comparabili ed incomparabili! Ne segue che se un poset  $P$  ha una catena (un'anticatena) di cardinalità  $h$ , allora  $P$  non può essere decomposto in meno di  $h$  anticate (rispettivamente catene). Quanto appena enunciato è un risultato ottimale. Un'implicazione è immediata.

**Proposizione 2.5.** *Sia  $m$  la massima cardinalità di una catene di un poset finito  $P$ . Allora  $P$  può essere ripartito in  $m$  anticate.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , indichiamo con  $A_i$  l'insieme degli elementi  $x \in P$  tali che le più grandi catene di  $P$  aventi  $x$  come elemento massimo, sono di lunghezza  $i$  (incluso nel conteggio anche il punto  $x$ ). Per ipotesi abbiamo che  $A_i = \emptyset$  se  $i \geq m + 1$ , mentre ogni  $x \in P$  appartiene ad un'unica  $A_i$  per qualche  $i$ . Pertanto  $P$  è unione disgiunta degli  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Inoltre ogni  $A_i$  è un'anticatena. Se infatti  $x, y \in A_i$  e  $x < y$ , allora presa una catena di lunghezza massima che termina in  $x$ , diciamo

$$x_1 < \dots < x_i = x$$

e prolungata a destra con  $y$ , otteniamo una catena di lunghezza  $i + 1$  che termina in  $y$ , contraddicendo il fatto che  $y \in A_i$ . ■

Il risultato duale non è così immediato e prende il nome di Teorema di decomposizione di Dilworth. Esistono diverse dimostrazioni; quella che presentiamo è dovuta a F. Galvin.

**Teorema 2.6** (Dilworth Decomposition Theorem, 1950). *Sia  $P$  un poset finito; allora  $P$  può essere ripartito in  $\alpha(P)$  catene disgiunte.*

DIMOSTRAZIONE. [Galvin, 1994]

Poniamo  $m = \alpha(P)$  e facciamo induzione su  $|P|$ . Sia  $a$  un elemento massimale di  $P$  e sia  $P' := P \setminus \{a\}$ . Se la più grande anticatena di  $P'$  contiene  $m - 1$  elementi, allora per induzione  $P'$  è decomponibile con  $m - 1$  catene disgiunte:  $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$ . Pertanto posto  $C_m = \{a\}$  si trova una decomposizione di  $P$  in  $m$  catene disgiunte. Possiamo pertanto assumere che la cardinalità della più grande anticatena in  $P'$  sia  $m$ , e che  $P'$  sia unione disgiunta delle  $m$  catene:  $C_1, \dots, C_m$ . Ora ogni anticatena di  $m$  elementi di  $P'$  contiene esattamente un unico elemento di ogni  $C_i$ . Per ogni  $i$  sia  $a_i$  il più grande elemento di  $C_i$  che appartiene a qualche anticatena di  $P'$  avente cardinalità  $m$ . Detto  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  è immediato vedere che  $A$  è un'anticatena di  $P'$ . Poiché  $P$  non possiede anticate di cardinalità  $> m$ , esiste un certo  $i$  per cui  $a > a_i$  (essendo  $a$  un elemento massimale di  $P$ ). Sia allora  $K = \{a\} \cup \{x \in C_i \mid x \leq a_i\}$ . È facile vedere che  $K$  è una catena di  $P$ . Inoltre in  $P \setminus K$  non esistono anticate costituite da  $m$  elementi, poiché  $a_i$  è un elemento massimale di  $C_i$  rispetto a tale proprietà). Ne segue che  $P \setminus K$  è unione di  $m - 1$  catene. Aggiungendo a queste la catena  $K$ , si trova una decomposizione di  $P$  in  $m$  catene. ■

Come immediato corollario di quanto detto, abbiamo

**Corollario 2.7.** *Sia  $(P, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato finito. Allora il minimo numero di catene disgiunte la cui unione è  $P$  coincide con  $\alpha(P)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\ell$  il minimo numero di catene disgiunte necessarie per ricoprire  $P$ . Il Teorema precedente prova che  $\ell \leq \alpha(P)$ .

Viceversa, date  $C_1, C_2, \dots, C_\ell$ , catene disgiunte che formano una ripartizione degli elementi

di  $P$ , allora ogni anticatena  $A$  di  $P$  interseca al più in un solo punto ogni  $C_i$ . Quindi per ogni anticatena  $A$  vale che  $|A| \leq \ell$ ; ne segue che  $\alpha(P) \leq \ell$ . ■

Il Teorema di Dilworth è un teorema potente; lo applicheremo, ad esempio, per una quasi immediata dimostrazione di uno dei risultati principali della sezione 3.3.

Una domanda naturale è se e in quali termini il Teorema di Dilworth si possa estendere a poset infiniti. Più avanti (quando ne avremo gli strumenti: capitolo 6) dimostreremo il seguente

**Teorema 2.8** (Dilworth). *Sia  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ , e supponiamo che ogni anticatena del poset  $P$  abbia cardinalità al più  $k$ . Allora  $P$  può essere ripartito in  $k$  catene disgiunte.*

Di fatto, però, il Teorema di Dilworth non può essere esteso in maniera diretta quando la cardinalità massima di una anticatena non è finita: è stato provato infatti che per ogni cardinale infinito  $\kappa$  esiste un poset  $P$  con  $\alpha(P) = \aleph_0$  in cui le partizioni in catene hanno tutte cardinalità almeno  $\kappa$ .

Naturalmente, lo studio delle catene e delle decomposizioni è solo uno degli aspetti combinatorici significativi della teoria degli insiemi parzialmente ordinati. Ve ne sono altri, altrettanto importanti; in particolare sarebbe basilare lo studio della funzione di Möbius (una generalizzazione ad un generico poset del principio di “inclusione–esclusione”); si tratta però di un argomento che viene trattato in altri corsi (e le cui tecniche non adopereremo nel seguito) e quindi ci fermiamo qui.

**Esercizio 2.6.** Siano  $I_1, I_2, \dots, I_{r+1}$  intervalli chiusi della retta reale; si provi che esistono  $r + 1$  tali intervalli a due a due disgiunti, oppure ne esistono  $s + 1$  la cui intersezione è non banale.

**Esercizio 2.7.** Sia  $1 \leq m \in \mathbb{N}$ . Si provi che un poset infinito  $P$  in cui tutte le catene hanno cardinalità limitata da  $m$  può essere ripartito in  $m$  anticatene.

**Esercizio 2.8.** Sull'insieme  $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  si consideri la relazione d'ordine  $\leq$  definita ponendo, per ogni  $(a, b), (c, d) \in P$ ,  $(a, b) \leq (c, d)$  se  $a \leq c$  e  $b \leq d$ . Si provi che le anticatene del poset  $(P, \leq)$  sono tutte finite, ma hanno cardinalità arbitrariamente grande (quindi il poset  $(P, \leq)$  non si decompone in un numero finito di catene).

**Esercizio 2.9.** Dati due poset finiti  $(P, \leq)$  e  $(Q, \leq)$ , si consideri il prodotto  $P \times Q$  ordinato lessicograficamente (quindi  $(a, b) \leq (a', b') \Leftrightarrow a < a'$  oppure  $a = a'$  e  $b \leq b'$ ). Si provi che  $\alpha(P \times Q) = \alpha(P)\alpha(Q)$ .

**Esercizio 2.10.** Utilizzando il Lemma di Dilworth (Lemma 2.4) provare il risultato di Erdős-Szekeres. (Suggerimento: Data una sequenza  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  di  $n \geq rs + 1$  numeri reali distinti, definire la relazione  $\preceq$  su  $A$  se  $a_i \leq a_j$  e  $i \leq j$ .)

## 2.3 Geometrie finite

Quella delle geometrie finite è un'area molto vasta, distinta, e ben consolidata della combinatoria. In questo corso ci limiteremo solo all'impiego di alcuni dei suoi oggetti (come ad esempio i piani proiettivi) come esempi interessanti o modelli (in genere, si tratta di oggetti molto simmetrici). In questa sezione ci fermeremo quindi ad alcune definizioni di base, rinviando a testi specifici per qualsiasi tipo, anche minimo, di approfondimento.

### Spazi vettoriali finiti.

Sia  $q = p^m$  la potenza di un primo  $p$ . Come noto dal corso di Algebra, esiste - a meno di isomorfismo - uno ed un solo campo di ordine  $q$ , che denoteremo con  $\mathbb{F}_q$ . Per  $n \geq 1$ , con  $V(n, q)$  denoteremo lo spazio vettoriale  $n$ -dimensionale  $\mathbb{F}_q^n$ , sul campo  $\mathbb{F}_q$ . Quindi

$$|V(n, q)| = q^n.$$

L'insieme dei sottospazi di  $V(n, q)$  è in modo naturale un insieme parzialmente ordinato, che per molti versi assomiglia a quello dell'insieme delle parti (che discuteremo nella prossima sezione); per ogni  $0 \leq k \leq n$ , si usa il simbolo (spesso detto *di Gauss*)

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

per denotare il numero di sottospazi di dimensione  $k$  di  $V(n, q)$ . Così  $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$ , mentre

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (2.1)$$

Infatti, i sottospazi 1-dimensionali sono del tipo  $\mathbb{F}_q v$  con  $0 \neq v \in V(n, q)$ , ciascuno di essi contiene  $q - 1$  elementi non-nulli; poiché gli elementi non-nulli dell'intero spazio sono  $q^n - 1$ , si deduce la (2.1). In generale vale la seguente formula, che non dimostriamo (anche se la cosa non è difficile: vedi esercizio 2.11):

**Proposizione 2.9.** *Per ogni  $q$  potenza di un numero primo e  $0 \leq k \leq n$ , si ha*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdots (q - 1)}. \quad (2.2)$$

L'insieme dei sottospazi di  $V(n, q)$ , ordinato per inclusione, è un interessante insieme parzialmente ordinato (vedi, gli esercizi a partire dal 2.36), ma consente anche di definire in modo abbastanza naturale significativi esempi di grafi dotati di parecchia regolarità, considerando come insieme di vertici due 'livelli' di sottospazi di  $V(n, q)$  e assumendo per archi le coppie di sottospazi (una in ciascun livello) in cui uno è contenuto nell'altro. Si tratta di grafi bipartiti per la cui definizione precisa si veda l'esercizio 2.13.

### Piani proiettivi.

Sia  $\mathbb{K}$  un campo e  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ . Lo *spazio proiettivo  $n$ -dimensionale*  $PG(n, \mathbb{K})$  sul campo  $\mathbb{K}$  è definito a partire dai sottospazi dello spazio vettoriale  $V(n, \mathbb{K})$ , nel modo seguente:

- i punti di  $PG(n, \mathbb{K})$  sono i sottospazi 1-dimensionali dello spazio vettoriale  $V(n, \mathbb{K})$ , le rette proiettive i sottospazi 2-dimensionali di  $V(n, \mathbb{K})$ , i piani quelli di dimensione 3, etc. in generale un  $k$ -sottospazio proiettivo è un  $(k + 1)$ -sottospazio lineare di  $V(n, \mathbb{K})$ .

Quindi, in uno spazio proiettivo, ogni coppia di punti distinti appartiene ad un'unica retta, e due rette distinte e intersecanti giacciono in un unico piano, ma anche viceversa (diversamente dal caso lineare): due rette che appartengono allo stesso piano si intersecano.

A noi interessa il caso in cui il campo è un campo finito  $\mathbb{F}_q$ ; in tal caso si scrive  $PG(n, q)$  per  $PG(n, \mathbb{F}_q)$ . Da quanto riportato nel caso lineare, si ha:

- $PG(n, q)$  contiene  $\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = (q^{n+1}-1)/(q-1)$  punti,  $\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}_q$  rette, ciascuna delle quali contiene  $(q^2-1)/(q-1) = q+1$  punti, e in generale, per  $1 \leq k \leq n$ ,  $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q$  sottospazi proiettivi  $k$ -dimensionali.

In particolare, lo spazio proiettivo 2-dimensionale  $GF(2, q)$  è composto da  $(q^3-1)/(q-1) = q^2+q+1$  punti e da un uguale numero di rette, ogni retta contiene  $q+1$  punti ed ogni punto appartiene a  $q+1$  rette. Il caso più piccolo,  $PG(2, 2)$ , detto *piano di Fano*, è rappresentato nella figura 2.1: i punti sono i vertici numerati e le rette i sei segmenti (lati e mediane) ed il circolo centrale.

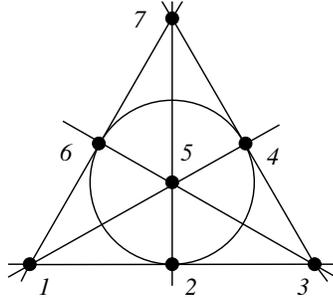


Figura 2.1: il piano di Fano

Negli spazi proiettivi l'eventuale componente metrica è messa in secondo piano rispetto alle proprietà di incidenza tra sottospazi, inclusi i punti (questo è ancora più ovvio nel caso finito: la figura di sopra mostra il potenziale 'grafico' degli spazi proiettivi finiti). Di fatto, le proprietà che - in un senso che non precisiamo - caratterizzano da questo punto di vista gli spazi proiettivi  $PG(n, \mathbb{K})$  sono assunti come assiomi nella definizione di oggetti combinatori chiamati *geometrie proiettive*. Qui, ci limitiamo ad una brevissima introduzione al caso (che in effetti è per certi versi il più problematico) 2-dimensionale.

**Definizione.** Un *piano proiettivo* (combinatorio) è una coppia  $(P, \mathcal{L})$  dove  $P$  è un insieme, detto insieme dei *punti* del piano e  $\mathcal{L}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $P$  dette *rette* tale che:

(p1) ogni coppia di punti distinti è contenuta in una ed una sola retta (nel linguaggio tecnico: per ogni coppia di punti c'è una ed una sola retta incidente ad entrambi);

(p2) due rette distinte si intersecano in uno ed un solo punto (rette distinte sono incidenti ad uno e un solo punto);

(p3) esistono quattro punti tali che nessuna retta ne contiene più di due.

Ogni spazio proiettivo  $PG(2, q)$  è dunque un piano proiettivo combinatorio. Viceversa, sia  $(P, \mathcal{L})$  un piano proiettivo finito, e sia  $\ell \in \mathcal{L}$ ; allora per l'assioma (p3) esiste un punto  $P \notin \ell$ , e gli altri due assiomi implicano che il numero di rette incidenti a  $P$  coincide con il numero di punti incidenti in  $\ell$ . Ne segue che ogni retta in  $\mathcal{L}$  contiene lo stesso numero di punti; si

denota questo numero con  $q + 1$ , dove  $q$  è detto *l'ordine* del piano proiettivo: allora ogni punto è incidente ad esattamente  $q + 1$  rette, e si ha  $|P| = |\mathcal{L}| = q^2 + q + 1$ .

Se  $q$  è una potenza di un primo, allora  $PG(2, q)$  è un piano proiettivo, si ha quindi che

- Per ogni  $q$  potenza di un numero primo, esiste un piano proiettivo di ordine  $q$ .

La domanda naturale, a questo punto, è se gli spazi  $PG(2, q)$ , con  $q$  potenza di primo, siano i soli piani proiettivi. La risposta è negativa: il più piccolo ordine per cui esistono diversi piani proiettivi (quindi non tutti ottenibili come spazi  $GP(2, q)$ ) è  $q = 9$ , per il quale esistono 4 piani proiettivi non isomorfi (per  $q = 16$  ce ne sono 22, etc.).

La questione si sposta allora sull'ordine: *è vero che l'ordine di un piano proiettivo è sempre la potenza di un numero primo?* E se no, è possibile caratterizzare i numeri  $n \geq 2$  per cui esiste un piano proiettivo di ordine  $n$ ? Non si conosce ancora la risposta; il risultato generale di gran lunga più significativo è il Teorema di Bruck-Ryser del 1949.

**Teorema 2.10** (Bruck-Ryser). *Sia  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ ; se esiste un piano proiettivo di ordine  $n$ , allora  $n$  è la somma di due quadrati interi.*

Quindi, ad esempio, non esistono piani proiettivi di ordine 6, o 14. Il primo intero che non sia la potenza di un primo e che soddisfa la condizione del teorema è  $n = 10 = 1 + 3^2$ : la non esistenza di piani proiettivi di ordine 10 è stata provata negli anni '70 mediante un massiccio utilizzo del computer, mentre se esistono piani proiettivi il cui ordine è  $n = 12 \equiv 0 \pmod{4}$  rappresenta ancora un caso aperto. Così come è ancora aperta la questione se ogni piano proiettivo di ordine *primo*  $p$  sia del tipo  $PG(2, p)$

**Esercizio 2.11.** Siano  $1 \leq k \leq n$ ,  $q$  la potenza di un numero primo, e  $V = V(n, q)$ .

1. Si provi che il numero di  $k$ -uple  $(x_1, \dots, x_k) \in V^k$  costituite da vettori linearmente indipendenti è:

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1});$$

2. osservato che il numero di tali  $k$ -uple i cui elementi appartengono allo stesso sottospazio  $k$ -dimensionale è  $(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})$ , si deduca la formula (2.2).

**Esercizio 2.12.** Sia  $0 \leq k \leq n$ , e  $q$  la potenza di un numero primo. Si provi che

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q.$$

Sapete darne una dimostrazione che usi l'algebra lineare (piuttosto che il confronto di due frazioni algebriche)?

**Esercizio 2.13.** Dati  $0 \leq t < k \leq n$  e  $q$  la potenza di un numero primo, denotiamo con  $\mathcal{S}_t$  e  $\mathcal{S}_k$ , rispettivamente, l'insieme dei sottospazi di dimensione  $t$  e quello dei sottospazi di dimensione  $k$  dello spazio vettoriale  $V(n, q)$ . Sia  $\Gamma_{t,k}$  il grafo il cui insieme di vertici è  $\mathcal{S}_t \cup \mathcal{S}_k$  e  $\{U, U'\}$  è un arco se e solo se  $U \in \mathcal{S}_t$ ,  $U' \in \mathcal{S}_k$  e  $U \leq U'$ .

1. Osservato che  $\Gamma_{t,k}$  è un grafo bipartito si determini il numero dei suoi archi, ed il suo diametro (dipende dalla relazione tra  $t$  e  $k$ ).

2. Si provi che  $\Gamma_{t,k}$  è regolare se e soltanto se  $t + k = n$ .

**Esercizio 2.14.** Si provi che gli spazi proiettivi  $PG(2, q)$  ( $q$  la potenza di un primo) soddisfano il *Teorema di Desargues*: Siano  $a, a', b, b', c, c'$  punti tali che  $\{a, b, c\}$  e  $\{a', b', c'\}$  sono triangoli (cioè i punti non sono allineati) e le rette  $aa', bb'$  e  $cc'$  siano incidenti uno stesso punto: allora i punti intersezione  $ab \cap a'b', bc \cap b'c', ca \cap c'a'$  sono allineati. (Di fatto, si può dimostrare che un piano proiettivo (combinatorio) è del tipo  $PG(2, q)$  se e solo se soddisfa il Teorema di Desargues).

**Esercizio 2.15.** Sia  $p$  un numero primo. Si provi che il piano proiettivo  $\mathcal{P} = PG(2, p^2)$  contiene un piano proiettivo di ordine  $p$  (esattamente: esiste un sottoinsieme  $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$  tale che  $|\mathcal{P}'| = p^2 + p + 1$  e considerando come le restrizioni a  $\mathcal{P}'$  delle rette in  $\mathcal{P}$  si ottiene un piano proiettivo).

## 2.4 Insieme delle parti.

In natura, tra gli esempi più egregi di insiemi parzialmente ordinati (finiti) vi sono l'insieme delle parti  $\mathcal{P}(X)$  di un insieme (finito)  $X$ , cioè l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di  $X$ , ordinato per inclusione; ed anche dal punto di vista combinatorio esso costituisce un fecondo terreno. In questa sezione diamo solo alcuni risultati fondamentali di quella che si chiama *set combinatorics*; si tratterà anche in questo caso per lo più di questioni e di risultati di natura *estremale*.

Sia  $X$  un insieme finito. Col termine di *famiglia di insiemi* intenderemo un sottoinsieme  $\mathcal{F}$  di  $\mathcal{P}(X)$ , ovvero una collezione di sottoinsiemi di  $X$ . La teoria estremale degli insiemi considera famiglie di insiemi che soddisfano a ben determinate restrizioni, con l'intento di dare una risposta alle questioni del tipo

- quanto può essere grande (o piccola) una siffatta famiglia,
- come possono essere descritte quelle famiglie che raggiungono tale limite (superiore o inferiore).

Come si osserverà, le restrizioni che, almeno in questa sezione, imporreemo alle famiglie di sottoinsiemi sono di tipo "binario", ovvero coinvolgono sempre solamente coppie di insiemi della famiglia.

### Famiglie di Sperner.

Una famiglia di Sperner in  $\mathcal{P}(X)$  non è altro che una antcatena del poset  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , dove  $\subseteq$  denota l'inclusione insiemistica. Quindi: una famiglia di insiemi  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  è una *famiglia di Sperner* se nessun membro di  $\mathcal{F}$  contiene propriamente un altro, ovvero se

$$A, B \in \mathcal{F} : A \neq B \implies A \not\subseteq B \text{ e } B \not\subseteq A.$$

Prima di entrare nel merito delle antcatene di  $\mathcal{P}(X)$ , una facile osservazione riguardante le catene, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Lemma 2.11.** *Sia  $X$  un insieme con  $n$  elementi. Allora*

- (i) ogni catena in  $\mathcal{P}(X)$  ha cardinalità al più  $n + 1$ ;
- (ii) ogni catena in  $\mathcal{P}(X)$  può essere estesa ad una catena (massimale) di cardinalità  $n + 1$ ;
- (iii)  $\mathcal{P}(X)$  contiene  $n!$  catene massimali distinte.

Esempi banali di famiglie di Sperner (anticatene) sono le famiglie  $k$ -uniformi, ovvero le famiglie  $X^{[k]}$ , costituite da tutti i sottoinsiemi di fissata cardinalità  $k$  (con  $0 \leq k \leq n = |X|$ ). Una tale famiglia è costituita da esattamente  $\binom{n}{k}$  membri. Poiché i coefficienti binomiali crescono verso il ‘centro’ e poi decrescono, si ha che la più grossa famiglia di Sperner di questo tipo è quella per  $k = n/2$ , se  $n$  è pari, e  $k = (n - 1)/2$  o  $k = (n + 1)/2$ , se  $n$  è dispari. Il Teorema di Emanuel Sperner del 1928 prova che queste sono proprio le più grosse antiscatene di  $\mathcal{P}(X)$  senza restrizioni.

**Teorema 2.12** (Sperner 1928). *Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di Sperner di sottoinsiemi di un insieme  $X$  di cardinalità  $n$ . Allora*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

*Inoltre se vale l’uguaglianza,  $\mathcal{F}$  consiste o di tutti i sottoinsiemi di  $X$  di cardinalità  $\lfloor n/2 \rfloor$ , o di tutti i sottoinsiemi di  $X$  di cardinalità  $\lceil n/2 \rceil$  (i due numeri coincidono se  $n$  è pari).*

Dunque, se  $n = 2m$  è pari c’è una sola famiglia di Sperner di cardinalità massima che è  $X^{[m]}$ , mentre se  $n = 2m + 1$  è dispari  $X^{[m]}$  e  $X^{[m+1]}$  sono le due famiglie di Sperner di cardinalità massima. Deriveremo il Teorema di Sperner applicando il seguente risultato, che prende il nome di *disuguaglianza LYM* in quanto è stato provato indipendentemente dai tre matematici Lubell (nel 1966), Meshalkin (1963) e Yamamoto (1954).

**Teorema 2.13** (LYM Inequality). *Sia  $\mathcal{F}$  un’anticatena del poset  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , dove  $X$  è un insieme di  $n$  elementi. Allora*

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1. \quad (2.3)$$

DIMOSTRAZIONE. [Lubell]

Per ogni sottoinsieme  $A$  di  $X$  esistono esattamente  $|A|!(n - |A|)!$  catene massimali di  $\mathcal{P}(X)$  che contengono  $A$  (segue dal Lemma 2.11). Ora  $\mathcal{P}(X)$  ha  $n!$  catene massimali e nessuna di queste interseca la famiglia  $\mathcal{F}$  più di un volta, altrimenti  $\mathcal{F}$  non sarebbe un’anticatena. Ne segue che

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!(n - |A|)! \leq n!$$

Dividendo per  $n!$  si ha la tesi. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.12.

Per il Teorema 2.13, tenendo conto che  $\binom{n}{k}$  è massimizzato quando  $k = \lfloor n/2 \rfloor$ , abbiamo che

$$|\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1} \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1,$$

da cui segue che  $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

Ora se assumiamo che  $|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ , allora, riguardando i passaggi dimostrativi di sopra, dobbiamo avere che per ogni  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\binom{n}{|A|} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ , ovvero ogni membro  $A$  di  $\mathcal{F}$  ha cardinalità  $\lfloor n/2 \rfloor$  oppure  $n - \lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$ .

Se  $n$  è pari i due numeri coincidono ed  $\mathcal{F}$  consiste nella totalità degli  $\lfloor n/2 \rfloor$ -sottoinsiemi, e l'asserto è provato.

Se  $n$  è dispari, diciamo  $n = 2m + 1$ , bisogna fare un altro piccolo sforzo per mostrare che gli elementi di  $\mathcal{F}$  sono tutti quelli di cardinalità  $m$  oppure tutti quelli di cardinalità  $m + 1$ . Notiamo che quando il limite viene raggiunto, ogni catena massimale di  $\mathcal{P}(X)$  contiene esattamente un unico elemento di  $\mathcal{F}$ ; in particolare se  $A$  è un  $m$ -insieme e  $B$  un  $(m + 1)$ -insieme con  $A \subset B$ , allora  $A \in \mathcal{F}$  se e solo se  $B \notin \mathcal{F}$ . Supponiamo ora che  $A$  ed  $A'$  siano due distinti  $m$ -insiemi in  $X$ , e che sia  $A \in \mathcal{F}$ . Allora è possibile raggiungere  $A'$  tramite una successione del tipo

$$A \subset B_1 \supset A_1 \subset \dots \subset B_t \supset A',$$

dove ogni  $A_i$  è un  $m$ -insieme ed ogni  $B_j$  un  $(m + 1)$ -insieme. Seguendo tale successione abbiamo che tutti gli  $m$ -insiemi, per l'osservazione appena fatta, sono membri di  $\mathcal{F}$ . Poiché  $A'$  è stato scelto in modo arbitrario,  $\mathcal{F}$  consiste nella totalità degli  $m$ -sottoinsiemi di  $X$ . Similmente si ragiona nel caso in cui  $\mathcal{F}$  contenga un  $(m + 1)$ -insieme. ■

**Esercizio 2.16.** Si dimostri il Lemma 2.11.

**Esercizio 2.17.** Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia  $k$ -uniforme, e supponiamo che per ogni terna  $A, B, C \in \mathcal{F}$  valga  $A \cap B \not\subset C$ . Si provi che  $|\mathcal{F}| \leq 1 + \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$ .

## Il Teorema di Erdős - Ko - Rado.

**Intersecting Families.** Una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di un insieme  $X$  si dice *intersecante* (in inglese “*intersecting family*”) se

$$A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \neq \emptyset.$$

**Proposizione 2.14.** Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia intersecante di sottoinsiemi di  $X = \{1, \dots, n\}$ , allora  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dividiamo i  $2^n$  sottoinsiemi di  $X$  in  $2^{n-1}$  coppie complementari  $\{A, X \setminus A\}$ . Ovviamente ogni famiglia intersecante  $\mathcal{F}$  contiene al più un solo sottoinsieme per ogni coppia, e quindi  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ . ■

Diversamente dal caso delle famiglie di Sperner, esistono diversi tipi di famiglie intersecanti aventi la massima cardinalità  $2^{n-1}$ . Esempi banali sono i seguenti:

- le famiglie  $\mathcal{F}_j$  costituite da tutti e soli i sottoinsiemi contenenti un fissato  $j \in X$ .
- Se  $n$  è dispari la famiglia costituita da tutti i sottoinsiemi  $A$  di  $X$  di cardinalità  $> n/2$  (infatti come richiesto dalla dimostrazione della Proposizione 2.14, questa famiglia

contiene esattamente un solo elemento per ciascuna coppia di insiemi complementari). Nel caso  $n$  pari si può modificare la costruzione, prendendo tutti i sottoinsiemi di cardinalità  $> n/2$  e poi dividere gli insiemi di  $n/2$  elementi in coppie complementari e prendere in modo arbitrario per ciascuna coppia uno ed un solo insieme.

**Esercizio 2.18.** Sia  $X = \{1, \dots, 7\}$  e sia  $\mathcal{U}$  la collezione dei sette sottoinsiemi seguenti

$$\mathcal{U} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}.$$

Sia poi  $\mathcal{F}$  la famiglia dei sottoinsiemi di  $X$  che contengono almeno un membro di  $\mathcal{U}$ . Si provi che  $\mathcal{F}$  è intersecante e  $|\mathcal{F}| = 2^6$  (si tratta di una rappresentazione del piano proiettivo di ordine 2, come in Figura 2.1).

Esaminiamo ora un caso particolare di famiglie intersecanti, ovvero le famiglie intersecanti  $k$ -uniformi. Richiediamo cioè che  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  sia una famiglia intersecante, interamente costituita da sottoinsiemi aventi tutti la stessa cardinalità  $k$ ; in altri termini, chiediamo  $\mathcal{F} \subseteq X^{[k]}$ .

Prima di enunciare e provare il risultato fondamentale sulle famiglie intersecanti  $k$ -uniformi, facciamo qualche semplice osservazione generale riguardo l'azione del gruppo delle permutazioni di  $X$  sull'insieme delle parti  $\mathcal{P}(X)$ : infatti il gruppo simmetrico su  $X$  agisce in modo naturale sull'insieme delle parti

$$\text{se } A \in \mathcal{P}(X) \text{ e } \sigma \in \text{Sym}(X) : A^\sigma = \{a^\sigma \mid a \in A\},$$

e poiché ogni  $\sigma$  è biettiva  $|A| = |A^\sigma|$ ; dunque  $\text{Sym}(X)$  agisce su ciascun insieme  $X^{[k]}$  per ogni  $1 \leq k \leq |X|$ . Se  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  allora  $\text{Sym}(X) = S_n$  e per ogni  $1 \leq k \leq n$  l'azione di  $S_n$  su  $X^{[k]}$  è *transitiva*. In particolare, se  $A \in X^{[k]}$  e denotiamo con  $H$  lo stabilizzatore di  $A$  per l'azione di  $S_n$ , si ha

$$[S_n : H] = |X^{[k]}| = \binom{n}{k}$$

e di conseguenza

$$|H| = \frac{|S_n|}{[S_n : H]} = n! \binom{n}{k}^{-1} = k!(n-k)!$$

Poiché, se  $B = A^\sigma$  (con  $\sigma \in S_n$ ) allora  $\{\alpha \in S_n \mid A^\alpha = B\} = H\sigma$ , si ha subito il seguente fatto:

**Lemma 2.15.** *Sia  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , e siano  $A, B \in X^{[k]}$ . Allora il numero di permutazioni  $\alpha \in S_n = \text{Sym}(X)$  tali che  $A^\alpha = B$  è uguale a  $n!(n-k)!$ .*

Torniamo alla questione riguardo la famiglia intersecante  $\mathcal{F} \subseteq X^{[k]}$ . La domanda di base è: quanto può essere grande  $\mathcal{F}$ ?

Ovviamente assumiamo che sia  $|X| = n \geq 2k$ , altrimenti ogni coppia di  $k$ -insiemi ha intersezione non vuota, ed  $\mathcal{F}$  quindi può essere anche la totalità di tutti i  $k$ -sottoinsiemi di  $X$ , cioè  $|\mathcal{F}| = \binom{n}{k}$ .

**Teorema 2.16** (Erdős-Ko-Rado). *Sia  $\mathcal{F} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}^{[k]}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) una famiglia intersecante di  $k$ -sottoinsiemi dell'insieme  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Se  $n \geq 2k$ , allora*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

DIMOSTRAZIONE. (G. O. H. Katona, 1972)

Sia  $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  la famiglia dei  $k$ -intervalli

$$I_j = \{j, j+1, \dots, j+k-1\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$$

dove la numerazione è da intendersi modulo  $n$ .

Proviamo che per ogni famiglia intersecante  $\mathcal{A}$  di  $k$ -sottoinsiemi di  $\{1, 2, \dots, n\}$  vale

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{I}| \leq k.$$

Possiamo supporre  $\mathcal{A} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$ , anzi, a meno di rinumerare gli elementi di  $X$ , possiamo assumere che  $I_1 = \{1, 2, \dots, k\} \in \mathcal{A}$ . Dato che  $\mathcal{A}$  è intersecante, abbiamo

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{I}) \setminus \{I_1\} \subseteq \{I_2, I_3, \dots, I_k\} \cup \{I_{n-k+2}, \dots, I_n\}.$$

L'ipotesi  $n \geq 2k$  implica  $I_j \cap I_{n-k+j} = \emptyset$ , quindi, per ogni  $j \in \{2, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{I}$  contiene al più uno solo fra gli elementi  $I_j$  e  $I_{n-k+j}$ . Segue  $|(\mathcal{A} \cap \mathcal{I}) \setminus \{I_1\}| \leq k-1$  e dunque  $|\mathcal{A} \cap \mathcal{I}| \leq k$ .

Sia  $S_n$  il gruppo delle permutazioni di  $\{1, \dots, n\}$ , e consideriamo la sua azione su  $\{1, \dots, n\}^{[k]}$ , osservando che se  $\mathcal{F} \in \{1, \dots, n\}^{[k]}$  allora  $\mathcal{F}^\sigma$  è una famiglia intersecante per ogni  $\sigma \in S_n$ . Consideriamo l'insieme

$$\Omega := \{(\pi, j) \in S_n \times \{1, \dots, n\} \mid I_j^\pi \in \mathcal{F}\}.$$

Usiamo un doppio conteggio per calcolare  $|\Omega|$ . Da un lato,  $\Omega$  è l'unione disgiunta

$$\Omega = \bigsqcup_{\pi \in S_n} \Omega_\pi,$$

dove  $\Omega_\pi := \{(\pi, j) : j \in \{1, \dots, n\}, I_j^\pi \in \mathcal{F}\}$ . Ora, fissato un arbitrario  $\pi \in S_n$ , abbiamo che

$$|\Omega_\pi| = |\mathcal{F} \cap \mathcal{I}^\pi| = |\mathcal{F}^{\pi^{-1}} \cap \mathcal{I}| \leq k,$$

per quanto visto sopra, essendo  $\mathcal{F}^{\pi^{-1}}$  una famiglia intersecante. Segue pertanto che

$$|\Omega| = \sum_{\pi \in S_n} |\Omega_\pi| \leq k \cdot n! \tag{2.4}$$

D'altro canto,  $\Omega$  è anche l'unione disgiunta

$$\Omega = \bigsqcup_{j=1}^n \Omega_j,$$

con  $\Omega_j := \{(\pi, j) : \pi \in S_n, I_j^\pi \in \mathcal{F}\}$ . Posto  $m = |\mathcal{F}|$  e scritta  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ , si ha che, per ogni fissato  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\Omega_j = \bigsqcup_{i=1}^m \Omega_{j,i}$$

dove  $\omega_{j,i} = \{(\pi, j) : \pi \in S_n, I_j^\pi = F_i\}$ . Per il Lemma 2.15,  $|\Omega_{j,i}| = k!(n-k)!$  per ogni coppia  $j, i$ . Dunque

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\Omega_{j,i}| = m \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)! . \quad (2.5)$$

Confrontando con la (2.4) si ha

$$m \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)! \leq k \cdot n!$$

da cui segue la tesi. ■

**Osservazione:** Fissato  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , le famiglie

$$\mathcal{A}_i = \{A \in \{1, 2, \dots, n\}^{[k]} \mid i \in A\}$$

sono famiglie intersecanti di cardinalità massima:

$$|\mathcal{A}_i| = \binom{n-1}{k-1} .$$

Si può dimostrare che, se  $n > 2k$ , le  $\mathcal{A}_i$  sono le uniche famiglie intersecanti di cardinalità massima. Se  $n = 2k$ , invece, ve ne sono altre: si ottengono scegliendo uno ed un solo elemento fra  $A$  e  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus A$ , al variare di  $A \in \{1, 2, \dots, n\}^{[k]}$ .

Osserviamo che possono esistere famiglie intersecanti di  $k$ -sottoinsiemi che sono nel contempo sia massimali (ovvero, non ulteriormente estendibili a famiglie intersecanti  $k$ -uniformi), sia di cardinalità non massima: un esempio di tali famiglie è descritto nell'esercizio 2.19.

È possibile generalizzare il concetto di famiglia intersecante, richiedendo che per ogni  $A \neq B \in \mathcal{F}$  sia  $|A \cap B| \geq t$ , dove  $t$  è un prefissato intero positivo,  $t \leq k$ . Queste famiglie di insiemi vengono chiamate  $t$ -intersecanti. Se  $Y$  è un sottoinsieme di  $X$  di  $|Y| = t$ , allora prendendo tutti i  $k$ -sottoinsiemi di  $X$  contenenti  $Y$  si ottiene una famiglia  $k$ -regolare e  $t$ -intersecante di esattamente  $\binom{n-t}{k-t}$  membri. Il Teorema di Erdős-Ko-Rado nella sua formulazione più generale (che non dimostreremo) mostra che per  $n$  sufficientemente grande questo è il miglior risultato ottenibile.

**Teorema 2.17** (Erdős-Ko-Rado). *Dati  $k$  e  $t \leq k$ , esistono  $n_1$  ed  $n_2$  per cui valgono le seguenti affermazioni.*

1. Se  $n \geq n_1$ , ogni  $t$ -intersecante famiglia di  $k$ -sottoinsiemi di un insieme di  $n$  oggetti ha cardinalità al più  $\binom{n-t}{k-t}$ .

2. Se  $n \geq n_2$ , ogni  $t$ -intersecante famiglia di  $k$ -sottoinsiemi di un insieme di  $n$  oggetti di cardinalità esattamente  $\binom{n-t}{k-t}$  consiste di tutti i  $k$ -sottoinsiemi contenenti un prefissato  $t$ -sottoinsieme.

**Ipergrafi.** Lo studio di famiglie uniformi può essere visto come una estensione della teoria dei grafi. Questi sono definiti come coppie  $(V, E)$  con  $E \subseteq V^{[2]}$ , ovvero  $E$  una famiglia di 2-sottoinsiemi di  $V$ ; per  $1 \leq k$  si definisce allora  $k$ -ipergrafo una coppia  $(V, L)$  dove  $V$  è un insieme non vuoto e  $L \subseteq V^{[k]}$  è una famiglia di  $k$ -sottoinsiemi (che chiamiamo *blocchi*) di  $V$ . In questo senso,  $(V, V^{[k]})$  è un  $k$ -ipergrafo completo, e il Teorema di Erdős–Ko–Rado limita il numero di blocchi a due a due non disgiunti in un  $k$ -ipergrafo di ordine  $n$ . In genere, quando si parla di ipergrafi si tende a ricercare risultati che richiamino quelli della teoria dei grafi (un esempio piuttosto ingenuo - ma spero volutamente tale - di questo approccio per 3-ipergrafi si trova nella digressione alla sezione 3.3), mentre si parla di *set combinatorics* per Teoremi del tipo visto in questo capitolo.

**Esercizio 2.19.** Siano  $n = 7$  e  $k = 3$  e si provi che la famiglia delle rette proiettive del piano di Fano è intersecante massimale e di cardinalità non massima.

Più in generale, in un piano proiettivo d'ordine  $k - 1$ , si consideri la famiglia  $k$ -uniforme di tutte le  $n = k^2 - k + 1$  rette. Si provi che tale famiglia è intersecante massimale, ovvero è intersecante ed ogni  $k$ -insieme del piano, che interseca non banalmente ogni retta, deve necessariamente essere esso stesso una retta.

**Esercizio 2.20.** Sia  $X$  un insieme di cardinalità  $n$  e sia  $n \leq 2k$ . Sia  $A_1, \dots, A_m$  una famiglia di  $k$ -sottoinsiemi di  $X$  tali che per ogni  $i, j$ ,  $A_i \cup A_j \neq X$ . Mostrare che

$$m \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k}.$$

### Esempio: i grafi di Kneser.

Per non perdere del tutto di vista il nostro argomento principale, introduciamo a questo punto una classe di grafi molto studiata, quella appunto dei grafi di Kneser, i cui legami con il Teorema di Erdős–Ko–Rado sono immediati.

Siano  $1 \leq k < n$ , con  $n \geq 2k$ . Il grafo di Kneser  $K(n, k)$  è il grafo i cui vertici sono tutti i sottoinsiemi di cardinalità  $k$  dell'insieme  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  (quindi il numero dei vertici è  $\binom{n}{k}$ ), e due vertici sono adiacenti se e solo se la loro intersezione è vuota. Chiaramente,  $K(n, 1)$  coincide con il grafo completo  $K_n$ ; quindi i casi interessanti si hanno per  $k \geq 2$ , cosa che implicitamente assumeremo da qui in avanti.

Fissati  $n, k$  come sopra, sia  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $K = K(n, k)$  il grafo di Kneser: l'insieme dei vertici di  $K$  è quindi  $I^{[k]}$ . Sia  $\sigma \in I^{[k]}$  un vertice di  $K$ ; allora i vertici adiacenti a  $\sigma$  in  $K$  sono tutti e soli i sottoinsiemi di ordine  $k$  dell'insieme complementare  $I \setminus \sigma$ . Quindi il grado di  $\sigma$  è

$$d_K(\sigma) = \binom{n-k}{k}$$

che non dipende da  $\sigma$ . Dunque  $K$  è regolare di grado  $\binom{n-k}{k}$ . Poiché il numero dei vertici è  $\binom{n}{k}$ , concludiamo per (1.1) che il numero di archi di  $K = K(n, k)$  è

$$\frac{1}{2} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k}.$$

Il *Teorema di Erdős-Ko-Rado* assicura che i sottoinsiemi stabili del grafi  $K(n, k)$  hanno cardinalità al più  $\binom{n-1}{k-1}$ , ed assieme alla osservazione che lo segue, fornisce il valore esatto dell'indice di stabilità del grafo; precisamente:

$$\alpha(K(n, k)) = \binom{n-1}{k-1}.$$

Per completare un poco l'analisi di questa classe di grafi, studiamo ora il calibro  $g(K)$  di  $K = K(n, k)$ , con  $k \geq 2$ . Se  $n = 2k$ ,  $K$  è un insieme di  $\frac{1}{2} \binom{n}{k}$  archi a due a due non incidenti (cioè,  $K$  non è connesso, ed ogni componente connessa è composta da un solo arco) e non ha calibro. Se  $n \geq 3k$ , allora esistono tre elementi di  $I^{[k]}$  che sono a due a due disgiunti e che quindi costituiscono i vertici di un triangolo in  $K$ , dunque  $g(K) = 3$ .

Supponiamo ora  $2k + 1 < n < 3k$ . Consideriamo i seguenti elementi:  $\sigma_0 = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $\sigma_1 = \{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}$ ,  $\sigma_2 = \{2, \dots, k, 2k + 2\}$ ,  $\sigma_3 = \{k + 2, \dots, 2k, 2k + 1\}$ ; allora  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0$  sono i vertici di un ciclo di lunghezza 4 in  $K$ ; poichè in questo caso non esistono cicli di lunghezza 3 (dato che non esistono tre elementi di  $I^{[k]}$  a due a due disgiunti), si conclude che  $g(K) = 4$ .

Sia, infine,  $n = 2k + 1$ . Se  $k = 2$ ,  $K$  è il grafo di Petersen ed ha calibro 5. Sia quindi  $k \geq 3$ . Si verifica allora che  $K$  non ha cicli di lunghezza 5 o meno (lo si dimostri per esercizio), e che i vertici

$$\begin{array}{lll} \{1, 2, \dots, k\}, & \{k + 2, \dots, 2k, 2k + 1\}, & \{2, \dots, k, k + 1\}, \\ \{1, k + 2, \dots, 2k\}, & \{2, \dots, k, 2k + 1\}, & \{k + 1, \dots, 2k\}, \end{array}$$

sono i vertici consecutivi di un 6-ciclo di  $K$ .

Riassumendo, abbiamo provato che, se  $n \geq 2k + 1$ ,

$$g(K(n, k)) = \begin{cases} 5 & \text{se } (n, k) = (5, 2) \\ 6 & \text{se } n = 2k + 1, k \geq 3 \\ 4 & \text{se } 2k + 1 < n < 3k \\ 3 & \text{se } n \geq 3k \end{cases} \quad (2.6)$$

Determinare il diametro dei grafi di Kneser è meno immediato; è stato provato che, per  $n > 2k$ ,

$$\text{diam}(K(n, k)) = \left\lceil \frac{k-1}{n-2k} \right\rceil + 1. \quad (2.7)$$

(ricordo che per ogni numero reale  $a$ ,  $\lceil a \rceil$  denota il minimo numero intero maggiore o uguale ad  $a$ ).

Per quanto riguarda il numero cromatico, ci fermiamo alla seguente limitazione. Sia ancora  $K = K(n, k)$  con  $n \geq 2k + 1$ , e  $V = \{1, 2, \dots, n\}^{[k]}$  l'insieme dei vertici di  $K$ . Per ciascun  $i = 1, \dots, n - 2k + 1$ , sia  $X_i = \{\sigma \in V \mid \min \sigma = i\}$ , e sia  $X_\infty = \{\sigma \in V \mid \min \sigma > n - 2k + 1\}$ ; quindi

$$V = X_1 \cup \dots \cup X_{n-2k+1} \cup X_\infty \quad (2.8)$$

(dove l'unione è disgiunta). Ora, per  $i = 1, \dots, n - 2k + 1$ , ogni elemento di  $X_i$ , visto come sottoinsieme di  $\{1, 2, \dots, n\}$ , contiene  $i$  e dunque  $X_i$  è stabile; lo stesso è vero per  $X_\infty$ , infatti  $X_\infty$  coincide con l'insieme dei sottoinsiemi di ordine  $k$  dell'insieme  $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$ , la cui cardinalità è  $2k - 1$ ; pertanto ogni coppia di elementi di  $X_\infty$  ha intersezione non banale, e dunque  $X_\infty$  è stabile. Quindi la partizione (2.8) è in sottoinsiemi stabili; assegnando un colore ad ognuno di essi si ottiene una colorazione di  $K$ . In conclusione,

$$\chi(K) \leq n - 2k + 2. \quad (2.9)$$

Che il numero cromatico di  $K(n, k)$  sia effettivamente  $n - 2k + 2$  fu congetturato da Kneser nel 1955, è stato provato da Lovasz nel 1972, e la dimostrazione è tutt'altro che banale.

I grafi di Kneser e le loro generalizzazioni sono tuttora un attivo oggetto di studio. In particolare, è ancora aperta la congettura che (per  $n \geq 2k + 1$ ), ogni grafo di Kneser, con l'esclusione del grafo di Petersen  $K(5, 2)$ , è hamiltoniano (questo fatto è stato provato per  $n \geq 3k$ ).

### Diseguaglianza di Fisher.

Concludiamo questa sezione esaminando il caso di famiglie intersecanti  $\mathcal{H}$  di sottoinsiemi di  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  per le quali l'uniformità è richiesta per le intersezioni di elementi distinti di  $\mathcal{H}$ ; ovvero

$$A, B \in \mathcal{H} : A \neq B \Rightarrow |A \cap B| = t$$

per un fissato  $0 \leq t \leq n$ .

**Teorema 2.18** (Fisher, 1940). *Sia  $\mathcal{H}$  famiglia di sottoinsiemi di  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  tale che le intersezioni di due elementi distinti di  $\mathcal{H}$  abbiano la stessa cardinalità; allora  $|\mathcal{H}| \leq n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $0 \leq t \leq n$  tale che  $|A \cap B| = t$  per ogni  $A, B \in \mathcal{H}$  e  $A \neq B$ . Se  $t = 0$  la tesi è ovvia. Assumiamo quindi  $t \geq 1$ . Chiaramente  $|A| \geq t$  per ogni  $A \in \mathcal{H}$ .

Se esiste  $A \in \mathcal{H}$  con  $|A| = t$  allora  $A \subseteq B$  per ogni  $B \in \mathcal{H}$  e gli insiemi  $B \setminus A$  al variare di  $B \in \mathcal{H}$  sono a due a due disgiunti. Dunque  $|\mathcal{H}| \leq 1 + (n - t) \leq n$ .

Supponiamo quindi  $|A| > t$  per ogni  $A \in \mathcal{H}$ , e per ogni tale  $A$  sia  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  la sua funzione caratteristica, che vediamo come un vettore non-nullo nello spazio  $\mathbb{R}^n$ , osservando che, se  $A, B \in \mathcal{H}$ , allora

$$\langle \chi_A, \chi_B \rangle = |A \cap B|.$$

Mostriamo che l'insieme  $\{\chi_A \mid A \in \mathcal{H}\}$  è indipendente in  $\mathbb{R}^n$ . Siano, per ogni  $A \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda_A \in \mathbb{R}$  tali che

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \lambda_A \chi_A = 0.$$

Poniamo  $M = \sum_{A \in \mathcal{H}} \lambda_A$ . Allora, per ogni  $B \in \mathcal{H}$ ,

$$0 = \left\langle \sum_{A \in \mathcal{H}} \lambda_A \chi_A, \chi_B \right\rangle = \sum_{A \in \mathcal{H}} \lambda_A |A \cap B| = \lambda_B |B| + \sum_{B \neq A \in \mathcal{H}} \lambda_A t = \lambda_B (|B| - t) + Mt.$$

Se  $M \neq 0$  segue che, per ogni  $B \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda_B$  e  $M$  hanno segno opposto; cosa che non è possibile. Dunque  $M = 0$ ; ma allora  $\lambda_B = 0$  per ogni  $B \in \mathcal{H}$ , provando così che  $\{\chi_A \mid A \in \mathcal{H}\}$  è un insieme linearmente indipendente in  $\mathbb{R}^n$ . Pertanto  $|\mathcal{H}| \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$ . ■

## 2.5 Esercizi.

**Esercizio 2.21.** Si trovi un grafo  $G$  con 8 vertici e diametro 4 che ha il massimo numero di lati. Si provi che  $G$  è unico a meno di isomorfismo.

**Esercizio 2.22.** Sia  $G$  un grafo con 10 vertici e  $q$  lati. Si dica qual è il massimo valore possibile per  $q$ , in modo che:

- i)  $G$  non contenga triangoli.
- ii)  $G$  contenga esattamente un triangolo;
- iii)  $G$  contenga esattamente due triangoli;

**Esercizio 2.23.** Sia  $S = (a_1, \dots, a_n)$  una sequenza di numeri reali (non necessariamente distinti), e sia  $n \geq rst + 1$  (con  $r, s, t$  interi positivi). Si provi che esiste o una sottosequenza strettamente crescente di lunghezza  $r$ , o una strettamente decrescente di lunghezza  $s$ , oppure una sottosequenza composta da  $t$  termini tutti uguali tra loro.

**Esercizio 2.24.** Sia  $E$  un insieme di  $n$  intervalli chiusi di  $\mathbb{R}$ . Si provi che  $E$  contiene almeno  $\sqrt{n}$  intervalli a due a due disgiunti oppure  $\sqrt{n}$  intervalli che contengono tutti uno stesso elemento di  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.25.** Sia  $q$  la potenza di un numero primo e  $n \geq 1$ . Sia  $\mathcal{S}_{(n,q)}$  l'insieme di tutti i sottospazi dello spazio vettoriale  $V(n, q) = \mathbb{F}_q^n$ . Si provi che

$$|\mathcal{S}| \geq q^{\lfloor n^2/4 \rfloor}.$$

**Esercizio 2.26.** Sia  $X$  un insieme con  $n$  elementi, e si consideri il grafo il cui insieme di vertici è  $\mathcal{P}(X)$ , e due vertici distinti  $A, B$  sono adiacenti se  $|A \Delta B| = 1$ . Si provi che tale grafo è isomorfo all'ipercubo  $Q_n$ .

**Esercizio 2.27.** Siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  numeri reali  $\geq 1$ , e sia

$$S := \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_i \in \{-1, +1\}\}.$$

Si provi che per ogni intervallo reale  $I = [a, b)$  con  $b - a = 2$  si ha

$$|I \cap S| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

**Esercizio 2.28.** Un *quasifiltro* su un insieme  $X$  è una famiglia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  tale che

- $\mathcal{F}$  è chiusa superiormente (ovvero se  $A \in \mathcal{F}$  e  $A \subseteq B$  allora  $B \in \mathcal{F}$ ), e
- per ogni sottoinsieme  $A$  di  $X$ , esattamente una sola delle seguenti condizioni si verifica:  $A \in \mathcal{F}$  oppure  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ .

Si provi che ogni famiglia intersecante è contenuta in un quasifiltro, e che  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  è un quasifiltro se e soltanto se  $\mathcal{F}$  è una famiglia intersecante massimale.

**Esercizio 2.29.** Sia  $n \geq 5$  e  $A$  un sottoinsieme di archi del grafo completo  $K_n$  tale che ogni due archi in  $A$  hanno almeno un vertice in comune. Si provi (senza usare il Teorema di Erdős-Ko-Rado) che  $|A| \leq n - 1$  e che se  $|A| = n - 1$  allora  $A$  è l'insieme di tutti gli archi incidenti un vertice.

**Esercizio 2.30.** Sia  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , e sia  $t(n)$  la massima cardinalità di una famiglia 3-uniforme  $\mathcal{T}$  di sottoinsiemi di  $X$  (cioè  $\mathcal{T} \subseteq X^{[3]}$ ) per cui vale

$$A, B \in \mathcal{T} : A \neq B \Rightarrow |A \cap B| = 1.$$

1. Si provi che  $t(6) = 4$ ,  $t(7) = 7$ , e  $t(n) = 7$  per ogni  $7 \leq n \leq 14$ ;
2. per  $n \geq 15$  si ha  $t(n) = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$  e la famiglia massima  $\mathcal{T}$  è costituita da triangoli che contengono uno stesso vertice.

**Esercizio 2.31.** Sia  $V$  un insieme finito e  $(V, L)$  un 3-ipergrafo (cioè  $L \subseteq V^{[3]}$ ); sia  $n = |V|$  e chiamiamo blocchi gli elementi di  $L$ . Si supponga che per ogni  $b, b' \in L$  con  $b \neq b'$  si abbia  $|b \cap b'| \leq 1$  (un ipergrafo con questa proprietà è detto *lineare*). Si provi che

$$|L| \leq \frac{n(n-1)}{6}.$$

Si osservi che il limite è esatto se  $n = 7$ , si usi questo fatto come base per l'induzione e si provi che il limite è esatto per ogni  $n \equiv 1 \pmod{6}$ .

**Esercizio 2.32.** Si provi che il grafo di Kneser  $K(5, 2)$  è isomorfo al grafo di Petersen.

**Esercizio 2.33.** Si provi che il grafo di Kneser  $K(6, 2)$  ha numero cromatico 4.

**Esercizio 2.34.** Sia  $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k$  e  $K = K(n, k)$  il grafo di Kneser. Si provi che il gruppo simmetrico  $S_n$  (su  $n$  oggetti) è isomorfo ad un sottogruppo di  $\text{Aut}(K)$  (di fatto si può provare che, se  $n \geq 2k + 1$ , allora  $\text{Aut}(K) = S_n$ ).

**Esercizio 2.35.** Sia  $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k$  e  $K = K(n, k)$  il grafo di Kneser. Si provi che

1.  $\text{diam}(K) = 2$  se e solo se  $n \geq 3k - 1$ ;
2. se  $n \geq 2k + \lfloor k/2 \rfloor$  allora  $\text{diam}(K) \leq 3$ .

*Famiglie intersecanti di sottospazi.* Nei seguenti esercizi,  $\mathbb{F}_q$  è il campo con  $q$  elementi ( $q$  la potenza di un primo),  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{F}_q$ , e  $\mathcal{S}(V)$  l'insieme dei sottospazi di  $V$  ordinato per inclusione.

**Esercizio 2.36.** [catene in  $\mathcal{S}(V)$ ]. Sia  $n = \dim(V)$ . Osservato il fatto (piuttosto ovvio) che la massima lunghezza di una catena in  $\mathcal{S}(V)$  è  $n + 1$ , si provi che il numero di catene distinte di lunghezza massima in  $\mathcal{S}(V)$  è

$$\frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q - 1)}{(q - 1)^n}.$$

**Esercizio 2.37.** [LYM inequality e teorema di Sperner per sottospazi] Sia  $n = \dim V$  e  $\mathcal{F}$  una anticatena in  $\mathcal{S}(V)$  (cioè una famiglia di sottospazi di  $V$  a due a due non confrontabili).

1. (cfr la disuguaglianza ((2.3)) Si provi che

$$\sum_{W \in \mathcal{F}} \left[ \begin{matrix} n \\ \dim W \end{matrix} \right]_q^{-1} \leq 1.$$

2. Si provi che

$$|\mathcal{F}| \leq \left[ \begin{matrix} n \\ \lfloor n/2 \rfloor \end{matrix} \right]_q.$$

3. Si caratterizzino le antcatene di  $\mathcal{S}(V)$  il cui ordine è  $\left[ \begin{matrix} n \\ \lfloor n/2 \rfloor \end{matrix} \right]_q$ .

Anche il Teorema di Erdős–Ko–Rado si generalizza al caso di sottospazi. Per semplicità, vediamo solo il caso particolare in cui la dimensione dei sottospazi divide quella dello spazio ambiente. Per la dimostrazione seguiremo, con una serie di singoli esercizi, la traccia di quella di Katona per il teorema 2.16 (questa famiglia di esercizi è destinato ai solutori particolarmente 'tenaci').

**Esercizio 2.38.** Sia  $V = \mathbb{F}_q^n$  spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo con  $q$  elementi, sia  $1 \leq k < n$  con  $k|n$ . Si provi che esiste una famiglia  $\mathcal{A}$  di  $k$ -sottospazi (cioè, sottospazi di dimensione  $k$ ) di  $V$ , tale che:

- $U \cap U' = \{0\}$  per ogni  $U, U' \in \mathcal{A}$ ,  $U \neq U'$ ,
- $|\mathcal{A}| = (q^n - 1)/(q^k - 1)$ .

[sugg.: Vedere  $V$  come spazio vettoriale di dimensione  $n/k$  su un campo di ordine  $p^k \dots$ ]

**Esercizio 2.39.** Sia  $G = GL(V)$  il gruppo di tutti gli automorfismi (applicazioni lineari invertibili) della spazio  $V$  (come spazio vettoriale su  $\mathbb{F}_q$ ,  $G$  è quindi rappresentabile come l'insieme della matrici quadrate invertibili di ordine  $n$  a coefficienti in  $\mathbb{F}_q$ ). Si provi che  $G$  è transitivo sull'insieme dei  $k$ -sottospazi di  $V$  (qui che  $k$  divida  $n$  non è essenziale). Dedurre che il numero di elementi  $\phi \in G$  tali che  $\phi(U) = U'$  è uguale a  $|G| \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q^{-1}$ .

**Esercizio 2.40.** Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia intersecante di  $k$ -sottospazi di  $V$ , con  $k$  che divide  $n = \dim V$ . Si provi che

$$|\mathcal{F}| \leq \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q.$$

[sugg.: Sia  $\mathcal{A}$  la famiglia di  $k$ -sottospazi individuata nell'esercizio 2.38; allora ogni famiglia intersecante di  $k$ -sottospazi di  $V$  interseca  $\mathcal{A}$  in al più un elemento. Si segua quindi la dimostrazione del Teorema 2.16, utilizzando l'esercizio 2.39]

## Capitolo 3

# Alcune classi di grafi

Questo capitolo è un'introduzione a tre importanti classi di grafi: gli alberi, i grafi planari ed i grafi bipartiti. Si tratta di tipi di grafi che hanno un molteplice interesse nelle applicazioni, per cui esporremo anche alcuni semplici ma importanti algoritmi che li riguardano.

### 3.1 Alberi.

Ricordiamo che un **albero** è un grafo connesso *privo di circuiti non banali* (il che equivale all'essere connesso e privo di cicli). Un grafo privo di cicli (ma non necessariamente connesso) si chiama una **foresta**. Una foresta è dunque un grafo in cui ogni componente connessa è un albero.

Iniziamo lo studio degli alberi ricordando il lemma 1.4, che afferma che un albero, che non sia costituito da un solo vertice isolato, possiede almeno due vertici di grado 1. Tra i grafi connessi, gli alberi sono caratterizzati da una semplice proprietà numerica.

**Teorema 3.1.** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso. Allora  $G$  è un albero se e soltanto se  $|E| = |V| - 1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso. Se  $G$  non è un albero,  $G$  contiene un circuito non banale. Sia  $e$  uno dei lati di un fissato circuito di  $G$ ; allora il sottografo  $G' = G - e$  è connesso (infatti, da un cammino in  $G$  che congiunga i vertici  $u$  e  $v$  e contenga il lato  $e$ , si può ricavare un cammino da  $u$  a  $v$  che non utilizza  $e$  semplicemente percorrendo, al punto giusto, invece di  $e$ , una parte del resto del circuito a cui  $e$  appartiene). Dunque, per la Proposizione 1.3, il numero di lati di  $G'$  è maggiore o uguale al numero dei suoi vertici meno 1, cioè  $|E \setminus \{e\}| \geq |V| - 1$ , da cui  $|E| > |V| - 1$ . Viceversa, supponiamo che  $G$  sia un albero, e proviamo l'uguaglianza dell'enunciato per induzione sul numero  $n$  di vertici di  $G$ . Se  $n = 1$  non c'è nulla da provare. Sia dunque  $n \geq 2$ . Per il Lemma 1.4,  $G$  ha almeno un vertice  $v$  di grado 1; sia  $e$  il solo lato di  $G$  incidente a  $v$ , e consideriamo il sottografo  $G - v$ . Chiaramente  $G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\})$  è ancora un albero, e dunque, per ipotesi induttiva,  $|E \setminus \{e\}| = |V \setminus \{v\}| - 1$ , da cui si ricava  $|E| = |V| - 1$ . ■

Poiché una foresta  $G$  è priva di circuiti, ogni sua componente connessa è un albero, e dunque, per il Teorema 3.1 contribuisce con 1 al valore di  $|V| - |E|$ . Pertanto abbiamo il seguente

**Corollario 3.2.** *Sia  $G = (V, E)$  una foresta. Allora, il numero di componenti connesse di  $G$  è  $|V| - |E|$ .*

Si possono dare altre utili caratterizzazioni degli alberi, che non sono difficili da provare. Alcune sono suggerite dalla proposizione seguente.

**Proposizione 3.3.** *Sia  $G$  un grafo. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i)  $G$  è un albero;
- (ii) per ogni coppia di vertici di  $G$  esiste uno ed un solo cammino che li congiunge;
- (iii)  $G$  è connesso e, per ogni suo lato  $e$ ,  $G - e$  è non-connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sia  $G$  un albero, e siano  $u, v$  vertici distinti di  $G$ . Poiché  $G$  è connesso, esiste un cammino  $\mathcal{C} : u = v_0 e_1 v_1 \dots v_{d-1} e_d v_d = v$ . Osserviamo che, poiché  $G$  non ha cicli non banali,  $\mathcal{C}$  è semplice. Supponiamo, per assurdo, che  $\mathcal{C}' : u = w_0 f_1 w_1 f_2 w_2 \dots$  sia un altro cammino da  $u$  a  $v$ , distinto da  $\mathcal{C}$ . Allora esiste un minimo indice  $i = 1, \dots, d$  tale che  $e_i \neq f_i$  (e quindi  $v_i \neq w_i$ ), ed un minimo  $j > i$  tale che  $v_j \in \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots\}$ . Ma allora  $G$  conterrebbe un circuito non banale che inizia e termina in  $v_{i-1}$ , il che è contro l'ipotesi.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Sia  $G$  un grafo che soddisfa (ii), e sia  $e = \{u, v\}$  un lato di  $G$ . Se  $G - e$  fosse connesso, allora esisterebbe un cammino da  $u$  a  $v$  che non utilizza il lato  $e$ , dunque ci sarebbero due cammini distinti tra  $u$  e  $v$ , che è assurdo.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Sia  $G$  un grafo che soddisfa (iii). Allora  $G$  è connesso per ipotesi. Supponiamo che  $G$  contenga un circuito non banale, e sia  $e$  un lato di tale circuito. Allora  $G - e$  è connesso, che è contro l'ipotesi. ■

**Spanning Trees.** Sia  $G$  un grafo: uno **spanning-tree** di  $G$  è un sottografo  $A$  che è un albero ed il cui insieme dei vertici coincide con quello di  $G$  (quindi  $A$  è un fattore di  $G$ ). La figura 3.3 mostra alcuni spanning-trees di uno stesso grafo. È chiaro che uno spanning-tree non è univocamente individuato, nemmeno a meno di isomorfismo; anzi, in molte applicazioni (come vedremo tra poco) ci si pone il problema di trovare, dato un grafo, degli spanning-trees "migliori" di altri.

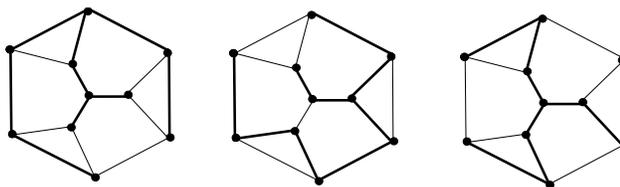


Figura 3.1: spanning trees di un stesso grafo

**Proposizione 3.4.** *Ogni grafo connesso ammette almeno uno spanning-tree.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso, e sia  $T = (S, E')$  un sottoalbero di  $G$  con il massimo numero possibile di lati (certamente, un tale  $T$  esiste). Proviamo che  $S = V$  e dunque che  $T$  è uno spanning-tree di  $G$ . Poiché  $T$  è un albero,  $|S| = |E'| + 1$ . Supponiamo, per assurdo,  $S \neq V$ ; allora, poiché  $G$  è connesso, esiste un lato  $e = \{v, w\}$  di  $G$  tale che  $v \in S$  e  $w \notin S$ . Ma allora il sottografo  $T' = (S \cup \{w\}, E' \cup \{e\})$  è connesso, e, per il teorema 3.1, è

un albero dato che  $|S \cup \{w\}| = |S| + 1 = |E'| + 2 = |E' \cup \{e\}| + 1$ , e ciò va contro la scelta di  $T$ . ■

La dimostrazione che abbiamo dato della Proposizione 3.4 non è costruttiva, e non è la più intuitivamente semplice, ma ha il pregio di poter essere estesa a grafi connessi infiniti. Il solo vero problema, in tal caso, è quello dell'esistenza di un sottoalbero massimale, e questa può essere dedotta dal Lemma di Zorn. Nel caso di grafi finiti, una maniera più semplice è quella di partire dal grafo dato  $G$ : se  $G$  è un albero non c'è bisogno di far nulla; altrimenti  $G$  ha un circuito, e si considera allora il grafo ricavato da  $G$  togliendo uno dei lati di tale circuito, si ottiene così un grafo connesso  $G'$  che ha gli stessi vertici di  $G$  ed un lato in meno. Se  $G'$  è un albero siamo a posto; altrimenti si procede togliendo a  $G'$  un lato appartenente ad un circuito e così via: procedendo in questo modo si perviene dopo un numero finito di passi ad uno spanning-tree del grafo iniziale  $G$ . Un'altra maniera è quella, viceversa, di partire dal grafo privo di lati e con gli stessi vertici di  $G$  e di aggiungervi uno alla volta opportuni lati di  $G$  che non facciano chiudere un circuito. Spiegheremo meglio questo metodo affrontando un problema più elaborato, che introduciamo mediante un esempio.

Supponiamo che una banca di una grande città intenda realizzare una connessione tramite fibra ottica tra le sue diverse filiali: la situazione può essere schematizzata mediante un grafo, i cui vertici sono le filiali della banca, ed i lati le eventuali connessioni tra di esse che sarebbe effettivamente possibile realizzare nella pratica. Nella sua formulazione più semplice, il problema è quindi quello di trovare uno spanning-tree di tale grafo. Ma occorre considerare che il costo, preventivamente valutato, della realizzazione di ciascun ipotetico tratto di fibra ottica varia in dipendenza di diversi fattori (e non esclusivamente dalla sua lunghezza: attraversare una strada a grande scorrimento può essere più oneroso che attraversare un terreno aperto per un tratto di lunghezza molto maggiore); quindi, nel grafo delle possibili connessioni, ad ogni lato è assegnato un costo di realizzazione, ed allora il problema diventa quello di trovare uno spanning-tree il cui costo complessivo (la somma dei costi dei lati che lo compongono) sia il minimo possibile. Vediamo come esista un semplice algoritmo che risolve questo problema.

Dunque, siano dati un grafo connesso  $G = (V, E)$ , ed una funzione (detta *funzione di costo*)  $\mathbf{c} : E \rightarrow \mathbb{R}$ , che ad ogni lato  $e$  di  $G$  associa un numero reale non negativo  $\mathbf{c}(e)$ ; ed il problema è quello di trovare uno spanning-tree  $T = (V, S)$  di  $G$  tale che il suo costo totale

$$\mathbf{c}(T) = \sum_{e \in S} \mathbf{c}(e)$$

sia il minore possibile. È chiaro che, essendo finito il numero di spanning-trees di  $G$ , un tale  $T$  esiste. L'algoritmo per trovarne uno è il seguente:

- si parte dal grafo  $G_0 = (V, \emptyset)$ ;
- si sceglie un lato  $e_1$  di  $G$  di costo minimo, e si considera il grafo  $G_1 = (V, \{e_1\})$ ;
- se  $G_1$  è connesso (cioè se  $G$  ha solo due vertici) ci si ferma, e  $T = G_1$ ; altrimenti si sceglie un lato  $e_2 \in E \setminus \{e_1\}$  di costo minimo e si considera  $G_2 = (V, \{e_1, e_2\})$ ;
- se  $G_2$  è connesso,  $G_2 = T$ ; altrimenti si sceglie in  $E \setminus \{e_1, e_2\}$  un lato  $e_3$  che aggiunto a  $G_2$  non chiuda un circuito e sia di costo minimo tra quelli che soddisfano tale condizione;

- si pone  $G_3 = (V, \{e_1, e_2, e_3\})$ ; se  $G_3$  è connesso  $G_3 = T$ ; altrimenti si continua scegliendo un lato  $e_4$  di  $G$  non ancora utilizzato che non chiuda un circuito di  $G_3$  e di costo minimo;
- si procede in questa maniera, ottenendo ad ogni passo un grafo  $G_k$  con gli stessi vertici di  $G$  e  $k$  lati; se  $G_k$  è connesso allora  $G_k = T$ ; altrimenti si sceglie, tra i lati di  $G$  non ancora utilizzati, uno di costo minimo tra quelli che non chiudono circuiti in  $G_k$ , e lo si aggiunge a  $G_k$ , ottenendo il grafo  $G_{k+1}$ ;

Dopo un numero finito di passi questa procedura si arresta ad uno spanning-tree  $T$  di  $G$  che, come proveremo tra poco, ha costo minimo.

Per questa volta (ma solo per questa volta, dato che non si tratta del pane quotidiano di chi scrive), descriviamo in modo formale l'algoritmo:

*Algoritmo per spanning-tree minimali*

---

*Input:* un grafo connesso  $G = (V, E)$  ed una funzione di costo  $\mathbf{c}$  su  $E$ .

SET  $S = \emptyset$ .

WHILE  $(V, S)$  è non-connesso

scegli  $e \in E$  i cui estremi sono in componenti connesse distinte di  $(V, S)$   
e con costo  $\mathbf{c}(e)$  minimo;

$S \leftarrow S \cup \{e\}$ ;

RETURN  $(V, S)$

---

Proviamo che questo algoritmo fornisce in output uno spanning-tree di costo minimo. Sia  $T = (V, S)$  il grafo finale prodotto dall'algoritmo. Per costruzione,  $T$  è privo di circuiti: infatti, ad ogni passo, la procedura aggiunge un lato i cui estremi giacevano in componenti connesse distinte del grafo al passo precedente, e quindi non può generare circuiti. L'algoritmo si arresta quando è pervenuto ad un grafo connesso che, poiché contiene gli stessi vertici di  $G$ , è uno spanning-tree di quest'ultimo. Dobbiamo ora verificare che  $T$  è uno spanning-tree di costo minimo. Siano  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  i lati di  $T$  nell'ordine in cui sono stati scelti ai singoli passi (poiché  $T$  è un albero,  $n$  è il numero di vertici di  $T$  e quindi di  $G$ ). È chiaro che

$$\mathbf{c}(e_1) \leq \mathbf{c}(e_2) \leq \dots \leq \mathbf{c}(e_{n-1}).$$

Siano  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$  i lati di un altro spanning-tree  $T'$  di  $G$ , elencati in ordine crescente di costo. Proviamo che

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(e_i) = \mathbf{c}(T) \leq \mathbf{c}(T') = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(f_i)$$

mostrando, per induzione, che per ogni  $1 \leq k \leq n-1$  si ha

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{c}(e_i) \leq \sum_{i=1}^k \mathbf{c}(f_i).$$

Per  $k = 1$  la cosa è assicurata dalla scelta iniziale di  $e_1$ . Sia  $k \geq 2$ ; per ipotesi induttiva

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(e_i) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(f_i).$$

Al passo  $k$  l'algoritmo sceglie il lato  $e_k$ . Se  $\mathbf{c}(e_k) \leq \mathbf{c}(f_k)$  allora otteniamo immediatamente dall'ipotesi induttiva

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{c}(e_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(e_i) + \mathbf{c}(e_k) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(f_i) + \mathbf{c}(f_k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{c}(f_i).$$

Quindi possiamo assumere  $\mathbf{c}(e_k) > \mathbf{c}(f_k)$ , da cui segue  $\mathbf{c}(e_k) > \mathbf{c}(f_j)$  per ogni  $1 \leq j \leq k$ ; in particolare,  $e_k \notin \{f_1, \dots, f_k\}$ . Poiché l'algoritmo sceglie  $e_k$ , ciò significa che ognuno dei lati  $f_1, \dots, f_k$  deve congiungere vertici che appartengono ad una stessa componente connessa di  $T_{k-1} = (V, \{e_1, \dots, e_{k-1}\})$  (per  $1 \leq j \leq k$ , il lato  $f_j$  appartiene al grafo indotto in  $G$  da una componente connessa di  $T_{k-1}$ , altrimenti l'algoritmo avrebbe scelto  $f_j$  al posto di  $e_k$ ). Questo implica che il numero di componenti connesse di  $T'_k = (V, \{f_1, \dots, f_k\})$  è maggiore o uguale di quello delle componenti connesse di  $T_{k-1}$ . Ma sia  $T_{k-1}$  che  $T'_k$  sono grafi privi di circuiti, e dunque (Corollario 3.2) il numero delle loro componenti connesse è dato dalla differenza tra il numero dei vertici e quello dei lati, che è  $n - (k - 1)$  per  $T_{k-1}$ , e  $n - k$  per  $T'_k$ , una contraddizione. ■

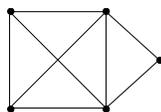
Quello appena descritto è uno degli algoritmi noti come algoritmi *greedy* (ingordi). Sono algoritmi che, disegnati per giungere per passi ripetuti alla determinazione di un certo oggetto, effettuano ad ogni passo, tra le opzioni consentite, la scelta localmente più conveniente, senza guardarsi indietro o più avanti. In effetti, è sorprendente che algoritmi tanto "stupidi" possano in certi casi condurre ad un risultato ottimale; nonostante possa essere confortante apprendere come, a volte, per fare le scelte giuste non sia necessario essere navigati, l'esperienza e la filosofia morale di ogni tempo (ma anche innumerevoli processi decisionali rigorosamente formalizzabili) insegnano che in genere non è così: uno scacchista che applicasse un algoritmo greedy accetterebbe senza riflettere qualunque sacrificio proposto da un avversario appena più astuto, divertendosi forse, ma finendo col venire ignominiosamente cacciato, dopo un paio di partite, da qualsiasi circolo di cui non risultasse il principale finanziatore.

L'algoritmo greedy per spanning-tree minimali è anche efficiente. Partendo da un grafo con  $n$ -vertici, si devono trovare gli  $n - 1$  lati di uno spanning-tree minimale; quindi il numero di passi è  $n - 1$ . Ciascun passo richiede di scegliere un lato tra un numero di essi che non supera  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$ , che abbia peso minimo tra quelli che godono di una certa proprietà; una volta che si sia definito per bene (ma non lo facciamo) cosa si intenda per "singola operazione", non è difficile vedere che questa procedura di scelta richiede un numero di operazioni che è limitato da un polinomio in  $n$ . Complessivamente, quindi, il numero totale di operazioni richieste per l'algoritmo per spanning-tree minimali, è limitato da un polinomio in  $n$ .

**Esercizio 3.1.** Si provi che il Teorema 3.1 non vale se  $G = (V, E)$  non è connesso (meglio: provare che, senza l'ipotesi di connessione, non è vero che se  $|E| = |V| - 1$  allora  $G$  è una foresta).

**Esercizio 3.2.** Siano  $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  interi positivi tali che  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ . Si provi che esiste un albero  $T$  con  $n$  vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tale che  $d_T(v_i) = d_i$  per ogni  $1 \leq i \leq n$ .

**Esercizio 3.3.** Si determinino, a meno di isomorfismi, tutti gli spanning-trees del grafo



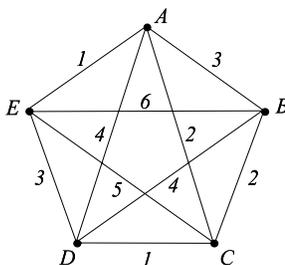
**Esercizio 3.4.** Provare che ogni albero con  $n$  vertici è isomorfo ad uno spanning-tree del grafo completo  $K_n$ .

**Esercizio 3.5.** Sia  $G$  il grafo i cui vertici sono tutti i punti a coordinate intere contenuti nel quadrato  $[0, 3] \times [0, 3]$  in un piano cartesiano, ed i lati di  $G$  congiungono due punti se e solo se la distanza euclidea tra questi è 1. Si calcoli il costo minimo complessivo di uno spanning-tree di  $G$ , nei due casi seguenti.

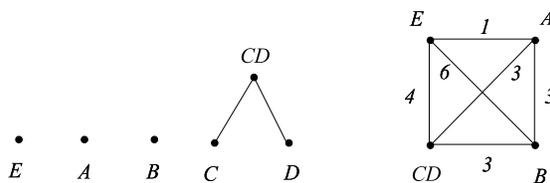
- 1) Ad ogni lato  $e = \{(a, b), (a', b')\}$  è assegnato un costo  $c(e) = \min\{a + b, a' + b'\}$ .
- 2) Il costo dei lati è 1 per tutti i lati "verticali", mentre è uguale ad  $a + 1$  per i lati del tipo  $\{(a, b), (a + 1, b)\}$ .

**Digressione: alberi evolutivi.** Supponiamo dato un insieme finito di  $n$  oggetti (punti) e che per ogni coppia di essi sia definita una "distanza" (un numero reale positivo). Questo, dal punto di vista dei grafi, significa avere dato un grafo completo  $K_n$  con una funzione di costo sui lati (anche se nei casi che abbiamo in mente il costo di un lato esprime in realtà una misura della diversità tra i due oggetti rappresentati dagli estremi del lato stesso). Vogliamo ora costruire un albero che schematizzi un'ipotesi di come le varie differenze possano essere derivate temporalmente (partendo cioè dall'assunto evolucionistico che la somiglianza implica un "percorso comune" più lungo). Illustriamo il metodo più semplice mediante un esempio.

Supponiamo che gli oggetti dati siano  $A, B, C, D$  ed  $E$ , e che la distanza tra ciascuna coppia di essi sia codificata dalla funzione di costo su  $K_5$  indicata nella Figura seguente.

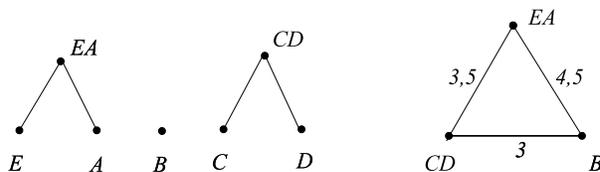


Si disegnano su un altro foglio i cinque punti  $A, B, C, D, E$  isolati. Si sceglie in  $K_5$  un lato di peso minimo, ad esempio  $\{D, C\}$ , e sull'altro foglio si inserisce un nuovo punto  $CD$ , e due lati che lo congiungono a  $C$  ed a  $D$ ; quindi sul primo foglio si costruisce un grafo  $K_4$  "fondendo" i vertici  $C$  e  $D$ , e pesando i lati con il peso precedente (nel grafo  $K_5$  di partenza) se i loro

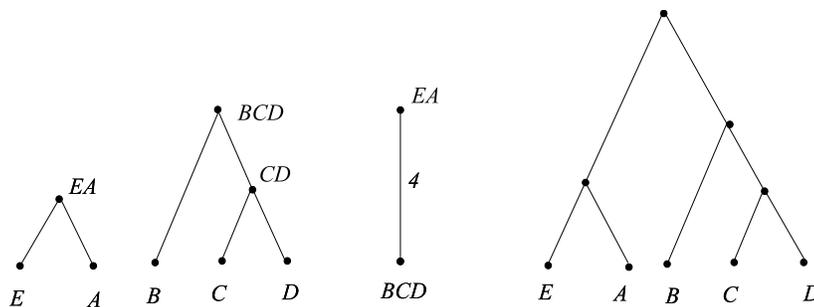


estremi sono entrambi diversi da  $C$  e  $D$ , mentre i lati del tipo  $\{X, CD\}$  vengono pesati con la media aritmetica dei pesi dei lati originari  $\{X, C\}$  e  $\{X, D\}$ .

Si ripete la procedura a partire dal nuovo grafo pesato  $K_4$  e, sull'altro foglio, dal grafo sui vertici  $A, B, E$  e  $CD$ . In questo caso scegliendo il lato  $\{E, A\}$ .



Quindi si procede allo stesso modo sul triangolo rimasto, scegliendo il lato  $\{CD, B\}$ , ed infine contraendo l'ultimo lato residuo, ed ottenendo sull'altro foglio l'albero a destra in figura.



Questo metodo può essere applicato a partire da qualunque grafo completo pesato  $K_n$ , e produce, dopo esattamente  $k - 1$  passi un albero nel quale le "foglie" (cioè i vertici di grado 1) sono in corrispondenza biunivoca con i vertici dal grafo iniziale  $K_n$ , c'è un solo vertice di grado 2 (l'ultimo che viene inserito), ed ogni altro vertice ha grado 3. Un albero di questo tipo si chiama albero binario con radice (la radice è l'unico vertice di grado 2). La verifica di queste affermazioni è lasciata per esercizio: osserviamo però che può essere necessario in alcuni passi effettuare delle scelte non deterministiche (dato che - come al primo passo del nostro esempio - è possibile che ci sia più di un lato di peso minimo).

Quella che abbiamo illustrato è una versione molto elementare di metodi che sono effettivamente utilizzati per ricostruire a posteriori alberi evolutivi di vario genere. Ad esempio, l'albero della Figura 1.17 è ricavato con metodi di questo tipo a partire dal confronto del genoma delle specie in esame, che fornisce le distanze iniziali. Ma procedure del genere si

possono applicare in svariati ambiti (posto che si sia in grado di stabilire in modo appropriato una misura delle differenze): ad esempio, come nella figura 3.2, nello studio della presunta evoluzione delle lingue<sup>1</sup>.

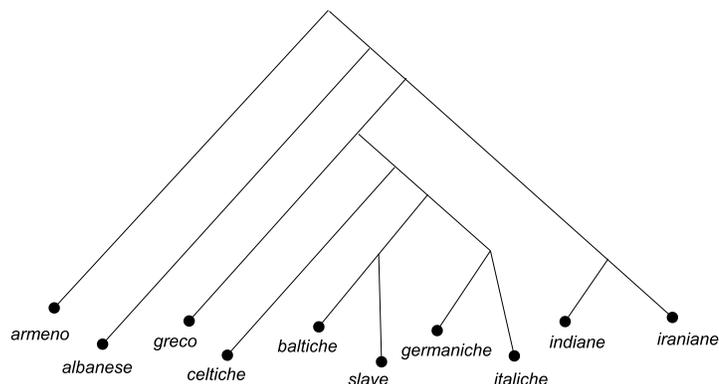


Figura 3.2: albero presunto di derivazione di alcune lingue indoeuropee

Naturalmente, nella pratica è spesso necessario modificare l'approccio più ingenuo: ad esempio potrebbe essere più realistico assegnare il peso dei nuovi lati non semplicemente calcolando una media locale, ma tenendo anche conto di tutti i pesi complessivi, o di più sottili ragioni statistiche. Ma ci fermiamo qui, dato che intendevamo soltanto suggerire una delle tante applicazioni del concetto di albero.

### 3.2 Grafi planari.

Possiamo introdurre anche questa classe di grafi ricordando un ben noto problema di matematica ricreativa.

*Problema dei villaggi e dei pozzi.* Gli abitanti di tre villaggi attingono acqua da tre pozzi situati ad una certa distanza da tutti e tre i villaggi. A causa di ricorrenti siccità, un antico accordo stabilisce che ognuno dei villaggi possa utilizzare tutti e tre i pozzi, e quindi da ogni villaggio partono tre sentieri che arrivano a ciascuno dei pozzi. La situazione è dunque schematizzata dal seguente grafo:

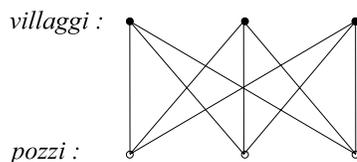


Figura 3.3: villaggi e pozzi

<sup>1</sup>Quest'esempio e quello della figura 1.17 sono tratti dal libro L. L. Cavalli-Sforza, *Geni, popoli e lingue* (Adelphi), un capitolo del quale è intitolato "Una passeggiata nella foresta".

Col tempo si è però sviluppata un'inimicizia tra le tre comunità, per cui possono verificarsi incidenti qualora abitanti di diversi villaggi si incontrino negli incroci tra i sentieri. Un antropologo europeo, giunto da quelle parti, e compiaciuto di poter risolvere tanto facilmente (grazie alla propria cultura superiore) il problema di quei bravi selvaggi, propone allora agli anziani dei tre villaggi di tracciare nuovi sentieri che non si incontrino se non in prossimità dei pozzi (luoghi sacri e quindi sicuri). Gli anziani lo fissano accondiscendenti per qualche secondo e, quindi, scoppiano a ridere. Perché?

Quì, la questione è se il grafo della figura 3.3 possa essere disegnato su un piano in modo che i nove lati non si intersechino in alcun punto (ad eccezione, ovviamente, dei vertici). Si vede facilmente (sperimentando ad esempio su  $K_5$  che non tutti i grafi possono essere disegnati in questo modo su un piano, e ciò conduce alla definizione di grafi planari, come quei grafi che ammettono una rappresentazione sul piano in cui i lati si incontrano soltanto nei vertici.

Introduciamo la cosa in modo più formale.

- Un multigrafo  $G = (V, E, \phi)$  è un **multigrafo piano** se  $V$  è un sottoinsieme di punti del piano euclideo  $\mathbb{R}^2$  ed  $E$  è un insieme di archi semplici (curve di Jordan) che si intersecano solo negli estremi e i cui estremi appartengono a  $V$  (quindi ogni  $e \in E$  può essere inteso come (l'immagine di) un'applicazione continua e iniettiva  $e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $e(0), e(1)$  sono vertici del grafo).
- Un (multi)grafo  $G$  si dice **planare** se è isomorfo (come grafo) ad un (multi)grafo piano. Se  $G$  è un grafo planare, ogni grafo piano isomorfo ad esso si chiama una *realizzazione* di  $G$ .

Per esempio, un circuito stampato è naturalmente associato ad un grafo planare, a differenza di un circuito realizzato mediante cavi isolati (i quali si possono sovrapporre) che potrebbe non esserlo. I grafi dei poliedri regolari sono planari (si guardino i disegni della Figura 1.7). Più in generale, ogni grafo che può essere disegnato su una sfera senza che i lati si incrocino (come può essere fatto per i poliedri regolari, o per il grafo del pallone da calcio) è planare: per convincersene basta immaginare di bucare la sfera in un punto che non appartenga al diagramma del grafo disegnato su di essa e quindi di "apirla"; oppure, più scientificamente, si proietta stereograficamente la sfera, a partire da un punto di essa che non appartiene al diagramma, su un piano tangente al punto opposto. Come ultimo esempio, osserviamo che ogni albero è planare (lo si dimostri facendo induzione sul numero dei suoi vertici ed utilizzando il Lemma 1.4).

È importante sottolineare che, mentre i grafi piani sono ben precisi oggetti "geometrici" (in particolare, ereditano una topologia da quella di  $\mathbb{R}^2$ ), la proprietà d'essere planare è una proprietà che appartiene al grafo, e non ad un suo particolare diagramma.

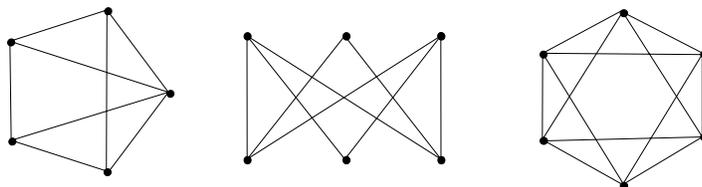
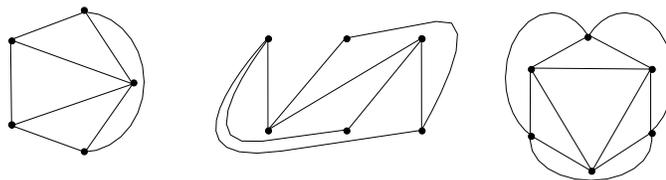


Figura 3.4: esempi di grafi planari

Ad esempio i grafi della figura 3.4 sono planari, dato che possono, nello stesso ordine, essere disegnati nella maniera seguente:



Per le ragioni che tra poco chiariremo, due casi particolarmente significativi di grafi *non planari* (riprodotti nella Figura 3.5) sono il grafo completo  $K_5$  ed il grafo dei villaggi e dei pozzi  $K_{3,3}$  (il cui nome ufficiale è *grafo completo bipartito* di tipo  $(3, 3)$ ).

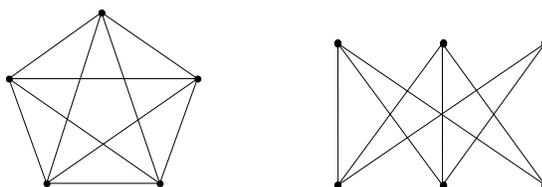


Figura 3.5: grafi non planari

Torniamo ai grafi piani. Un grafo piano è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  costituito da un insieme finito  $V$  di punti (i vertici del grafo) e da un insieme di archi semplici che congiungono punti i cui vertici corrispondenti sono uniti da un lato del grafo, e non si intersecano se non agli estremi. Avvisando che non tratteremo questi aspetti in modo rigoroso, non possiamo fare a meno di citare il famoso Teorema di Jordan sulle curve semplici chiuse, il cui enunciato è intuitivo, ma la cui dimostrazione è tutt'altro che banale.

**Teorema della curva di Jordan.** *Ogni curva semplice chiusa sul piano separa il piano in due regioni connesse, una interna ed una esterna.*

Una conseguenza, che non dimostreremo, piuttosto intuitiva di questo Teorema, è che, dato un grafo piano  $G$ , il piano euclideo  $\mathbb{R}^2$  risulta suddiviso in un numero finito di regioni connesse, chiamate le **facce** del grafo  $G$ , di cui una di area infinita (la regione "esterna") e le altre limitate e racchiuse da un perimetro costituito da un numero finito di curve, corrispondenti ai lati di un ciclo del grafo (naturalmente, anche la faccia infinita esterna è delimitata allo stesso modo da quello che chiameremo ugualmente il suo perimetro). Accettato questo, la dimostrazione del risultato (anche questo dovuto a Eulero) che sta alla base di tutta la teoria dei grafi piani è sorprendentemente breve.

**Teorema 3.5.** (Eulero) *Sia  $G$  un grafo piano connesso con  $n$  vertici ed  $m$  lati e sia  $c$  il numero delle sue facce. Allora*

$$c - m + n = 2.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo per induzione sul numero  $m$  di lati. Se  $m = 0$  allora  $G$  è costituito da un unico vertice,  $c = 1$  e la formula è banalmente soddisfatta. Lo stesso avviene

se  $G$  è un albero; in tal caso, infatti, un disegno planare di  $G$  ha un'unica faccia, e per il Teorema 3.1 si ha  $m = n - 1$ , quindi  $c - m + n = 1 - (n - 1) + n = 2$ . Se  $G$  non è un albero, allora ha un ciclo  $\mathcal{C}$ . Per il Teorema della curva di Jordan,  $\mathcal{C}$  divide il piano in una regione interna ed una esterna; quindi, se  $e$  è un lato di  $\mathcal{C}$ ,  $e$  separa esattamente due facce di  $G$ , una che giace nella regione interna di  $\mathcal{C}$  e l'altra in quella esterna. Nel disegno del sottografo  $G - e$  queste due regioni vengono 'fuse' in una. Pertanto, il numero di facce nel disegno del sottografo  $G - e$  è  $c - 1$ . D'altra parte,  $G - e$  è connesso, ha gli stessi vertici di  $G$  ed un lato in meno; quindi, per ipotesi induttiva

$$2 = (c - 1) - (m - 1) + n = c - m + n$$

provando così il Teorema. ■

Come prima applicazione, vediamo come da questo risultato discenda subito una forte limitazione al numero dei lati di un grafo piano.

**Teorema 3.6.** *Sia  $G$  un grafo planare con  $m$  lati e  $n \geq 3$  vertici: allora  $m \leq 3n - 6$ . Se  $G$  non è un albero, e  $g = g(G)$  è il suo calibro (vedi sezione 1.4), allora*

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G$  un grafo planare come nelle ipotesi. Se  $G$  non è connesso, l'aggiungere un nuovo lato i cui estremi appartengono a componenti connesse distinte dà chiaramente luogo ancora ad un grafo piano, con gli stessi vertici di  $G$  ed un lato in più. Ai fini dell'enunciato, possiamo perciò assumere che  $G$  sia connesso. Se  $G$  è un albero allora  $m = n - 1 \leq 3n - 6$  (perché  $n \geq 3$ ). Possiamo quindi assumere che  $G$  non sia un albero, e dimostrare la seconda parte dell'enunciato, avendo posto  $g$  il calibro di  $G$ . Indichiamo con  $G'$  una realizzazione di  $G$ . A questo punto, l'argomento è analogo a quello utilizzato nella dimostrazione del teorema 1.1. Sia  $G'$  una realizzazione di  $G$ , e per ogni faccia  $\alpha$  di  $G'$  denotiamo con  $d(\alpha)$  il numero di lati distinti che compongono il perimetro di  $\alpha$ . Poiché ogni lato è parte del perimetro di al più due facce, si ha

$$\sum_{\alpha \text{ faccia}} d(\alpha) \leq 2m. \quad (3.1)$$

D'altra parte, per definizione di calibro, il perimetro di ogni faccia è composto da almeno  $g$  archi, (infatti il perimetro di ogni faccia contiene un ciclo non banale), ovvero  $d(\alpha) \geq g$ , per ogni faccia  $\alpha$ . Quindi la (3.1) implica la diseuguaglianza  $gc \leq 2m$ , dove  $c$  è il numero di facce di  $G'$ . Poiché, per il Teorema di Eulero,  $c = m - n + 2$ , si ottiene

$$g(m - n + 2) \leq 2m$$

da cui segue subito la diseuguaglianza dell'enunciato. Per quanto osservato sugli alberi e tenendo conto che (poiché  $g \geq 3$ )  $\frac{g}{g-2} \leq 3$ , si conclude che  $m \leq 3n - 6$  vale in ogni caso. ■

**Corollario 3.7.** *Un grafo planare ha almeno un vertice il cui grado al più 5.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo piano con  $n$  vertici e  $m$  lati, e supponiamo per assurdo che ogni vertice abbia grado almeno 6. Allora, per il Teorema 1.1

$$6n \leq \sum_{v \in V} d_G(v) = 2m$$

e quindi  $m \geq 3n$ , cosa che contraddice il Teorema 3.6. ■

Osserviamo ora che né il grafo completo  $K_5$  né il grafo dei pozzi  $K_{3,3}$  verificano la limitazione del Teorema 3.6: infatti,  $K_5$  (che ha calibro 3), ha 10 lati e 5 vertici, mentre  $K_{3,3}$  ha calibro 4, 6 vertici, 9 lati, e  $9 > \frac{4}{4-2}(6-2)$ . Quindi

**Proposizione 3.8.** *I grafi  $K_5$  e  $K_{3,3}$  non sono planari.*

Chiaramente, ogni sottografo di un grafo planare è planare. Dunque un grafo che ha un sottografo isomorfo a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$  non è planare. Questa osservazione non si inverte direttamente (esistono grafi non planari che non contengono alcun sottografo isomorfo a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$ ), ma potremmo dire che si inverte "nella sostanza". Per chiarire il senso di questa affermazione, è utile introdurre il concetto di suddivisione di un grafo.

Sia  $e = \{u, v\}$  un lato del grafo  $G$ ; si può costruire un grafo  $G^e$  aggiungendo a  $G$  un nuovo vertice  $a$ , togliendo il lato  $e$ , e rimpiazzandolo con i due lati  $\{u, a\}$ ,  $\{a, v\}$ . Dato un diagramma di  $G$ , per ottenere un diagramma di  $G^e$  si utilizzano le stesse linee, e semplicemente si aggiunge un vertice in mezzo alla linea che rappresenta  $e$  nel disegno di  $G$ ; quindi  $G$  è piano se e soltanto se  $G^e$  è piano. Un grafo  $G'$  è detto una *suddivisione* del grafo  $G$  se è ottenuto da  $G$  mediante un numero finito di applicazioni successive della procedura appena descritta.

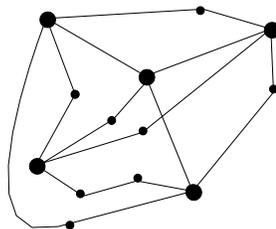


Figura 3.6: una suddivisione di  $K_5$

La figura 3.6 illustra una suddivisione di  $K_5$  (dove i pallini grossi sono i vertici originari di  $K_5$  e quelli piccoli i vertici "aggiunti").

Si osserva quindi che un grafo  $G$  è planare se e solo se ogni sua suddivisione è tale. Inoltre, un grafo che ha un sottografo isomorfo ad una suddivisione di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$  non è planare (per la Proposizione 3.8). Un importante risultato di Kuratowski (a cui si alludeva in precedenza), la cui dimostrazione, pur non richiedendo strumenti particolarmente sofisticati, è troppo complicata per essere affrontata in queste note, afferma che vale anche il viceversa.

**Teorema 3.9.** (Kuratowski) *Un grafo è planare se e soltanto se non ha sottografi isomorfi ad una suddivisione di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$ .*

**Il Teorema dei quattro colori.** Un problema di colorazione di grafi planari è forse il risultato più diffusamente noto di teoria dei grafi, ovvero quella della colorazione di una carta geografica politica (che, per brevità, conveniamo di chiamare "mappa"): qual è il minimo numero di colori distinti necessario per colorare una mappa in modo che non vi siano nazioni confinanti dello stesso colore?

È facile tradurre il problema della mappa in termini di grafi: ad una data mappa si associa un grafo i cui vertici sono le diverse nazioni e due vertici sono adiacenti se e solo se le

corrispondenti nazioni sono confinanti. È intuitivo, e non è difficile da provare, che il grafo così ottenuto è un grafo planare (avendo ovviamente definito con precisione cosa si intende con "mappa").

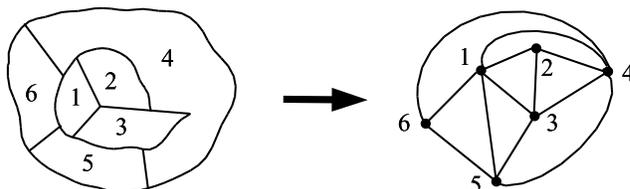


Figura 3.7: una mappa e il suo grafo

La domanda diventa la seguente: qual è il minimo numero di colori con cui è possibile colorare i vertici di un grafo piano? La congettura che siano sempre sufficienti quattro colori ha una storia quasi mitica; pare (si veda Biggs, Lloyd e Wilson, *Graph Theory 1736–1936*) sia stata esplicitamente formulata per la prima volta da un certo Francis Guthrie, che, tramite il fratello, l'avrebbe comunicata ad Augustus de Morgan, suo professore di matematica al University College di Londra. La congettura dei quattro colori ha resistito (nonostante numerosi tentativi in entrambi i sensi) sino al 1976 quando è stata provata da Appel e Haken ed è quindi diventata il *Teorema dei quattro colori*<sup>2</sup> (si osservi che la mappa della figura 3.7 richiede effettivamente quattro colori), che può dunque essere formulato nel modo seguente

**Teorema 3.10.** *Ogni grafo planare è 4-colorabile (cioè  $\chi(G) \leq 4$  per ogni grafo planare  $G$ ).*

La dimostrazione che il numero cromatico di un grafo piano è al più 5 (ovvero che cinque colori sono sufficienti, un risultato dovuto per primo a Heawood nel 1890) è relativamente semplice: più avanti (Teorema 5.8) ne daremo una elegante dimostrazione.

**Esercizio 3.6.** Dire quali tra i grafi dell'esercizio 1.11 sono planari.

**Esercizio 3.7.** Sia  $g$  la lunghezza minima di un ciclo non banale di un grafo piano (che non sia un albero) con  $n$  vertici,  $m$  lati e  $c$  facce. Si provi che

$$c \leq \frac{2}{g-2}(n-2).$$

**Esercizio 3.8.** Provare che in un grafo planare con almeno 3 vertici ci sono almeno 3 vertici di grado al più 5 (sugg.: si può supporre in partenza che non ci siano vertici di grado 1).

**Esercizio 3.9.** Sia  $G$  un grafo connesso con  $n \geq 3$  vertici, e sia  $L(G)$  il suo line graph. Si provi che se  $L(G)$  è planare, allora  $G$  è planare, non ha vertici di grado  $\geq 5$ , ed ha almeno 4 vertici di grado minore o uguale a 3 [utilizzare l'esercizio 1.31].

<sup>2</sup>La dimostrazione ha richiesto un impiego massiccio del calcolatore, e non potrebbe essere verificata da esseri umani (nemmeno se ci si mettesse tutti insieme a lavorare per qualche anno); pertanto è stata ed è oggetto di una certa discussione.

### 3.3 Grafi bipartiti.

Un grafo si dice **bipartito** se esiste una partizione  $V = A \cup B$ , dell'insieme  $V$  dei vertici, in due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti  $A$  e  $B$ , tale che non esiste alcun arco del grafo i cui estremi giacciono in uno stesso termine della partizione (quindi ogni lato congiunge un vertice in  $A$  con un vertice in  $B$ ). In altre parole, un grafo  $G = (V, E)$  con  $E \neq \emptyset$  è bipartito se e solo se il suo numero cromatico è 2 (qualora  $E = \emptyset$ ,  $G$  è comunque bipartito se  $|V| \geq 2$ ). In generale, per  $k \geq 1$ , si dice che un grafo  $G(V, E)$  è *k-partito* se esiste una partizione  $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$  dell'insieme  $V$  dei vertici in  $k$ -sottoinsiemi non-vuoti, tale che i vertici estremi di ogni lato appartengono a termini distinti della partizione. Torneremo sui grafi  $k$ -partiti più avanti. In questa sezione ci occupiamo dei grafi bipartiti, che costituiscono un'altra importante classe di grafi utile nelle applicazioni (in particolare per i cosiddetti "problemi di assegnazione" che approfondiremo nella prossima sezione).

Abbiamo incontrato grafi bipartiti in alcune occasioni; ad esempio sono bipartiti i grafi dell'esercizio 1.18, e gli ipercubi (sezione 1.4), in particolare è bipartito il grafo del cubo:

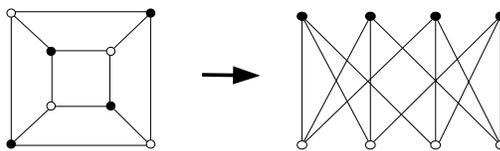


Figura 3.8: bipartizione del cubo

Inoltre abbiamo già definito i grafi bipartiti completi  $K_{n,m}$ : dati  $n, m \geq 1$ , il grafo *completo bipartito*  $K_{n,m} = (V, E)$  è il grafo il cui insieme dei vertici  $V = V_1 \cup V_2$  è l'unione disgiunta di due sottoinsiemi di ordine rispettivamente  $n$  ed  $m$ , ed i lati in  $E$  sono tutti e soli quelli che congiungono vertici di  $V_1$  con vertici in  $V_2$ ; ovvero  $E = \{\{u, v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}$ .

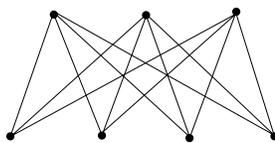


Figura 3.9:  $K_{4,3}$

Ogni albero è bipartito; questa affermazione è una conseguenza del prossimo Teorema, si cerchi tuttavia di provarla per esercizio facendo induzione sul numero di vertici.

Un ciclo  $C_n$  è bipartito se e solo se  $n$  è pari. Ora, è chiaro che ogni sottografo di un grafo bipartito è esso stesso bipartito; in particolare, quindi, un grafo che contiene un ciclo di lunghezza dispari non è bipartito (dunque, con l'eccezione del cubo, i grafi dei solidi platonici non sono bipartiti).

**Teorema 3.11.** *Un grafo con almeno due vertici è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.*

Alla dimostrazione premettiamo la seguente osservazione (ricordando che una *passeggiata* di lunghezza  $n$  in un grafo è una sequenza  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$ , di vertici e lati, sottoposta alla sola condizione che ogni lato  $e_i$  congiunge i vertici  $v_{i-1}$  e  $v_i$ ).

**Lemma 3.12.** *Un grafo in cui è possibile trovare una passeggiata chiusa di lunghezza dispari ha un ciclo di lunghezza dispari.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathcal{P} : u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n = u$  una passeggiata chiusa di lunghezza dispari  $n$  in  $G$ , e procediamo per induzione su  $n$  (chiaramente  $n \geq 3$ ). Se  $\mathcal{P}$  è un ciclo (cosa che, in particolare, avviene se  $n = 3$ ) non c'è nulla da provare. Supponiamo quindi che  $n \geq 5$  e che  $\mathcal{P}$  non sia un ciclo. Allora vi sono in essa almeno due vertici ripetuti (di cui almeno uno non agli estremi), diciamo  $v_i = v_j$ , con  $0 \leq i < j \leq n$  (e  $\{i, j\} \neq \{0, n\}$ ). Se  $j - i$  è pari, allora la passeggiata chiusa

$$u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_i e_{j+1} v_{j+1} \dots v_{n-1} e_n v_n = u$$

ha una lunghezza dispari strettamente minore di quella di  $\mathcal{P}$ , e dunque concludiamo per ipotesi induttiva che esiste un ciclo di lunghezza dispari in  $G$ . Se invece  $j - i$  è dispari, allora

$$v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots v_{j-1} e_j v_j = v_i$$

è una passeggiata chiusa di lunghezza dispari strettamente inferiore ad  $n$ , e di nuovo si conclude applicando l'ipotesi induttiva. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.11 Osservando che un grafo è bipartito se e solo se le sue componenti connesse sono grafi bipartiti oppure vertici isolati, possiamo assumere che  $G$  sia connesso.

Se  $G$  è bipartito sull'insieme  $V = A \cup B$  di vertici, allora i vertici di ogni ciclo di  $G$ , nell'ordine in cui compaiono nel ciclo, appartengono alternativamente ai due insiemi disgiunti  $A$  e  $B$ . Poiché il ciclo si deve chiudere allo stesso vertice da cui inizia, si conclude che il numero dei suoi lati (cioè di 'salti' tra  $A$  e  $B$ ) deve essere pari.

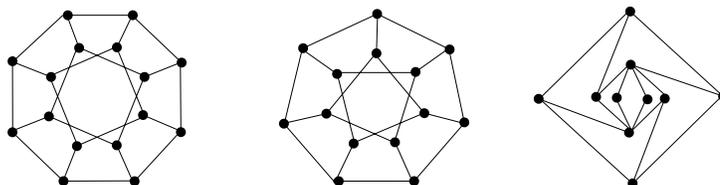
Viceversa, supponiamo che  $G$  non contenga cicli di lunghezza dispari. Poiché  $G$  è connesso, per ogni coppia  $a$  e  $b$  di vertici è definita la distanza  $d_G(a, b)$ . Sull'insieme  $V$  dei vertici di  $G$  definiamo una relazione  $\sim$  ponendo  $a \sim b$  se  $d_G(a, b)$  è pari. Chiaramente, la relazione  $\sim$  è riflessiva e simmetrica. Supponiamo che per  $a, b, c \in V$  sia  $a \sim b$  e  $b \sim c$ . Allora esistono due cammini semplici di lunghezza pari,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_1$ , rispettivamente tra  $a$  e  $b$ , e tra  $b$  e  $c$ . Supponiamo, per assurdo, che la distanza tra  $a$  e  $c$  sia dispari; allora esiste un cammino semplice  $\mathcal{C}_3$  tra  $c$  e  $a$  di lunghezza dispari. Percorrendo di seguito i cammini  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  si ottiene una passeggiata chiusa di lunghezza dispari. Per il Lemma 3.12 esiste allora un ciclo di lunghezza dispari in  $G$ , e questo contraddice l'ipotesi su  $G$ . Dunque  $\sim$  è una relazione d'equivalenza su  $V$ .

Sia ora  $e = \{a, b\}$  un lato di  $G$  (esiste perché  $G$  ha almeno due vertici ed è connesso), e siano, rispettivamente  $A$  e  $B$  le classi di equivalenza di  $a$  e di  $b$ . Poiché  $a \not\sim b$ ,  $A \cap B = \emptyset$ . Sia  $u \in V$ , e supponiamo, per assurdo, che  $u$  abbia distanza dispari sia da  $a$  che da  $b$ . Siano  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  cammini di lunghezza minima, rispettivamente tra  $a$  e  $u$ , e tra  $u$  e  $b$ . Percorrendo di seguito  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  ed il lato  $e$ , si ottiene allora una passeggiata chiusa di lunghezza dispari che inizia e termina in  $a$ , il che per l'ipotesi su  $G$  ed il Lemma 3.12, è una contraddizione. Dunque  $u$  ha distanza pari o da  $a$  o da  $b$ , e dunque  $u \in A \cup B$ . Pertanto  $V = A \cup B$ . Chiaramente,

infine, nessun lato di  $G$  congiunge vertici che stanno entrambi in  $A$  o in  $B$  (perché in tal caso questi avrebbero distanza 1 e non sarebbero quindi in relazione). In conclusione,  $G$  è bipartito negli insiemi di vertici  $A$  e  $B$ . ■

**Esercizio 3.10.** Dati  $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ , dire quanti archi ha  $K_{n,m}$ ? Si discuta, al variare di  $n$  ed  $m$  l'esistenza di un cammino o di un circuito euleriano in  $K_{n,m}$ .

**Esercizio 3.11.** Si dica quali tra i seguenti grafi sono bipartiti:



### Accoppiamenti: Teoremi di König e di Hall.

Dodici nobili cavalieri vengono incaricati da Re Artù di mettersi al servizio di altrettante indifese (ma fortunate?) damigelle. Durante un'animata seduta della Tavola Rotonda, ogni cavaliere esprime la propria preferenza per quattro delle dame. Ne nasce un pandemonio, e alla fine Artù assegna al Mago Merlino il compito di associare ad ogni cavaliere una damigella in modo che ad ognuno vada una delle sue predilette. È possibile fare ciò?

È chiaro che non sempre questo è possibile. Ad esempio, ovviamente non lo è se una delle dame non è nella rosa di favorite di alcun cavaliere (per quale motivo sentiamo che nella vita reale sarà proprio una circostanza del genere a verificarsi<sup>3</sup>, è un caso particolare di uno dei problemi fondamentali delle società umane, e non ci aspettiamo che sia la matematica a risolverlo. Un'altra questione è perché non vengano prese in considerazione anche le eventuali preferenze delle dodici fanciulle, ma, come da verbale risulta che ebbe a dichiarare Lancillotto, "Se dobbiamo tener conto anche dei desideri delle donne, dove mai andremo a finire?"). Comunque sia, i dati del problema possono essere codificati mediante un grafo bipartito, nel quale l'insieme dei vertici si ripartisce nell'insieme  $C$  dei cavalieri e quello  $D$  delle dame, ed i lati indicano le preferenze di ciascun cavaliere (nel nostro esempio specifico, ogni vertice di  $C$  è adiacente a quattro vertici di  $D$ ) Il problema di Merlino, una volta disegnato il grafo, è quello di trovare dodici lati che accoppiano tutti e ventiquattro i vertici del grafo.

Abbiamo osservato che un'ovvia condizione necessaria a che ad ogni dama sia assegnato un diverso cavaliere è che ognuna sia tra le favorite di almeno uno dei cavalieri. Estendendo in modo altrettanto ovvio questa osservazione, si comprende che una condizione necessaria affinché possa essere fatta una assegnazione completa è che per ogni sottoinsieme  $S$  di dame un numero almeno uguale di cavalieri indichi una dama di  $S$  tra le proprie favorite.

Come non sempre accade in matematica, questa ovvia condizione necessaria risulta anche sufficiente a che si possa stabilire una assegnazione ("accoppiamento") completo. Questo è il contenuto del famoso *Teorema dei matrimoni* di P.Hall (1936), che proveremo in questa sezione. Si chiama così, perché in genere viene introdotto evocando un'idilliaca riunione di

<sup>3</sup>in ogni caso con una frequenza superiore alla sua probabilità matematica, che è circa 1/11.

un certo numero di ragazzi e ragazze, ove ciascuna ragazza prova sentimenti di ammirazione, inclinazione o, almeno, di simpatia, verso alcuni dei ragazzi, e viceversa; e la questione è quale sia il massimo numero di matrimoni (etero) che è possibile combinare rispettando le reciproche simpatie.

Cominciamo dunque con il formalizzare il problema. Un **accoppiamento** in un grafo  $G$  (non necessariamente bipartito) è un insieme di lati di  $G$  che a due a due non hanno estremi in comune. Un accoppiamento  $A$  di  $G$  si dice *massimo* se non esistono accoppiamenti di  $G$  costituiti da un numero maggiore di lati.

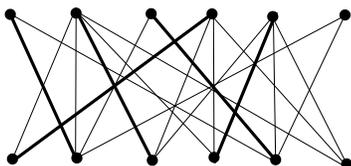


Figura 3.10: un accoppiamento massimo in un grafo bipartito

Sia  $V_1 \cup V_2$  la partizione dell'insieme dei vertici di un grafo bipartito  $G$ , e supponiamo  $|V_1| \leq |V_2|$ . Un accoppiamento  $A$  di  $G$  si dice **ottimale** se  $|A| = |V_1|$ . Poiché  $G$  è bipartito, questo significa che ogni vertice di  $V_1$  appartiene ad uno (ed un solo) lato dell'accoppiamento. Quindi, i lati di un accoppiamento completo realizzano una applicazione iniettiva tra l'insieme dei vertici  $V_1$  e  $V_2$ .

Dedurremo il Teorema di Hall da un teorema di König del 1916 che di fatto ne è equivalente, e per enunciare il quale abbiamo bisogno di introdurre una nuova definizione.

Una **copertura** di un grafo (non necessariamente bipartito)  $G$  è un sottoinsieme  $U$  di vertici tale che ogni lato di  $G$  è incidente ad almeno un vertice appartenente ad  $U$ . Si denota con  $\beta(G)$  (*indice di copertura* di  $G$ ) il minimo numero di vertici che è necessario impiegare per avere una copertura di  $G$ .

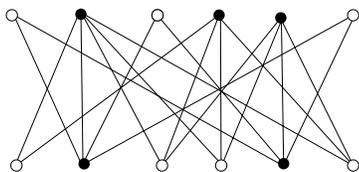


Figura 3.11: una copertura minima in un grafo bipartito.

L'indice di copertura  $\beta(G)$  e l'indice di stabilità  $\alpha(G)$  (vedi sezione 1.4) di un grafo (non necessariamente bipartito)  $G$ , sono legati dalla seguente relazione.

**Proposizione 3.13.** *Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici. Allora*

$$\alpha(G) + \beta(G) = n.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che, un sottoinsieme  $S$  dell'insieme  $V$  dei vertici di  $G$  è un sottoinsieme stabile se e solo se  $V \setminus S$  è una copertura di  $G$ . Segue  $\alpha(G) \geq n - \beta(G)$  e  $n - \alpha(G) \geq \beta(G)$ . Quindi  $\alpha(G) + \beta(G) = n$ . ■

Esistono decine di dimostrazioni del Teorema di König (e di quello, equivalente, di Hall): quella che presentiamo è di fatto una applicazione quasi immediata del Teorema di decomposizione di Dilworth (Teorema 2.6) per gli insiemi parzialmente ordinati (per una dimostrazione più interna alla teoria dei grafi si veda l'esercizio 3.49).

La procedura per associare una relazione d'ordine ad un grafo bipartito  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  è abbastanza naturale: i due insiemi  $V_1$  e  $V_2$  fungeranno da 'livelli' e la relazione d'ordine determinata dagli archi: precisamente, si definisce la relazione  $\leq$  su  $V = V_1 \cup V_2$  ponendo, per ogni  $x, y \in V$ ,  $x \leq y$  se e solo se  $x = y$  oppure  $x \in V_1, y \in V_2$  e  $\{x, y\} \in E$ . Nel poset (insieme parzialmente ordinato)  $(V, \leq)$  le antcatene sono, per definizione, i sottoinsiemi stabili del grafo  $G$  mentre le catene sono composte da singoli vertici o (coincidendo con uno degli archi di  $G$ ) hanno lunghezza al più 2. Infine, osserviamo che insiemi di catene indipendenti di lunghezza 2 non sono altro che accoppiamenti in  $G$ .

**Teorema 3.14.** (König) *Sia  $G$  un grafo bipartito con almeno due vertici. Il massimo numero di lati di un accoppiamento di  $G$  coincide con  $\beta(G)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $G = (V, E)$  un grafo bipartito con  $V = V_1 \cup V_2$  e  $|V| = n$  vertici, e consideriamo il poset ad esso associato  $(V, \leq)$  come descritto sopra. Poiché le antcatene in tale poset sono i sottoinsiemi stabili di  $G$ , dal Teorema 2.6 di Dilworth si deduce che  $V$  si ripartisce in  $\alpha(G)$  catene indipendenti.

Sia  $a$  il numero di catene di lunghezza 2 e  $b$  quello di catene di lunghezza 1 in una tale decomposizione di  $V$ ; allora  $\alpha(G) = a + b$ , e quindi  $n = 2a + b = a + \alpha(G)$ . D'altra parte, per la Proposizione 3.13,  $\alpha(G) + \beta(G) = n$ ; dunque  $\beta(G) = a$ . Ora,  $a$  è la cardinalità massima di una famiglia di catene indipendenti di lunghezza 2 nel poset  $(V, \leq)$ , quindi, per quanto osservato sopra, è la cardinalità massima di un accoppiamento nel grafo  $G$ . ■

Come promesso, dal Teorema di König possiamo ora dedurre facilmente quello di Hall. Per enunciarlo, dobbiamo introdurre ancora nuove notazioni.

Sia  $v$  un vertice del grafo  $G = (V, E)$ ; denotiamo con  $N_G(v)$  l'insieme dei vertici di  $G$  adiacenti a  $v$ , cioè l'insieme dei  $w \in V$  tali che  $\{v, w\} \in E$ . Se  $S$  è un sottoinsieme dell'insieme  $V$  dei vertici di  $G$ , denotiamo con  $N_G(S)$  l'insieme dei vertici di  $G$  che sono adiacenti ad almeno un elemento di  $S$ , ovvero  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ .

**Teorema 3.15.** *Sia  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito, con  $|V_1| \leq |V_2|$ . Allora  $G$  ha un accoppiamento ottimale se e soltanto se  $|N_G(S)| \geq |S|$  per ogni sottoinsieme  $S$  di  $V_1$ .*

DIMOSTRAZIONE. Se  $G$  ha un accoppiamento ottimale, è chiaro che la condizione dell'enunciato è soddisfatta.

Viceversa, supponiamo che  $|N_G(S)| \geq |S|$  per ogni sottoinsieme  $S$  di  $V_1$ , e sia  $U$  una copertura di  $G$ . Sia  $S = V_1 \setminus U$ ; allora, poiché ogni lato di  $G$  ha almeno un estremo in  $U$ ,  $N_G(S) \subseteq U \cap V_2$ . Dunque  $|U \cap V_2| \geq |N_G(S)| \geq |S| = |V_1| - |U \cap V_1|$ , e quindi

$$|U| = |U \cap V_1| + |U \cap V_2| \geq |U \cap V_1| + (|V_1| - |U \cap V_1|) = |V_1|.$$

Pertanto  $\beta(G) \geq |V_1|$ , e per il Teorema di König si conclude che  $G$  ha un accoppiamento ottimale. ■

Di solito, si parla dei teoremi di König e di Hall come di teoremi "equivalenti"; intendendo con ciò che ciascuno si può dedurre in modo abbastanza agevole dall'altro (esercizio ?? – mentre

nell'esercizio 3.41 si tratteggia una dimostrazione diretta del teorema di Hall). Entrambi poi discendono piuttosto facilmente dal Teorema di Menger, che vedremo nel prossimo capitolo.

**Sistemi di rappresentanti.** Il teorema di Hall ha applicazioni in varie parti della matematica e, a seconda del contesto, può assumere diverse formulazioni, a volte apparentemente lontane dalla teoria dei grafi. Vediamone una delle più comuni. Sia  $\mathcal{F} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$  una famiglia (precisamente, una  $n$ -upla) di sottoinsiemi (non necessariamente distinti) di un insieme  $X$ ; un *sistema di rappresentanti distinti* (SDR) di  $\mathcal{F}$  è una  $n$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  di elementi distinti di  $X$  tale che  $a_i \in A_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema 3.16.** (P. Hall) *Una famiglia  $\mathcal{F} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$  di sottoinsiemi dell'insieme  $X$  ammette un sistema di rappresentanti distinti se e soltanto se*

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S| \quad \text{per ogni } S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  è un sistema di rappresentanti distinti della famiglia di insiemi, allora per ogni  $\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  si ha  $\bigcup_{i \in S} A_i \supseteq \{a_i \mid i \in S\}$ , e poiché gli  $a_i$  sono a due a due distinti la condizione di Hall è soddisfatta.

Per il viceversa, consideriamo il grafo bipartito  $G$  sui vertici  $V_1 = X$  e  $V_2 = \{1, 2, \dots, n\}$  (possiamo supporre  $V_1$  e  $V_2$  disgiunti), dove due vertici  $x \in X$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$  sono adiacenti se e solo se  $x \in A_i$ . Allora, per ogni  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $|\bigcup_{i \in S} A_i| = |N_G(S)|$ , e la condizione di Hall implica, per il Teorema 3.15, che esiste un accoppiamento ottimale di  $G$ . I vertici in  $X$  dei lati che formano tale accoppiamento costituiscono un sistema di rappresentanti distinti per la famiglia  $A_1, \dots, A_n$ . ■

Alla teoria che abbiamo sviluppato sugli accoppiamenti nei grafi bipartiti, si possono ricondurre anche altri problemi di assegnazione, solo apparentemente più complessi. Come, ad esempio, quelli in cui sono ammesse assegnazioni multiple. Un caso tipico è quello del giorno libero. All'inizio dell'anno scolastico il preside di una scuola predispone l'orario delle lezioni, assegnando ad ogni insegnante un giorno libero settimanale (scelto dal Lunedì al Sabato); preventivamente, egli chiede ad ogni insegnante di indicare una preferenza per due fra i sei giorni disponibili. Qual'è il massimo numero di docenti che il preside è in grado di soddisfare, tenendo conto che per ciascun giorno della settimana al più cinque insegnanti possono avere quello come giorno libero? Il preside può procedere in questo modo: disegna un grafo bipartito in cui da una parte mette i docenti della scuola, e dall'altra parte sistema *cinque diversi punti* per ciascun giorno della settimana, per un totale quindi di 30 vertici; quindi traccia i lati che rappresentano le preferenze degli insegnanti, avendo cura, se ad esempio l'insegnante  $x$  desidera il Martedì, di congiungere il vertice  $x$  con tutti e cinque i vertici del Martedì. In questa maniera egli riconduce il suo problema a quello di un grafo bipartito, e può usare la teoria di questo paragrafo (e l'algoritmo che trovate nella sezione degli esercizi).

Di fatto, sulla base di questa osservazione, il preside può anche disegnare solo un grafo con un solo vertice per ogni giorno della settimana, ed applicare la seguente proposizione, che non è difficile dedurre dal teorema di Hall.

**Proposizione 3.17.** *Sia  $G$  un grafo bipartito sull'insieme di vertici  $V_1 \cup V_2$ , allora condizione necessaria e sufficiente per poter associare ogni elemento di  $V_1$  ad un vertice adiacente di  $V_2$*

in modo che ciascun elemento di  $V_2$  risulti assegnato a non più di  $d$  elementi di  $V_1$ , è che, per ogni sottoinsieme  $S$  di  $V_1$ , si abbia:

$$|N_G(S)| \geq \frac{1}{d}|S|.$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. ■

*Matrici stocastiche.* Come applicazione del teorema di Hall, proviamo un paio di teoremi riguardanti la rappresentazione di importanti classi di matrici. Ricordiamo che una matrice  $A$   $n \times n$  è una *matrice di permutazione* se ha coefficienti in  $\{0, 1\}$  ed ha esattamente un coefficiente 1 in ogni riga ed in ogni colonna. La matrice  $A = (a_{ij})$  si dice *matrice doppiamente stocastica* se i coefficienti  $a_{ij}$  sono numeri reali non negativi e se, per ogni  $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} = 1 = \sum_{j=1}^n a_{kj}$$

ovvero se la somma degli elementi di ogni riga e colonna di  $A$  è uguale ad 1.

**Teorema 3.18.** *Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti in  $\{0, 1\}$ . Supponiamo che, per un dato  $k \leq n$ ,  $A$  abbia esattamente  $k$  coefficienti 1 in ogni riga ed in ogni colonna. Allora  $A = P_1 + P_2 + \dots + P_k$ , con  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , matrici di permutazione.*

DIMOSTRAZIONE. Per induzione su  $k$ . Se  $k = 1$ , allora  $A = P_1$  è una matrice di permutazione. Supponiamo  $k \geq 2$ . Sia  $X = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  l'insieme delle righe di  $A$  e  $Y = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  l'insieme delle colonne di  $A$ . Definiamo un grafo bipartito  $G = (X \cup Y, E)$  ponendo  $\{R_i, C_j\} \in E$  se il coefficiente di posto  $(i, j)$  di  $A$  è 1. Per l'ipotesi su  $A$ ,  $G$  è  $k$ -regolare. Come conseguenza del Teorema di Hall (vedi Esercizio 3.16), esiste un'accoppiamento perfetto  $A = \{(R_1, C_{j_1}), (R_2, C_{j_2}), \dots, (R_n, C_{j_n})\}$ . Definiamo  $P_1$  come la matrice a coefficienti  $\{0, 1\}$  con coefficienti 1 nelle posizioni  $A = \{(1, j_1), (2, j_2), \dots, (n, j_n)\}$ . Osserviamo che  $P_1$  è una matrice di permutazione e che  $A - P_1$  ha esattamente  $k$  coefficienti 1 in ogni riga ed ogni colonna. Concludiamo applicando l'ipotesi induttiva. ■

Ricordiamo che una combinazione lineare  $\sum_{i=1}^m c_i v_i$  di elementi  $v_1, v_2, \dots, v_m$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  si dice *convessa* se  $c_i \geq 0$  per ogni  $1 \leq i \leq m$  e  $\sum_{i=1}^m c_i = 1$ .

**Teorema 3.19** (Birkhoff-VonNeumann). *Ogni matrice doppiamente stocastica è combinazione convessa di matrici di permutazione*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice  $n \times n$  doppiamente stocastica. Procediamo per induzione sul numero  $k$  di elementi  $\neq 0$  di  $A$ . Dato che ogni riga (o colonna) di  $A$  contiene un elemento diverso da zero, chiaramente  $k \geq n$ . Se  $k = n$ ,  $A$  è una matrice di permutazione e non c'è niente da dimostrare. Definiamo un grafo bipartito  $G = (X \cup Y, E)$  con  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  l'insieme delle righe di  $A$ ,  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  l'insieme delle colonne di  $A$  e ponendo  $\{X_i, Y_j\} \in E$  se e solo se  $a_{ij} \neq 0$ .

Per ogni  $S \subseteq X$ , la somma degli elementi della sottomatrice  $A_S$  determinata da  $S$  è al più  $|N_G(S)|$ , in quanto la somma di un qualunque sottoinsieme di una colonna  $Y_j$  è compreso fra 0 e 1. Dato che la somma degli elementi di  $A_S$  è uguale ad  $|S|$  (poiché la somma su ogni riga è 1), segue  $|N_G(S)| \geq |S|$ . Per il Teorema di Hall, esiste quindi un accoppiamento perfetto in

$G$  e quindi una  $n$ -upla  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  di elementi  $\neq 0$  di  $A$  tale che ogni riga ed ogni colonna di  $A$  contiene esattamente uno dei  $b_i$ . Sia  $P$  la corrispondente matrice di permutazione e sia  $b = \min(\{b_1, b_2, \dots, b_n\})$ . Osserviamo che  $b > 0$  e che  $b = 1$  se e solo se  $k = n$  e  $A = P$ . Possiamo quindi supporre  $b < 1$ . Poniamo  $B = A - bP$ . Allora  $A' = \frac{1}{1-b}B$  è una matrice doppiamente stocastica con numero di coefficienti  $\neq 0$  minore di  $k$  e  $A = bP + (1-b)A'$ . Si conclude applicando l'ipotesi induttiva. ■

**Esercizio 3.12.** Sia  $A \subseteq E$  un accoppiamento nel grafo  $G = (V, E)$  (non necessariamente bipartito), allora  $|A| \leq \beta(G)$ .

**Esercizio 3.13.** Sia  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito, con  $|V_1| = n$ , e tale che per ogni  $1 \leq k \leq n$  esiste un vertice  $v_k \in V_2$  il cui grado è  $k$ . Si provi che  $G$  ammette un accoppiamento ottimale.

**Esercizio 3.14.** Sia  $A$  una matrice a coefficienti in  $\{0, 1\}$ . Si provi che il minimo numero di linee (righe o colonne) che contengono tutti gli 1 della matrice è uguale al massimo numero di 1 che compaiono a due a due in linee diverse (così a volte viene enunciato il Teorema di König).

**Esercizio 3.15.** Sia  $H$  un sottogruppo di indice finito  $n$  del gruppo  $G$ . Un insieme di  $n$  elementi  $\mathcal{S} = \{g_1, \dots, g_n\}$  di  $G$  è detto un *sistema di rappresentanti* delle classi laterali destre modulo  $H$ , se  $\{Hg_i \mid i = 1, \dots, n\}$  è l'insieme di tutte le classi laterali destre di  $G$  modulo  $H$  (ovvero, se  $G$  è l'unione disgiunta  $G = Hg_1 \cup \dots \cup Hg_n$ ). Analogamente,  $\mathcal{S}$  si dirà un sistema di rappresentanti delle classi laterali sinistre modulo  $H$ , se  $\{g_iH \mid i = 1, \dots, n\}$  è l'insieme di tutte le classi laterali sinistre di  $G$  modulo  $H$ . Si provi che, per ogni sottogruppo  $H$  di indice finito  $n$  in  $G$ , esiste un insieme di  $n$  elementi di  $G$  che è contemporaneamente un sistema di rappresentanti delle classi laterali destre, ed un sistema di rappresentanti delle classi laterali sinistre modulo  $H$ .

**Esercizio 3.16.** Si provi che un grafo bipartito regolare ammette sempre un accoppiamento ottimale. Più in generale, sia  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito tale che tutti i vertici di  $V_1$  hanno lo stesso grado, così come tutti quelli di  $V_2$  (ma i due gradi possono essere diversi); si provi che  $G$  ammette un accoppiamento ottimale.

**Digressione: perché i sessi sono due.** Supponiamo che gli abitanti di un diverso pianeta, che (per non sprecare fantasia) chiameremo Olosac, si suddividano in tre sessi, e che i rapporti sentimentali e le "storie" avvengano necessariamente per triadi, e non per coppie, di individui appartenenti ciascuno ad uno dei tre diversi sessi<sup>4</sup>. Il problema dei matrimoni su Olosac sarebbe quindi esposto nel modo seguente:

Sia  $G$  un grafo in cui l'insieme dei vertici è ripartito in tre sottoinsiemi  $A, B$ , e  $C$  (i tre sessi), ed i cui lati (le reciproche simpatie individuali tra vertici di sesso diverso) hanno gli estremi in due insiemi diversi della partizione (un grafo del genere si chiama grafo *tripartito*). Qual è il massimo numero di triangoli indipendenti (cioè, a due a due privi di vertici in comune) che è possibile trovare nel grafo? Supponendo - per semplicità - che ci sia lo stesso numero  $n$  di individui di ciascun sesso, esistono condizioni necessarie e sufficienti facilmente controllabili affinché si trovino  $n$  triangoli indipendenti (e che quindi ognuno si possa atternare secondo le proprie inclinazioni)?

<sup>4</sup>In verità, anche su Olosac si formano triadi omo- o bi-sessuali: ma sempre a tre a tre ci si mette. Il due è aborrito dagli abitanti di quel lontano pianeta.

Innanzitutto osserviamo che, su Olosac, combinare anche *un solo* matrimonio (a tre) può essere un problema persino per la matematica. Con due sessi, è sufficiente una reciproca simpatia tra due individui. Su Olosac le cose possono essere molto più infelici che da noi: la Figura 3.12 mostra un caso in cui tra 9 individui (3 per sesso) vi sono 13 simpatie tra coppie, ma nessun triangolo (con gli stessi vertici e la stessa tripartizione, è possibile anche trovare grafi con 18 lati e nessun triangolo - se ne cerchi uno per esercizio - i quali però presentano dei comportamenti 'anomali', ad esempio che ogni vertice in  $A$  sia connesso soltanto a vertici di  $B$  o di  $C$ ).

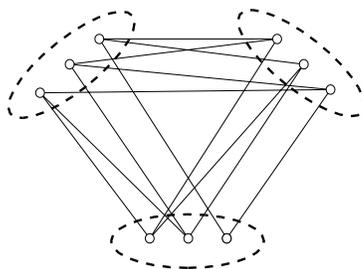


Figura 3.12: un caso di malasorte su Olosac

Detto questo, ci viene, però, il dubbio che forse la psicologia degli abitanti di Olosac sia strutturata in modo che le simpatie tra individui non derivino dalla sovrapposizione fortunata di preesistenti simpatie a coppie, ma nascano quasi naturalmente soltanto come simpatie tra terne, e che anzi le simpatie tra coppie di individui di diverso sesso siano viste come disdicevoli (per quanto in genere tollerate durante l'età adolescenziale). Possiamo, continuando di questo passo, immaginare allora che gli olosacchiani (sempre che ne rimanga loro il tempo) abbiano sviluppato una matematica meno 'binaria' della nostra; nella quale un triangolo sia una cosa del tutto naturale, almeno quanto, e forse anche più, che un segmento. Se così è, la 'nostra' definizione di grafo deve apparire bizzarra agli occhi degli olosacchiani, per i quali la definizione naturale potrebbe invece essere:

- un *olografo*  $\Delta = (V, T)$ , è un insieme di vertici  $V$  ed un insieme di terne  $\{v_1, v_2, v_3\}$  di elementi distinti di  $V$  dette *triadi*, etc. etc.

Un olografo arriva dunque già provvisto di triangoli (o, per usare il termine olosacchiano, triadi), altrimenti è banale (dal nostro punto di vista, un olografo non ha lati che non siano nel bordo di un triangolo). In un testo di teoria degli olografi il primo teorema è:

**Teorema.** Per ogni vertice  $v$  di un olografo  $\Delta = (V, T)$ , sia  $d_{\Delta}(v)$  il numero di triadi incidenti a  $v$ . Allora  $\sum_{v \in V} d_{\Delta}(v) = 3|T|$ .

A questo punto, un olografo  $\Delta$  si dice tripartito se l'insieme dei suoi vertici è unione disgiunta di tre sottoinsiemi non vuoti  $A \cup B \cup C$ , ed ogni triade di  $\Delta$  ha esattamente un vertice in ogni componente. Un *interzamento* di un olografo tripartito  $\Delta$  è una famiglia di triadi di  $\Delta$  che a due a due non hanno vertici in comune. È possibile trovare (come nel teorema di König) in altro modo quale sia il numero di triadi di un interzamento massimo in un olografo tripartito?

L'idea di copertura si può anche definire allo stesso modo: una *copertura* di un olografo è un insieme  $U$  di vertici tale che ogni triade dell'olografo è incidente ad almeno un vertice di  $U$ . Con questa definizione, l'analogo del teorema di König non funziona: la figura 3.13 mostra un olografo tripartito in cui gli interzamenti massimi sono costituiti da un'unica triade, ma in cui il minimo numero di vertici di una copertura è 2.

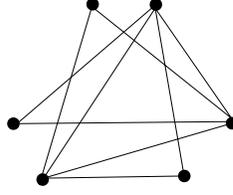


Figura 3.13: un olografo tripartito

Non sono riuscito a trovare un possibile corrispondente del teorema di König per gli olografi. Per quanto riguarda il teorema di Hall, l'ovvia (per noi, non sappiamo quanto per un olosacchiano) condizione necessaria per l'esistenza di un interzamento completo, cioè che per ogni sottoinsieme di vertici (di ciascun sesso) esistano almeno un pari numero di triadi che sono incidenti a vertici di quell'insieme, non è sufficiente: l'esempio in figura 3.13 lo dimostra.

Ma il peggio deve ancora venire. Anche se noi non siamo in grado di trovare delle condizioni esprimibili in modo semplice che siano equivalenti all'esistenza di un interzamento completo, possiamo chiederci se esiste un algoritmo efficiente (come è il caso dell'algoritmo ungherese per grafi bipartiti che trovate descritto più avanti) il quale, dato un olografo tripartito ne determina un interzamento massimo. È stato provato che questo problema è NP-completo; ovvero dello stesso tipo di complessità del problema del cammino hamiltoniano. Qualcosa di presumibilmente intrattabile dal punto di vista di un algoritmo ottimale, e comunque concettualmente assai diverso dal caso, tutto sommato semplice, degli accoppiamenti. Nell'eventualità che qualcuno avesse intenzione di lagnarsi di come vanno le cose sulla terra.

### 3.4 Esercizi e complementi.

**Esercizio 3.17.** Si trovino, a meno di isomorfismi, tutti gli alberi con 6 e con 7 vertici.

**Esercizio 3.18.** Sia  $G_0$  una foresta. Si costruisca un grafo  $G$  aggiungendo un nuovo vertice  $v$  a  $G_0$ , e congiungendo  $v$  con tutti e soli i vertici di grado dispari di  $G_0$ . Si provi che  $G$  è un grafo casualmente euleriano per  $v$ .

**Esercizio 3.19.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso e tale che  $\sum_{v \in V} d_G(v) > 2|V|$ . Si provi che  $G$  ha almeno due cicli diversi.

**Esercizio 3.20.** Sia  $G$  un albero con 45 vertici, dei quali 3 sono di grado 5, 4 di grado 4, 5 di grado 3, e nessuno di grado superiore. Quanti sono in  $G$  i vertici di grado 1, e quanti quelli di grado 2?

**Esercizio 3.21.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso. Siano  $V_1$  l'insieme dei vertici di grado 1, e  $W$  quello dei vertici di grado maggiore o uguale a 3. Si provi che se

$$|V_1| \geq \sum_{v \in W} d_G(v)$$

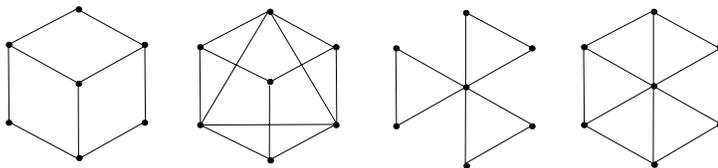
allora  $|W| = 1$  e  $G$  è un albero con un solo vertice di grado 3, oppure  $|W| = 0$  e  $G$  è un albero con due vertici di grado 1 (e quindi è un grafo  $P_n$ ) o è isomorfo al ciclo  $C_n$ .

**Esercizio 3.22.** Sia  $G$  un albero, e denotiamo con  $\kappa$  la lunghezza massima di un cammino (semplice) di  $G$ . Sia quindi

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{\kappa-1} e_\kappa v_\kappa$$

un cammino di lunghezza massima in  $G$ . Si provi che  $v_0$  e  $v_\kappa$  sono vertici di grado 1. Si supponga che  $\kappa = 2t$  sia pari, e sia  $v = v_t$  il vertice "centrale" del cammino dato; si provi che ogni altro cammino di lunghezza  $\kappa$  di  $G$  passa per  $v$ . Cosa si può dire se  $\kappa$  è dispari?

**Esercizio 3.23.** Per ciascuno dei seguenti grafi dire (giustificando le risposte); i) se è vero che il grafo ammette almeno tre spanning-trees tra loro non isomorfi; ii) se è possibile decomporre il grafo in due spanning-trees che non abbiano lati in comune.



**Esercizio 3.24.** Sia  $G$  un grafo. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

- 1) gli spanning-tree di  $G$  hanno tutti lo stesso numero di vertici di grado 1;
- 2) gli spanning-tree di  $G$  hanno tutti lo stesso numero di lati;
- 3) gli spanning-tree di  $G$  hanno tutti lo stesso diametro.

**Esercizio 3.25.** Sia  $G$  un grafo connesso, e siano  $T_1 = (V, E_1)$  e  $T_2 = (V, E_2)$  due spanning-trees distinti di  $G$ . Sia  $e_1$  un lato di  $T_1$  che non appartiene a  $T_2$ ; provare che esiste un lato  $e_2$ , appartenente a  $T_2$  ma non a  $T_1$ , tale che  $T = (V, (E_2 \setminus \{e_2\}) \cup \{e_1\})$  è uno spanning-tree di  $G$ .

**Esercizio 3.26.** Sia  $G$  un grafo semplice connesso e finito, e sia  $v$  un vertice fissato di  $G$ . Si provi che  $G$  ammette uno spanning-tree  $A$  tale che  $d_G(v, x) = d_A(v, x)$  per ogni altro vertice  $x$  di  $G$ .

**Esercizio 3.27.** Si provi che un grafo connesso in cui ogni vertice ha grado pari ha uno spanning-tree in cui ogni vertice ha grado 1 o pari. Si dia un esempio di un grafo connesso con tutti i vertici di grado dispari tale che ogni suo spanning-tree ha almeno un vertice di grado pari.

**Esercizio 3.28.** Supponiamo di aver colorato ogni lato di un grafo completo  $K_n$  con uno di due colori dati (diciamo: rosso o verde). Si provi che esiste uno spanning-tree di  $K_n$  monocromo.

**Esercizio 3.29.** Siano  $n, k$  interi positivi non nulli, e sia  $V$  l'insieme delle parole di lunghezza  $k$  in un alfabeto con  $n$  simboli. Ad ogni lato del grafo completo il cui insieme dei vertici è  $V$  assegnamo un costo pari al numero di posizioni in cui le lettere che compongono le due parole agli estremi del lato sono diverse. Qual è il costo di uno spanning-tree minimo?

**Esercizio 3.30.** Si provi che non esiste una mappa con cinque regioni a due a due confinanti (questo è il problema posto nel 1840 da Mobius, al quale è a volte erroneamente attribuita la congettura dei quattro colori).

**Esercizio 3.31.** Si provi che l'ipercubo  $Q_n$  è planare se e solo se  $n = 2, 3$ .

**Esercizio 3.32.** Si provi che  $K_{n,m}$  è hamiltoniano se e soltanto se  $n = m$ . Si provi che se  $|n - m| = 1$  allora  $K_{n,m}$  ha un cammino (ma non un circuito) hamiltoniano.

**Esercizio 3.33.** In quanti modi diversi è possibile disporre 4 donne e 4 uomini attorno ad un tavolo, in modo che ognuno abbia accanto a sé persone dell'altro sesso? (ovvero: quanti sono i circuiti hamiltoniani distinti nel grafo bipartito completo  $K_{4,4}$ ?).

**Esercizio 3.34.** Sia  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito  $k$ -regolare con almeno 3 vertici. Si provino le seguenti affermazioni:

- 1)  $|V_1| = |V_2|$ ;
- 2) Se  $k = 2$ , allora ogni componente connessa di  $G$  è un ciclo di lunghezza pari;
- 3) Se  $k \geq 2$  e  $G$  è connesso, allora  $G - e$  è connesso per ogni lato  $e \in E$ .

**Esercizio 3.35.** Si costruisca un grafo bipartito planare regolare 3-regolare con 12 vertici. Si provi che per ogni  $n$  pari esiste un un grafo bipartito planare regolare 3-regolare con  $2n$  vertici.

**Esercizio 3.36.** Sia  $G$  un grafo connesso e bipartito. Si provi che esiste una sola partizione dell'insieme  $V$  dei vertici rispetto alla quale  $G$  è bipartito.

**Esercizio 3.37.** Sia  $G$  un grafo bipartito e sia  $d \geq 2$  il minimo tra i gradi dei vertici di  $G$ . Si provi che  $G$  ha un ciclo di lunghezza almeno  $2d$ .

**Esercizio 3.38.** Sia  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito, con  $|V_1| \leq |V_2|$ , e sia  $0 \leq d \leq |V_1|$  tale che  $|N_G(S)| \geq |S| - d$  per ogni  $S \subseteq V_1$ . Si provi che  $G$  ammette un accoppiamento formato da  $|V_1| - d$  lati.

**Esercizio 3.39.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo bipartito, e sia  $d$  il massimo grado dei suoi vertici. Si provi che l'insieme  $E$  dei lati si può ripartire in  $d$  accoppiamenti (parziali) disgiunti.

**Esercizio 3.40.** Si provi che  $g(Q_n) = 4$  per ogni  $n \geq 2$ , e che  $Q_n$  è planare se e solo se  $n = 2, 3$ .

**Esercizio 3.41.** La seguente dimostrazione del teorema di Hall è dovuta ad Halmos e Vaughan; se ne completino i dettagli. Sia  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito, con  $|V_1| \leq |V_2|$ , e tale che  $|N_G(S)| \geq |S|$  per ogni sottoinsieme  $S$  di  $V_1$ . Si provi che  $G$  ammette un accoppiamento ottimale procedendo per induzione su  $n = |V_1|$ . Osservato che per  $n = 1$  l'affermazione è banale, si assuma quindi che ogni grafo bipartito con un numero minore di vertici in uno dei due termini della ripartizione verifica il teorema.

- Supponiamo che per ogni  $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$  sia  $|N_G(S)| \geq |S| + 1$ . Si provi che allora  $G$  ha un accoppiamento.

- Supponiamo dunque che esista  $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$  tale che  $|N_G(S)| = |S|$ . Si provi che allora sia il grafo indotto da  $S \cup N_G(S)$ , che quello indotto da  $(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus N_G(S))$ , soddisfano le ipotesi del teorema. Si concluda applicando l'ipotesi induttiva.

**Esercizio 3.42.** Si deduca il Teorema dei matrimoni 3.15 direttamente dal teorema di decomposizione di Dilworth.

**Esercizio 3.43.** Sia  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito con  $|V_1| = m \leq n = |V_2|$ ,  $|E| = q$ , che non ammette un accoppiamento completo. Si trovi quel  $\ell$  il massimo valore che può assumere  $q$ . Si provi che se, inoltre,  $G$  è connesso, allora  $q \leq m(n - 2) + 2$ , e che tale limitazione è la migliore possibile.

**Esercizio 3.44.** I circoli scacchistici  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  si affrontano in una sfida tra due squadre di sette giocatori ciascuna. I punteggi ELO dei componenti le due squadre sono i seguenti:

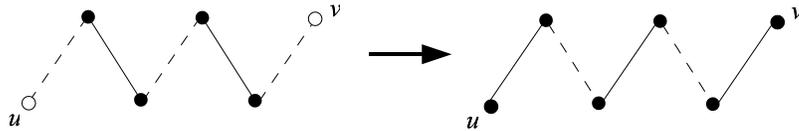
	a	1825		$\alpha$	1918
	b	2040		$\beta$	2024
	c	1912		$\gamma$	1892
squadra $\mathbb{A}$ :	d	1768	squadra $\mathbb{B}$ :	$\delta$	1844
	e	1884		$\epsilon$	1758
	f	2012		$\phi$	2030
	g	1944		$\chi$	1919

Vengono giocati di seguito tre turni, ognuno dei quali comprende sette partite. Preparare la lista delle partite dei tre turni, tenendo conto che in ogni turno si devono giocare (tra quelle possibili: cioè tra avversari che non si sono ancora incontrati) le partite che minimizzano la media delle differenze dei punteggi ELO (in valore assoluto) sulle sette scacchiere.

### Complementi: l'algoritmo ungherese.

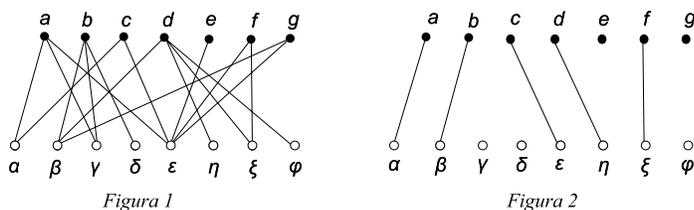
Descriviamo ora un efficiente algoritmo (chiamato *algoritmo ungherese*, e sviluppato da Kuhn negli anni '50), per trovare un accoppiamento massimo in un grafo bipartito. L'idea essenziale (e che già compare nei lavori di König) è quella di utilizzare i *cammini alterni*, come passo per produrre, a partire da un accoppiamento dato, un altro (se esiste) con un maggior numero di lati. Cominciamo con la definizione: sia  $A$  un insieme di lati del grafo  $G = (V, E)$ . Un  $A$ -cammino alternato è un cammino semplice di  $G$ , con almeno un lato, i cui lati appartengono alternativamente a  $E \setminus A$  e ad  $A$ .

D'ora in avanti, assumeremo che  $G$  sia bipartito, e che  $A$  sia un suo accoppiamento dato (non necessariamente massimo). Chiamiamo vertici *saturati* i vertici che sono estremi di qualche elemento di  $A$  e denotiamo con  $V(A)$  il loro insieme. L'osservazione fondamentale è che se un  $A$ -cammino alternato di  $G$  inizia e termina con vertici  $v_0$  e  $v_k$  non saturati da  $A$ , allora togliendo da  $A$  i lati che compaiono in  $\mathcal{C}$ , e rimpiazzandoli con i restanti lati di  $\mathcal{C}$ , si ottiene un accoppiamento  $A'$  che ha un numero di lati maggiore di quello di  $A$ :

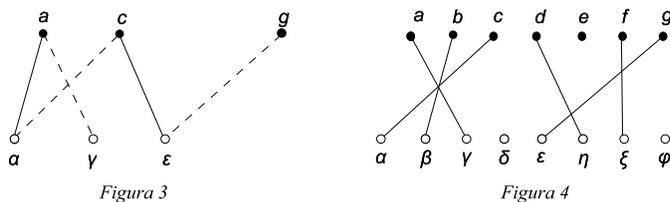


In particolare quindi, se  $A$  è un accoppiamento massimo, allora non esistono  $A$ -cammini alterni i cui vertici estremi sono entrambi non saturati da  $A$ . L'algoritmo ungherese consiste in ripetute applicazioni di questa procedura. Prima di descriverlo formalmente, vediamo come funziona con un esempio.

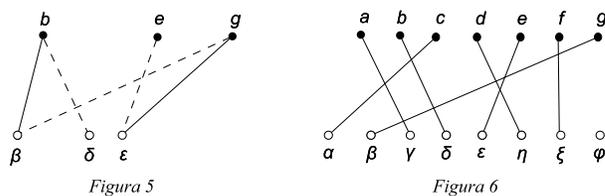
Supponiamo di voler trovare un accoppiamento massimo del grafo bipartito della Figura 1. Il primo passo è quello di trovare un qualsiasi accoppiamento iniziale  $A_0$ . Per fare questo si possono listare i vertici, separatamente per entrambi i due blocchi  $V_1$  e  $V_2$  di vertici della bipartizione (supponiamo  $|V_1| \leq |V_2|$ ), e quindi accoppiare il primo vertice di  $V_1$  con il primo vertice di  $V_2$  a cui esso è adiacente; poi passare al secondo vertice di  $V_1$  ed accoppiarlo al primo vertice ancora disponibile di  $V_2$  e così via: in questo modo, nel nostro esempio, si trova l'accoppiamento di Figura 2. Se in questo modo tutti i vertici di  $V_1$  vengono saturati, allora l'accoppiamento  $A_0$  è già completo e dunque massimo.



Altrimenti, si considera un vertice che non sia saturato dall'accoppiamento: ad esempio, il vertice  $\gamma$ . Si cerca quindi, a partire dal vertice  $\gamma$ , un  $A_0$ -cammino alterno che termini in un altro vertice (nel nostro caso  $g$ ) non saturato da  $A_0$  (Figura 3). Si rimpiazza quindi  $A_0$ , mediante la procedura descritta sopra, con un nuovo accoppiamento  $A_1$  (Figura 4), che ha un lato in più.



Se è ancora possibile (come nel nostro esempio), si ripete la procedura: troviamo che dal vertice  $e$ , non saturato da  $A_1$ , inizia un cammino  $A_1$ -alterno che termina nel vertice non saturato  $\delta$ .



Si rimpiazzano i lati di tale cammino che appartengono ad  $A_1$  con quelli che non vi appartengono, e si ottiene un nuovo e più grande accoppiamento, quello della figura 6. Nell'esempio, tale accoppiamento è completo (dato che tutti i vertici di un blocco sono saturati) e quindi è massimo.

In questo esempio, il risultato finale è stato un accoppiamento ottimale. Ovviamente, non è sempre questo il caso, ma l'algoritmo ungherese fornisce comunque un accoppiamento massimo. Per convincercene, dobbiamo provare che quando esso si arresta, l'accoppiamento al quale è pervenuto è massimo. Ora, l'algoritmo si arresta quando è stato prodotto un accoppiamento  $A$  tale che da nessun vertice non saturato inizia un cammino  $A$ -alterno che termina in un altro vertice non saturato. Da ciò segue che se  $e \in A$ , allora non è possibile che da

entrambi gli estremi di  $e$  partano cammini alterni che terminano in vertici non saturati. Ad ogni  $e \in A$  assegnamo un vertice  $u(e)$  scegliendo  $u(e)$  come il solo estremo di  $e$  dal quale parte un cammino  $A$ -alternato che termina in un vertice non saturato, se questo esiste, altrimenti scegliendo il vertice di  $e$  che appartiene a  $V_1$ . Non è difficile provare che l'assegnazione  $e \rightarrow u(e)$  è iniettiva e che  $\{u(e) \mid e \in A\}$  è una copertura di  $G$  (vedi anche esercizio 3.49). Per il Teorema di König si conclude che  $A$  è un accoppiamento massimo.

Diamo ora una descrizione più formale dell'algoritmo. Sia  $G = (V, E)$  un grafo bipartito con almeno un lato. Se  $A$  è un accoppiamento e  $v$  un vertice non saturato, chiamiamo albero  $A$ -alternato passante da  $v$ , un sottoalbero di  $G$  in cui tutti i cammini che partono da  $v$  sono  $A$ -alterni. Dato un vertice  $v$  di  $G$  è sempre possibile costruire un albero  $A$ -alternato passante da  $v$  e che sia massimale con queste proprietà (si può usare un algoritmo tipo spanning-tree).

*Algoritmo ungherese*

---

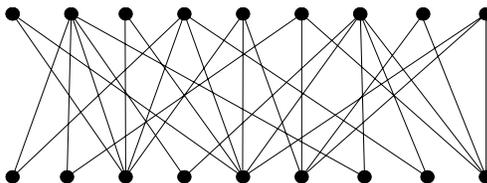
PASSO 1	Costruisci un qualsiasi accoppiamento $A$ di $G$ , e poni $S = V$ .
PASSO 2	Se ogni $v \in S$ è saturato da $A$ , stop e dai $A$ in output. Altrimenti vai al passo 3.
PASSO 3	Dato $v \in S$ non saturato da $A$ , costruisci un albero $A$ -alternato massimale passante per $v$ . <ul style="list-style-type: none"> <li>– Se l'albero contiene un <math>A</math>-cammino alternato in cui entrambi gli estremi non sono saturati, sostituisci in <math>A</math> i lati che appartengono al cammino con gli altri lati del cammino; poni <math>S = V</math>, quindi torna al passo 2.</li> <li>– Se l'albero non contiene <math>A</math>-cammini alterni, poni <math>S = S \setminus \{v\}</math>, e torna al passo 2.</li> </ul>

---

In alcune applicazioni è possibile che ad ogni lato del grafo bipartito sia assegnato un "costo". In tal caso l'algoritmo ungherese può essere adattato ad un algoritmo che determina un accoppiamento massimale di costo minimo.

**Esercizio 3.45.** Tra ciascuno dei cavalieri Orlando, Rinaldo, Ruggiero, Brandimarte, Oliviero, Ferrau, e ciascuna delle ragazze Angelica, Bradamante, Fiordiligi, Doralice, Alcina e Morgana, corre un reciproco interesse sentimentale se (e solo se) nei loro nomi vi è una sequenza uguale di due lettere. Dire se è possibile combinare 6 fidanzamenti. Se Ferrau si fida con Doralice, con chi si deve fidanzare Orlando?

**Esercizio 3.46.** Utilizzando l'algoritmo ungherese trovare un accoppiamento massimo per il seguente grafo:



**Esercizio 3.47.** Si delinei un algoritmo che, a partire da una qualunque copertura di un grafo bipartito, trovi una copertura minima (senza ricorrere direttamente all'algoritmo ungherese).

**Esercizio 3.48.** Otto studenti intendono leggere almeno uno tra i libri  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ , dei quali la biblioteca possiede una copia ciascuno, secondo la seguente tabella di preferenze.

	Aldo	Bice	Ciro	Dina	Elsa	Febo	Gina	Hulk
libri	$\alpha \delta$	$\beta \epsilon$	$\gamma \delta$	$\alpha \epsilon$	$\beta \delta$	$\delta \epsilon$	$\alpha \beta$	$\gamma \epsilon$

Sapendo che il prezzo dei libri è di 10 Euro per  $\alpha$  e  $\beta$ , 13 Euro per  $\gamma$ , 16 per  $\delta$ , e 19 per  $\epsilon$ , dire con quale minima spesa la biblioteca è in grado di assecondare tutti e otto gli studenti. Qual'è la spesa minima per poter soddisfare, in due turni di prestito, entrambe le scelte di ogni studente?

**Esercizio 3.49.** Siano  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito e  $A \subseteq E$  un accoppiamento massimo di  $G$ . Un vertice di  $G$  è *saturato* (da  $A$ ) se appartiene a qualche, e quindi ad uno solo, lato in  $A$ ; un cammino semplice in  $G$  con almeno un lato:  $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$  è *A-alterno*, se il primo lato  $e_1$  non appartiene ad  $A$ , e i lati successivi appartengono alternativamente ad  $A$  e ad  $E \setminus A$ .

- (a) Si provi che l'ipotesi di massimo di  $A$  implica che non esistono cammini  $A$ -alterni che iniziano e terminano in vertici entrambi non saturati da  $A$ .
- (b) Si deduca che se  $e \in A$  non è possibile che da entrambi gli estremi di  $e$  partano cammini  $A$ -alterni che terminano in vertici non saturati da  $A$ .
- (c) Ad ogni  $e \in A$  si associ un suo estremo  $u(e)$  nel modo seguente:  $u(e)$  è il solo estremo di  $e$  dal quale parte un cammino alterno che termina in un vertice non saturato, se questo esiste, altrimenti  $u(e)$  è il vertice di  $e$  che appartiene a  $V_1$ . Si provi che, posto  $C = \{u(e) \mid e \in A\}$ , si ha  $|C| = |A|$  e  $C$  è una copertura di  $G$ .
- (d) Si dimostri il Teorema di König utilizzando i punti precedenti.



## Capitolo 4

# Reti, flussi, connettività

Nella prima sezione di questo capitolo introdurremo il fondamentale concetto di *flusso* in un grafo diretto e dimostreremo il teorema fondamentale che lo riguarda (Teorema Maxflow–Mincut). Nella sezioni successive ritorneremo allo studio dei grafi non diretti, trattando in forma più generale questioni relative all’esistenza di ”molti” cammini nei grafi e discutendo l’estensione a grafi qualsiasi del concetto di accoppiamento. Tali argomenti sono inseriti a questo punto perché, in particolare nella terza sezione, per dimostrare alcuni risultati classici e fondamentali in questo ambito (come il Teorema di Menger), utilizzeremo proprio i teoremi sul flusso in un grafo diretto provati nella prima sezione.

### 4.1 Reti e flussi.

L’idea di rete nasce (fin dai lavori di Kirchhoff del 1845 sulle reti elettriche<sup>1</sup>) da una suggestione di carattere assolutamente pratico: quella di introdurre un modello matematico essenziale per trattare sistemi di trasporto realizzati mediante tratti di condutture ed un certo numero di giunzioni nelle quali due o più condutture confluiscono. Ogni singolo tratto di conduttura ha un predeterminato verso ed una capacità massima; infine, ”qualcosa” scorre nella rete.

L’aspetto sorprendente della teoria sviluppatasi è che tecniche nate per descrivere situazioni eminentemente pratiche abbiano suggerito uno strumento molto versatile e potente per lo studio astratto dei grafi (diretti o no), e non soltanto, come cercheremo di mostrare nella sezione successiva (finora abbiamo suggerito applicazioni ”pratiche” di strumenti nati dalla teoria: nelle prossime pagine, in un certo senso, avverrà qualcosa di contrario).

Se  $R = (V, A)$  è un grafo diretto, e  $v \in V$  è un vertice di  $R$ , denotiamo con  $E(v)$  ed  $U(v)$ , rispettivamente, l’insieme degli archi di  $R$  il cui vertice finale è  $v$ , e quello degli archi dei quali  $v$  è il vertice iniziale.

Una **rete** è un grafo diretto  $R = (V, A, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ , in cui sono evidenziati due vertici  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ , distinti, detti, rispettivamente, la *sorgente* ed il *termine* della rete, e in cui gli archi sono pesati: ovvero è data una funzione  $\mathbf{c} : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , che ad ogni arco  $e$  associa un numero reale non negativo  $\mathbf{c}(e)$  detta *capacità* di  $e$ .

---

<sup>1</sup>Ci crediate o no, Gustav R. Kirchhoff (1824–1887) era nato a Königsberg.

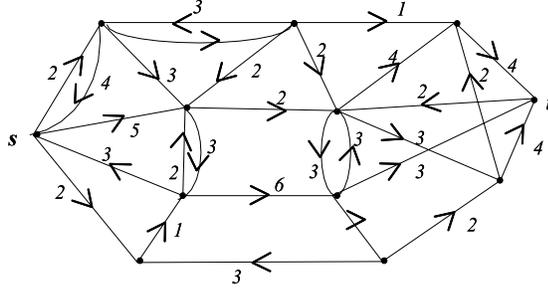


Figura 4.1: una rete

Un **flusso** (in inglese *flow*) per la rete  $R = (V, A, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  è un'applicazione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa alle condizioni

- i)  $0 \leq f(e) \leq \mathbf{c}(e)$ , per ogni arco  $e \in A$
- ii)  $\sum_{e \in E(v)} f(e) = \sum_{e \in U(v)} f(e)$ , per ogni vertice  $v \in V$ ,  $v \neq \mathbf{s}, \mathbf{t}$ .

Il **valore** del flusso  $f$  è definito come

$$v(f) = \sum_{e \in U(\mathbf{s})} f(e) - \sum_{e \in E(\mathbf{s})} f(e).$$

Il valore può essere inteso come la misura della quantità di flusso netta che scaturisce (o vi è immessa dall'esterno) alla sorgente. È naturale pensare che questo valore debba coincidere con quello del flusso netto che arriva (o esce) dal termine della rete.

Così è infatti. Per convincercene, osserviamo innanzi tutto che, poiché ogni arco  $e$  ha un solo vertice iniziale ed un solo vertice finale, si ha

$$\sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{v \in V} \sum_{e \in U(v)} f(e) = \sum_{e \in A} f(e) - \sum_{e \in A} f(e) = 0.$$

Quindi, per la proprietà (ii) di  $f$ :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f(e) &= \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f(e) + \sum_{v \neq \mathbf{s}, \mathbf{t}} \left( \sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) = \\ &= \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) + v(f) = v(f) \end{aligned}$$

È conveniente generalizzare questa osservazione. Sia  $S$  un sottoinsieme non vuoto dei vertici di una rete  $R = (V, A, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ . Denotiamo con  $U(S)$  l'insieme degli archi che "escono" da  $S$ , cioè il cui termine iniziale appartiene a  $S$  ma non quello finale; similmente con  $E(S)$  denotiamo l'insieme degli archi che "entrano" in  $S$ . Formalmente:

$$U(S) = \{(u, v) \in A \mid u \in S, v \notin S\}$$

$$E(S) = \{(u, v) \in A \mid u \notin S, v \in S\}$$

**Lemma 4.1.** Sia  $S$  un sottoinsieme di vertici della rete  $R = (V, A, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ . Se  $\mathbf{s} \in S$  ma  $\mathbf{t} \notin S$ , allora per ogni flusso  $f$  per  $R$  si ha

$$\sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e) = v(f).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni arco  $e$  della rete  $R$  denotiamo con  $i(e)$  e  $t(e)$  rispettivamente il vertice iniziale e quello finale di  $e$ , ovvero  $e = (i(e), t(e))$ . Sia ora  $S$  un insieme di vertici contenente  $\mathbf{s}$  ma non  $\mathbf{t}$ , ed  $f$  un flusso per  $R$ . Allora, per la proprietà (ii) dei flussi, e siccome  $\mathbf{t} \notin S$ :

$$v(f) = \sum_{e \in U(\mathbf{s})} f(e) - \sum_{e \in E(\mathbf{s})} f(e) = \sum_{v \in S} \left( \sum_{e \in U(v)} f(e) - \sum_{e \in E(v)} f(e) \right);$$

quindi, riscrivendo la somma del membro di destra,

$$v(f) = \sum_{i(e) \in S} f(e) - \sum_{t(e) \in S} f(e).$$

Ora, in ciascuna delle due sommatorie del membro di destra, possiamo considerare solo il contributo degli archi che non hanno entrambi gli estremi in  $S$ ; questi ultimi, infatti contribuiscono con un  $f(e)$  ad entrambe le somme, e quindi contribuiscono con 0 alla loro differenza. Pertanto

$$v(f) = \sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e)$$

come si voleva. ■

Una **sezione** (in inglese *cut*) della rete  $R$  è un insieme  $C$  di archi tale che ogni cammino diretto da  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{t}$  attraversa un arco di  $C$ .

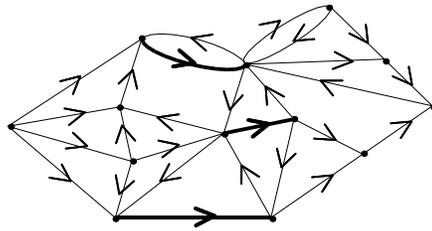


Figura 4.2: un sezione in una rete

**ATTENZIONE:** d'ora in avanti assumeremo che nelle reti  $R$  che consideriamo esista almeno un cammino diretto dalla sorgente  $\mathbf{s}$  al termine  $\mathbf{t}$ , e quindi che le sezioni di  $R$  non possano essere vuote. Da un punto di vista pratico, questa è un'assunzione del tutto scontata, e da quello astratto non è molto limitativa: avremmo potuto facilmente farne a meno, ma questo ci avrebbe costretto ad allungare le dimostrazioni in diversi punti per discutere (in genere in modo banale, ma noioso) il caso di sezioni vuote.

La capacità  $\mathbf{c}(C)$  della sezione  $C$  è la somma delle capacità degli archi che le appartengono:

$$\mathbf{c}(C) = \sum_{e \in C} \mathbf{c}(e).$$

Il problema fondamentale nella teoria dei flussi in una rete è quale sia il valore massimo di un flusso per una data rete  $R$ . È piuttosto intuitivo che il valore di un flusso non possa superare quello che una sezione è in grado di supportare. Con l'aiuto del lemma 4.1, questo fatto si prova abbastanza agevolmente.

**Lemma 4.2.** *Sia  $f$  un flusso per la rete  $R$ , e sia  $C$  una sezione di  $R$ . Allora*

$$v(f) \leq \mathbf{c}(C).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $C$  una sezione della rete  $R$ , e sia  $S$  l'insieme dei vertici di  $R$  che possono essere raggiunti a partire dalla sorgente  $\mathbf{s}$  mediante cammini diretti che non impiegano archi di  $C$ . Per definizione di sezione  $S$ , non contiene  $\mathbf{t}$  (mentre ovviamente contiene  $\mathbf{s}$ ). Sia  $e = (u, w) \in U(S)$  un arco uscente da  $S$ ; allora (poiché  $u \in S$ ) esiste un cammino diretto da  $\mathbf{s}$  ad  $u$  che non contiene archi di  $C$ ; prolungando tale cammino mediante l'arco  $e$  si ottiene un cammino diretto da  $\mathbf{s}$  a  $w$ , che (poiché  $w \notin S$ ) deve, per definizione dell'insieme  $S$ , contenere un arco di  $C$ : la sola possibilità è che  $e \in C$ . Dunque  $U(S) \subseteq C$ . Sia ora  $f$  un flusso per  $R$ . Per il Lemma 4.1 e quanto appena osservato (tenendo presente che  $f$  è a valori positivi),

$$v(f) = \sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e) \leq \sum_{e \in U(S)} f(e) \leq \sum_{e \in C} f(e) \leq \mathbf{c}(C)$$

che è ciò che volevamo provare. ■

A questo punto notiamo che, essendo finito il numero di archi in un rete  $R$ , è finito anche il numero di sezioni di  $R$ , e quindi esiste un valore minimo per la capacità di una sezione. Il lemma precedente asserisce che il valore di un qualunque flusso per  $R$  non può oltrepassare questa capacità minima delle sezioni. Il fatto che esistano sempre flussi per  $R$  il cui valore raggiunge tale limite teorico (Teorema 4.4), è il risultato fondamentale della teoria dei flussi in una rete, ed è chiamato Teorema *Maxflow-Mincut*. Prima di enunciarlo esplicitamente, proviamo un Lemma che enuclea il punto centrale della sua dimostrazione.

Sia  $f$  un flusso per la rete  $R$ ; denotiamo con  $S_f$  l'insieme dei vertici  $v$  di  $R$  tali che esiste una sequenza di vertici ed archi  $\mathbf{s} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{q-1} e_q v_q = v$  con la proprietà che i vertici sono tutti distinti e, per ogni  $i = 1, \dots, q$ , si ha

- $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ , e  $f(e_i) < \mathbf{c}(e)$ ; oppure
  - $e_i = (v_i, v_{i-1})$ , e  $f(e_i) > 0$ .
- (4.1)

Osserviamo che, in ogni caso,  $\mathbf{s} \in S_f$ .

**Lemma 4.3.** *Sia  $f$  un flusso per la rete  $R$ . Se  $\mathbf{t} \in S_f$  allora esiste un flusso  $f'$  per  $R$  tale che  $v(f') > v(f)$ . Se inoltre la capacità di ogni arco di  $R$  è un numero intero ed  $f$  è un flusso intero (cioè  $f(e) \in \mathbb{N}$  per ogni arco  $e$  di  $R$ ), allora esiste un flusso intero  $f'$  con  $v(f') > v(f)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che, dato il flusso  $f$  per  $R$ , si abbia  $\mathbf{t} \in S_f$ . Sia allora

$$\mathcal{P}: \quad \mathbf{s} = v_0 \ e_1 \ v_1 \ e_2 \ \dots \ v_{q-1} \ e_q \ v_q = \mathbf{t}$$

una sequenza di vertici e archi con la proprietà della definizione data sopra.

Denotiamo con  $\vec{A}$  l'insieme degli archi di  $\mathcal{P}$  che "vanno nella giusta direzione", ovvero  $\vec{A} = \{e_i \in \mathcal{P} \mid e_i = (v_{i-1}, v_i)\}$ ; e con  $\overleftarrow{A} = \{e_i \in \mathcal{P} \mid e_i = (v_i, v_{i-1})\}$  l'insieme degli archi di  $\mathcal{P}$  che "vanno in direzione contraria". Poniamo, per ogni arco  $e_i$  di  $\mathcal{P}$ ,

$$\delta(e_i) = \begin{cases} \mathbf{c}(e_i) - f(e_i) & \text{se } e_i \in \vec{A} \\ f(e_i) & \text{se } e_i \in \overleftarrow{A} \end{cases}$$

Per definizione dell'insieme  $S_f$ , abbiamo  $\delta(e_i) > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, q$ , e dunque  $\delta = \min\{\delta(e_i) \mid i = 1, \dots, q\}$  è un numero reale strettamente positivo. Definiamo ora un nuovo flusso  $f'$  ponendo, per ogni arco  $e$  di  $R$

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & \text{se } e \notin \vec{A} \cup \overleftarrow{A} \\ f(e) + \delta & \text{se } e \in \vec{A} \\ f(e) - \delta & \text{se } e \in \overleftarrow{A} \end{cases}$$

La definizione di  $\delta$  assicura che la funzione  $f'$  soddisfa la condizione (i) di un flusso, ed è chiaro che anche la condizione (ii) è soddisfatta da  $f'$ . Osserviamo anche che, se le capacità  $\mathbf{c}(e)$  ed il flusso  $f(e)$  sono numeri interi (per ogni arco  $e$  di  $R$ ), allora  $\delta$  è un intero positivo maggiore o uguale a 1, e  $f'$  è un flusso intero.

Proviamo infine che  $v(f') > v(f)$ . Se  $e_q \in \vec{A}$ , allora  $e_q \in E(\mathbf{t})$ , e quindi si ha

$$v(f') = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f'(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f'(e) = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) + (f'(e_q) - f(e_q)) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f(e) = v(f) + \delta.$$

Similmente: se  $e_q \in \overleftarrow{A}$ , allora  $e_q \in U(\mathbf{t})$ , e quindi

$$v(f') = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f(e) + (f(e_q) - f'(e_q)) = v(f) + \delta,$$

provando così che  $v(f') = v(f) + \delta > v(f)$ . ■

**Teorema 4.4.** (Maxflow–Mincut) *Sia  $R$  una rete. Allora il valore massimo di un flusso per  $R$  è uguale alla minima capacità delle sezioni di  $R$ . Se inoltre le capacità degli archi di  $R$  sono espresse da numeri interi, allora il valore massimo è ottenibile mediante un flusso intero.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo prima che le capacità degli archi di  $R$  siano espresse da numeri interi, ed utilizziamo il Lemma 4.3 come passo di un algoritmo che porta alla determinazione di un flusso  $f$  e di una sezione  $C$  tali che  $v(f) = \mathbf{c}(C)$ . È chiaro allora che, per il Lemma 4.2,  $f$  e  $C$  sono, rispettivamente, un flusso di valore massimo, ed una sezione di capacità minima.

Si parte da un flusso  $f_0$  (è sempre possibile partire dal flusso nullo: ma partendo da un flusso che abbia già un valore apprezzabile, in genere si diminuisce il numero di passi necessari); se

l'insieme  $S_{f_0}$  contiene il termine  $\mathbf{t}$  della rete, allora la dimostrazione del Lemma 4.3 fornisce un metodo effettivo per costruire un flusso intero  $f_1$ , con  $v(f_1) \geq v(f) + 1$ . Se  $\mathbf{t} \in S_{f_1}$ , si procede costruendo un flusso intero  $f_2$ , con  $v(f_2) \geq v(f_1) + 1$ , e così via. Poiché il valore che può assumere un flusso è limitato (dalla capacità di qualsiasi sezione), questo processo si arresta ad un flusso  $f_n = f$ , tale che  $\mathbf{t} \notin S_f$  (eventualmente, se siamo proprio fortunati,  $f = f_0$ ).

Proviamo che  $C = U(S_f)$  è una sezione di  $R$ . Sia  $\mathbf{s} = v_0 \ e_1 \ v_1 \ e_2 \ \dots \ v_{q-1} \ e_q \ v_q = \mathbf{t}$  un cammino diretto da  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{t}$ . Poiché  $\mathbf{t} \notin S_f$ , esiste un massimo  $i \in \{0, \dots, q-1\}$  tale che  $v_i \in S_f$  (eventualmente  $i = 0$ ). Allora  $v_{i+1} \notin S_f$  e quindi  $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \in U(S_f)$ .

Proviamo ora che la capacità di  $U(S_f)$  è uguale al valore di  $f$ . Osserviamo innanzi tutto che, poiché  $\mathbf{s} \in S_f$  e  $\mathbf{t} \notin S_f$ , il Lemma 4.1 assicura che

$$v(f) = \sum_{e \in U(S_f)} f(e) - \sum_{e \in E(S_f)} f(e).$$

Sia  $e = (v, w) \in U(S_f)$ ; allora, siccome  $v \in S_f$ , esiste una sequenza di vertici ed archi da  $\mathbf{s}$  a  $v$  che soddisfa le proprietà (4.1); se fosse  $f(e) < \mathbf{c}(e)$ , allora tale sequenza potrebbe essere prolungata mediante  $ew$ , che darebbe la contraddizione  $w \in S_f$ . Dunque, per ogni  $e \in U(S_f)$ ,  $f(e) = \mathbf{c}(e)$ . Un argomento analogo mostra che per ogni  $e \in E(S_f)$ ,  $f(e) = 0$ . Pertanto

$$v(f) = \sum_{e \in U(S_f)} f(e) - \sum_{e \in E(S_f)} f(e) = \sum_{e \in U(S_f)} \mathbf{c}(e) = \mathbf{c}(C),$$

provando così che  $f$  è un flusso (intero) di valore massimo.

Nel caso generale, ci basta provare l'esistenza di un flusso il cui valore coincide con la minima capacità di una sezione di  $R$ . Sia  $\gamma$  tale minima capacità, che è possibile determinare mediante un numero finito di operazioni. Ora, possiamo approssimare dal basso mediante numeri razionali le capacità di ogni singolo arco di  $R$ ; in tal modo, chiaramente, si approssima anche il valore  $\gamma$  mediante un numero razionale  $\gamma'$ ; poiché il numero di archi è finito, moltiplicando le capacità degli archi per il loro minimo denominatore comune  $d$  otteniamo una rete a capacità intere e capacità minima di una sezione uguale a  $d\gamma'$ ; per il caso precedente esiste un flusso intero per tale rete il cui valore è  $d\gamma'$ ; dividendo tutti i valori di questo flusso per  $d$ , si ottiene un flusso per la rete approssimante il cui valore è  $\gamma'$ . A questo punto, un'applicazione dell'analisi assicura che esiste un flusso  $f$  per  $R$  il cui valore è  $\gamma$  (se non avete ancor studiato la convergenza in uno spazio compatto, potete prendere questo per buono). Infatti, se  $e_1, e_2, \dots, e_q$  sono gli archi della rete, ed  $f$  è un flusso, allora la  $q$ -upla  $(f(e_1), \dots, f(e_q))$  è un elemento dello spazio  $\mathbb{R}^q$  contenuto nel sottoinsieme compatto  $[0, \mathbf{c}(e_1)] \times \dots \times [0, \mathbf{c}(e_q)]$ . La procedura di approssimare  $\gamma$  mediante il valore di reti a razionali produce un insieme di punti in tale spazio che, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, contiene una sottosuccessione convergente. ■

È possibile che, in alcune situazioni, si debba trattare grafi in cui vi è una limitazione alla capacità dei vertici piuttosto che a quella degli archi. Non è troppo difficile derivare dal teorema precedente un analogo risultato per questo caso; l'idea è quella di trattare ogni vertice del grafo come un arco in una opportuna rete. Quindi, supponiamo di avere dato un grafo diretto  $R = (V, A)$ , con due vertici evidenziati  $s$  e  $t$ , ed una funzione di capacità

$\mathbf{c} : V \setminus \{s, t\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . In tal caso, un *flusso* è una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definita sugli archi di  $R$  che soddisfi alla condizione

$$\sum_{e \in E(x)} f(e) = \sum_{e \in U(x)} f(e) \leq \mathbf{c}(x)$$

per ogni  $x \in V \setminus \{s, t\}$  (ovvero, il flusso che "attraversa" ciascun vertice non può superare la capacità del vertice stesso). Il corrispettivo di sezione è un sottoinsieme  $S \subseteq V \setminus \{s, t\}$  di vertici tale che ogni cammino diretto da  $s$  a  $t$  passa per almeno un vertice di  $S$ ; diremo allora che  $S$  *separa*  $s$  da  $t$ .

**Teorema 4.5.** *Sia  $R = (V, A, s, t)$ , con  $V \neq \{s, t\}$ , un grafo diretto con una funzione di capacità sui vertici. Allora, il massimo valore di un flusso per  $R$  è uguale alla capacità minima di un insieme di vertici che separa  $s$  da  $t$ . Se inoltre le capacità in  $R$  sono tutte intere, esiste un flusso intero di valore massimo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Ad  $R$  associamo una rete nel modo seguente. Sdoppiamo ciascun vertice  $x \in V \setminus \{s, t\}$  in due vertici  $x^-$  e  $x^+$ , ed introduciamo un nuovo arco  $(x^-, x^+)$ . I vertici della rete  $R'$  sono dunque  $s, t$  e tutti quelli del tipo  $x^-$  e  $x^+$ . Se  $x, y \in V$  e  $(x, y)$  è un arco di  $R$ , allora  $(x^+, y^-)$  è un arco di  $R'$  (dove s'intende  $s^+ = s^- = s$  e  $t^+ = t^- = t$ ); gli archi di  $R'$  sono tutti questi più tutti quelli del tipo  $(x^-, x^+)$  con  $x \in V \setminus \{s, t\}$  (dunque ogni vertice  $s \neq x \neq t$  di  $R$  è stato rimpiazzato da un arco  $(x^-, x^+)$ , dove al vertice  $x^-$  "arrivano" tutti gli archi che arrivavano in  $x$  e dal vertice  $x^+$  "partono" tutti gli archi che partivano da  $x$ ). Sugli archi di  $R'$  definiamo una capacità  $\mathbf{c}'$  ponendo

$$\mathbf{c}'((x^-, x^+)) = \mathbf{c}(x) \quad \text{per ogni } x \in V \setminus \{s, t\}$$

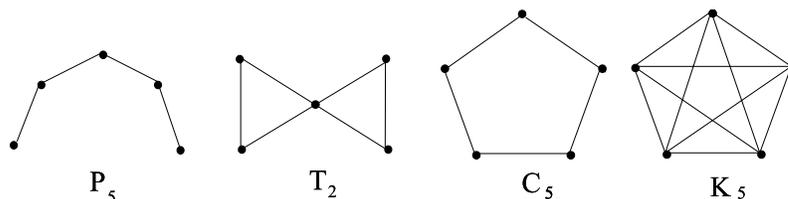
e non assegnando alcuna capacità (ovvero, assegnando loro capacità infinita) agli altri lati. Ora, osserviamo che se  $S \subseteq V \setminus \{s, t\}$  è un insieme di vertici che separa  $s$  da  $t$  in  $R$  allora  $C_S = \{(x^-, x^+) | x \in S\}$  è una sezione di  $R'$ . Siccome gli archi di  $R'$  diversi da quelli che provengono da vertici di  $R$  hanno capacità infinita, è chiaro che le sezioni di capacità minima di  $R'$  saranno del tipo  $C_S$  appena descritto, con  $S$  un insieme di vertici di  $R$  che separa  $s$  da  $t$ . A questo punto, un'applicazione del Maxflow-Mincut completa la dimostrazione. ■

## 4.2 Connettività e Teorema di Menger.

In questa sezione tratteremo un importante concetto in teoria dei grafi, quello del 'grado' di connessione di un grafo, e dimostreremo il fondamentale teorema di Menger. Si tratta di un risultato classico, che proveremo utilizzando la tecnica introdotta nella sezione precedente. Procederemo per gradi, iniziando con il provare in modo diretto un primo caso del Teorema di Menger, e quindi generalizzando ed estendendo i concetti introdotti fino a provare, utilizzando l'idea di flusso, la forma generale del Teorema.

L'obiettivo generale che ci proponiamo in primo luogo è quello di cercare di graduare in qualche modo il concetto di "connessione" di un grafo. Oltre a semplicemente suddividere i grafi tra quelli connessi e quelli non connessi, vogliamo tradurre in maniera efficace l'idea che, tra i grafi connessi, ce ne siano alcuni "più connessi" di altri, e possibilmente di quantificare

un tale "grado di connessione". Ad esempio, consideriamo i seguenti grafi su 5 vertici: un cammino semplice  $P_5$ , il grafo  $T_2$  costituito da due triangoli con un solo vertice in comune, il ciclo  $C_5$  ed il grafo completo  $K_5$ .



Ora, ci sembra abbastanza naturale dire che questi grafi siano stati disegnati (da sinistra a destra) in un ordine crescente di connettività; ovvero che, ad esempio, il grafo completo  $K_5$  sia un grafo "altamente connesso", che il ciclo  $C_5$  sia abbastanza connesso ma non quanto  $K_5$ , e che  $P_5$  sia connesso in un grado ancora inferiore.

Possiamo cercare di precisare questa idea ancor vaga in due direzioni. Nella prima possiamo valutare come "grado di connessione" di un grafo la misura di "quanto" è necessario togliere da esso in modo che il grafo che rimane non sia connesso. Limitandoci per il momento a considerare soltanto la soppressione di vertici (e dei lati ad essi adiacenti), osserviamo così che qualsiasi vertice non estremo si tolga a  $P_5$  il grafo che rimane non è connesso; similmente, non è connesso il grafo che si ottiene togliendo al grafo  $T_2$  il vertice centrale. Invece, qualsiasi vertice togliamo al ciclo  $C_5$  il grafo residuo (un cammino  $P_4$ ) è connesso; per rendere sconnesso  $C_5$  è necessario togliere *almeno due* vertici. Diremo quindi che i grafi  $P_5$  e  $T_2$  sono 1-connessi, mentre il grafo  $C_5$  è 2-connesso. Dal grafo completo  $K_5$  possiamo togliere qualsiasi insieme di vertici (sino a 4), senza che il grafo che rimane sia sconnesso.

Nell'altra direzione si parte dalla considerazione che un grafo è connesso se ogni coppia di vertici è collegata da almeno un cammino semplice. Potremmo dunque ritenere che un grafo sia dotato di un grado di connessione tanto maggiore quanto più sono i cammini diversi che è possibile trovare tra qualsiasi coppia di vertici. Per formalizzare in modo chiaro questa idea occorre innanzi tutto intenderci su cosa significa che due cammini sono diversi.

Due cammini semplici in un grafo si dicono **indipendenti** se non hanno alcun vertice in comune, a parte eventualmente gli estremi.

Nel grafo  $P_5$  ogni coppia di vertici distinti è congiunta da un unico cammino. Nel grafo  $T_2$  coppie di vertici distinti sono congiunte da più cammini semplici (due per la precisione), tuttavia se si prendono i vertici nei due diversi triangoli, si vede che non è possibile trovare due cammini *indipendenti* che li congiungono. Invece nel ciclo  $C_5$  ogni coppia di vertici distinti è congiunta da due cammini semplici indipendenti. Infine, nel grafo completo  $K_5$  ogni coppia di vertici distinti è congiunta da una moltitudine di cammini semplici (quanti per la precisione?), tra i quali ce ne sono sempre almeno 4 tra loro indipendenti.

Il Teorema di Menger afferma, in sostanza, che questi due approcci sono equivalenti.

Sia  $G$  un grafo connesso e sia  $S$  un sottoinsieme proprio di vertici di  $G$ ; diciamo che  $S$  **separa**  $G$  se  $G - S$  non è connesso (in inglese si dice che  $S$  è un *cut-set* per  $G$ ). Se  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ , diciamo che il grafo  $G$  è  **$k$ -connesso** se ha almeno  $k + 1$  vertici e  $G$  non è separato da alcun sottoinsieme di  $k - 1$  vertici.

Dunque, un grafo  $G$  è 1-connesso se e solo se è connesso nel senso usuale del termine; ed è 2-connesso se e solo se ha almeno 3 vertici e  $G - u$  è connesso per ogni vertice  $u$ . I grafi  $P_5$  e  $T_2$  della figura 5.5 sono 1-connessi ma non 2-connessi, il ciclo  $C_5$  è 2-connesso (ma non 3-connesso), ed il grafo  $K_5$  è 4-connesso.

Il **grado di connessione**  $\kappa(G)$  di un grafo  $G$  è il massimo  $k$  per cui  $G$  è  $k$ -connesso. In altri termini,  $\kappa(G) = k$  se e solo se  $G$  ha almeno  $k + 1$  vertici e  $k$  è la cardinalità minima di un sottoinsieme di vertici che separa  $G$  (se  $G$  non è connesso si scrive  $\kappa(G) = 0$ ). Ad esempio,  $\kappa(G) = 1$  se e solo se  $G$  è connesso ed ha uno snodo,  $\kappa(C_n) = 2$  per ogni ciclo  $C_n$ , e  $\kappa(K_n) = n - 1$  per ogni grafo completo  $K_n$ . Il grado di connessione del grafo di Petersen è 3 (lo si dimostri).

**Grafi 2-connessi.** Prima di provare il risultato fondamentale (il Teorema di Menger, appunto), discutiamo più in dettaglio il caso dei grafi 2-connessi. Si tratta di un caso di per sé interessante e, pur se quello che proveremo discenderà poi come caso particolare dal Teorema di Menger, ci consentirà di familiarizzarci con questo importante aspetto della teoria dei grafi. Inoltre, per questo caso più accessibile forniremo delle dimostrazioni dirette, cosa che forse farà apprezzare l'efficacia del metodo indiretto (che utilizza il teorema Maxflow–Mincut) che invece adotteremo per provare il Teorema di Menger.

Sia  $G$  un grafo connesso. Un vertice  $v$  di  $G$  si dice uno **snodo** (in inglese: *cut-vertex*) se il grafo  $G - v$  è sconnesso. Dunque un grafo è 2-connesso se è connesso, ha almeno 3 vertici ed è privo di snodi.

Osserviamo il fatto pressoché ovvio, che se  $G$  è un grafo 2-connesso, allora  $G - e$  è connesso per ogni arco  $e$  di  $G$ .

**Proposizione 4.6.** *Sia  $G$  un grafo connesso con almeno 3 vertici. Sono equivalenti:*

(i) *per ogni coppia di vertici distinti  $u$  e  $v$  di  $G$  esistono almeno due cammini semplici indipendenti da  $u$  a  $v$ ;*

(ii)  *$G$  è 2-connesso;*

(iii) *ogni coppia di vertici distinti di  $G$  appartiene ad un ciclo;*

**DIMOSTRAZIONE.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Supponiamo che  $G$  soddisfi (i), e sia  $u$  un vertice di  $G$ . Siano  $x$  e  $y$  sono due vertici distinti di  $G - u$ ; allora esistono in  $G$  due cammini indipendenti da  $x$  in  $y$ , almeno uno dei quali non passa per  $u$ . Dunque  $G - u$  è connesso. Ciò vale per ogni vertice  $u$ , e pertanto  $G$  è 2-connesso.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Supponiamo che  $G$  sia 2-connesso, e siano  $x$  e  $y$  due vertici distinti. Proviamo che  $x$  ed  $y$  appartengono ad uno stesso ciclo procedendo per induzione sulla loro distanza  $d$ . Se  $d = 1$  allora  $e = \{x, y\}$  è un lato di  $G$ . Poiché  $G$  è 2-connesso,  $G - e$  è connesso; dunque esiste un cammino semplice da  $x$  a  $y$  che non contiene  $e$ , e che assieme ad  $e$  forma un ciclo a cui appartengono  $x$  e  $y$ .

Sia  $d \geq 2$ , e sia  $e = \{x, z\}$  il primo lato di un cammino semplice da  $x$  a  $y$ . Poiché  $G - z$  è connesso, esiste un cammino semplice  $\mathcal{P}$  da  $x$  a  $y$  che non passa per  $z$ ; inoltre, siccome la distanza di  $z$  da  $y$  è  $d - 1$ , per ipotesi induttiva esiste un ciclo  $\mathcal{C}$  di  $G$  a cui appartengono  $z$  e  $y$ . Ora, percorrendo  $\mathcal{P}$  da  $x$  sino al primo suo vertice in comune con  $\mathcal{C}$  (vertice che può eventualmente essere  $x$  o  $y$ ), quindi percorrendo  $\mathcal{C}$  fino a  $y$  e poi indietro a  $z$ , ed infine percorrendo il lato  $\{z, x\}$  si ha un ciclo di  $G$  a cui appartengono  $x$  e  $y$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Questo è chiaro. ■

Com'è possibile costruire grafi 2-connessi? Supponiamo di avere dato un grafo 2-connesso  $G_0$ , e di aver fissato due suoi vertici distinti  $x$  e  $y$ . Se estendiamo  $G_0$  mediante l'aggiunta di nuovi vertici e lati in modo che i componenti aggiunti costituiscano un cammino semplice da  $x$  a  $y$ , otteniamo un grafo  $G$  che è ancora 2-connesso (vedi figura seguente);

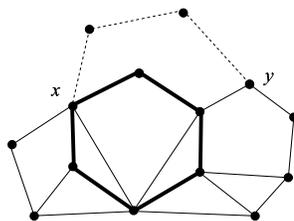


Figura 4.3: costruzione di un grafo 2-connesso

(si noti anche che non è strettamente necessario aggiungere "nuovi" vertici: un lato tra vertici precedentemente non adiacenti va pure bene): è chiaro, infatti, che se  $G_0$  non contiene snodi allora anche il nuovo grafo  $G$  è tale.

Ora, ogni grafo 2-connesso si può vedere come il risultato di successive operazioni di questo tipo a partire da un ciclo. Infatti, sia  $G$  un grafo 2-connesso; certamente  $G$  contiene almeno un ciclo, dunque esiste un massimo sottografo  $G_0$  di  $G$  che può essere costruito nel modo descritto sopra. Se l'insieme dei vertici di  $G_0$  coincide con quello di  $G$ , allora  $G$  si ottiene da  $G_0$  mediante aggiunta di lati, che è una delle operazioni consentite, e dunque, per la massimalità,  $G_0 = G$ . Supponiamo quindi, per assurdo, che esista un vertice  $x$  di  $G$  che non appartiene a  $G_0$ . Possiamo supporre che la distanza di  $x$  da  $G_0$  sia 1, ovvero che esista un vertice  $y$  di  $G_0$  tale che  $e = \{y, x\}$  è un lato di  $G$ . Ora, poiché  $G - y$  è connesso esiste un cammino semplice  $\mathcal{C}$  da  $x$  ad un altro vertice  $z$  di  $G_0$  che non passa per  $y$ . Allora, partendo da  $e$  ed aggiungendo il cammino  $\mathcal{C}$  si ha un cammino semplice tra due punti distinti di  $G_0$  che passa per  $x$ , il che contraddice la massimalità di  $G_0$ . Dunque  $G_0 = G$ .

Torniamo ora al caso generale della  $k$ -connessione ed al Teorema fondamentale. Diciamo che un insieme di vertici  $U$  di un grafo  $G$  separa due vertici  $s$  e  $t$ , se  $s$  e  $t$  appartengono a componenti connesse distinte di  $G - U$ .

**Teorema 4.7.** (Menger 1927) *Siano  $s$  e  $t$  vertici non adiacenti di un grafo. Allora il massimo numero di cammini semplici indipendenti da  $s$  a  $t$  è uguale alla cardinalità minima di un insieme di vertici che separa  $s$  da  $t$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $s$  e  $t$  vertici non adiacenti del grafo  $G$ . Consideriamo il grafo diretto ottenuto da  $G$  con lo stesso insieme di vertici e con archi  $(x, y)$  e  $(y, x)$  per ogni lato  $\{x, y\}$  di  $G$ . Assegnamo quindi ad ogni vertice diverso da  $s$  e da  $t$  capacità 1. Otteniamo così un grafo diretto con una funzione di capacità sui vertici. Per il teorema 4.5, esiste un flusso il cui valore uguaglia la capacità minima  $k$  di un insieme di vertici che separa  $s$  da  $t$ . Per come abbiamo definito la capacità, tale capacità minima è realizzata da un insieme di cardinalità

minima di vertici che separano  $s$  da  $t$ . Per la seconda parte del Teorema 4.4, un flusso di valore  $k$  può essere realizzato da valori sugli archi che sono interi, e quindi uguali a 0 o ad 1. Tale flusso deve essere pertanto non nullo su  $k$  cammini (diretti) indipendenti da  $s$  a  $t$ . Dunque ci sono almeno  $k$  cammini indipendenti in  $G$  da  $s$  a  $t$ .

Viceversa, è chiaro che se esistono  $k$  cammini indipendenti da  $s$  a  $t$  allora un insieme di vertici che separa  $s$  da  $t$  deve contenere almeno  $k$  vertici (ce ne deve essere almeno uno in ciascun cammino). ■

La versione globale del Teorema di Menger discende immediatamente.

**Teorema 4.8.** *Sia  $k \geq 1$ , e sia  $G$  un grafo con almeno  $k+1$  vertici. Allora  $G$  è  $k$ -connesso se e solo se per ogni coppia  $s, t$  di vertici distinti di  $G$  esistono  $k$  cammini semplici indipendenti da  $s$  a  $t$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** In un verso l'affermazione è quasi banale: se per ogni coppia di vertici distinti di  $G$  esistono  $k$  cammini indipendenti allora  $G$  è  $k$ -connesso. Viceversa, supponiamo che  $G$  sia  $k$ -connesso e siano  $s, t$  vertici distinti. Se  $s$  e  $t$  non sono adiacenti allora l'esistenza di  $k$  cammini indipendenti da  $s$  a  $t$  discende subito dal Teorema di Menger. Se invece  $e = \{s, t\}$  è un lato di  $G$ , allora certamente  $G - e$  è  $k - 1$ -connesso e ancora il teorema di Menger assicura l'esistenza di  $k - 1$  cammini indipendenti tra  $s$  e  $t$  in  $G - e$ . Assieme al cammino  $set$  essi costituiscono una famiglia di  $k$  cammini indipendenti da  $s$  a  $t$  in  $G$ . ■

La nozione di  $k$ -connessione che abbiamo sin qui discusso è stata definita (in ciascuno dei due modi equivalenti) facendo riferimento principalmente ai *vertici* del grafo: sia nella definizione di insieme separatore, sia in quella di indipendenza di due cammini. Possiamo procedere similmente, facendo però riferimento ai *lati*, ed ottenendo una diversa nozione di connettività. Ed ancora potremo partire da due punti di vista (separazione e cammini) che un'altra versione del Teorema di Menger proverà essere equivalenti.

Sia  $G = (V, E)$  un grafo; diciamo che un insieme  $C$  di lati **e.separa**  $G$  (dove "e." sta per *edge*) se  $G - C$  non è connesso. Ciò significa che esistono due vertici distinti  $x$  e  $y$  di  $G$  tali che ogni cammino semplice da  $x$  a  $y$  utilizza almeno un lato appartenente a  $C$  (si tratta di quello che per grafi diretti abbiamo chiamato una sezione). Se  $C = \{e\}$  è costituito da un solo lato ed e.separa  $G$ , si dice allora che il lato  $e$  è un **ponte** (in inglese: *bridge*) di  $G$ . Osserviamo, ad esempio, che la Proposizione 3.3 implica che grafo connesso è un albero se e soltanto se ogni suo lato è un ponte.

Se  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ , diciamo che il grafo  $G$  è  **$k$ -e.connesso** se ha almeno 2 vertici e  $G$  non è separato da alcun insieme costituito da  $k - 1$  lati o meno.

Dunque, un grafo  $G$  è 1-e.connesso se e solo se è connesso; ed è 2-e.connesso se e solo se ha almeno 2 vertici, è connesso e nessun suo lato è un ponte. È facile vedere che se  $e$  è un ponte in un grafo connesso  $G$ , allora ciascun estremo di  $e$  è uno snodo di  $G$  (lo si dimostri per esercizio). La figura 1.21, o il grafo  $T_2$  della figura a pagina 94, mostrano invece degli esempi di grafi con uno snodo (il vertice centrale in figura) ma privi di ponti; si tratta cioè di grafi 2-e.connessi, ma non 2-connessi. I cammini semplici come  $P_5$  non sono 2-e.connessi, mentre tali sono i cicli come  $C_5$  (che però non sono 3-e.connessi); il grafo  $K_5$  è 4-e.connesso. L'**indice di e.connessione**  $\lambda(G)$  di un grafo  $G$  è il massimo  $k$  per cui  $G$  è  $k$ -e.connesso. Ad esempio,  $\lambda(G) = 1$  se e solo se  $G$  è connesso ed ha un ponte,  $\lambda(C_n) = 2$  per ogni ciclo  $C_n$ , e

$\lambda(K_n) = n - 1$  per ogni grafo completo  $K_n$ . L'indice di e.connessione del grafo di Petersen è 3.

Vediamo ora la cosa dal punto di vista dei cammini: diciamo che due cammini in un grafo  $G$  sono **e.indipendenti** se non hanno alcun lato in comune (dunque cammini indipendenti sono e.indipendenti, ma non vale il viceversa). Vedremo che la  $k$ -e.connessione equivale all'esistenza, per ogni coppia di vertici non adiacenti del grafo, di  $k$  cammini a due a due e.indipendenti tra i due vertici. Prima però di provare questo in generale, il lettore può cercare di dimostrarlo nel caso della 2-e.connessione mediante un risultato che sia analogo alla Proposizione 4.6.

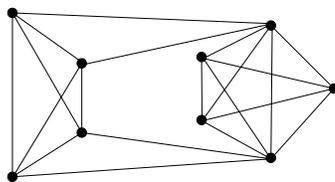


Figura 4.4: un grafo 3-e.connesso ma non 3-connesso

Fatto questo, veniamo al Teorema di Menger nella versione per archi.

**Teorema 4.9.** *Siano  $s$  e  $t$  vertici distinti di un grafo. Allora il massimo numero di cammini semplici e.indipendenti da  $s$  a  $t$  è uguale alla cardinalità minima di un insieme di lati che separa  $s$  da  $t$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $s$  e  $t$  vertici distinti del grafo  $G$ . È chiaro che il minimo numero di lati che separano  $s$  da  $t$  deve essere almeno pari al massimo numero di cammini semplici e.indipendenti da  $s$  a  $t$ . Viceversa, si considera il grafo diretto associato a  $G$  come nella dimostrazione del Teorema 4.7, e questa volta si assegna una capacità 1 ad ogni arco. Si ottiene così una rete alla quale si applica il Teorema 4.4. Poiché ogni arco ha la stessa capacità, la capacità minima  $k$  di una sezione è il minimo numero di archi da cui essa può essere costituita; tale cardinalità, inoltre, è maggiore di, o uguale a, la cardinalità minima di un insieme di lati che separa  $s$  da  $t$ . Sia  $f$  un flusso intero che realizza il valore massimo  $k$ ; in particolare, esso assume valore 0 o 1. Considerando l'insieme degli archi su cui  $f$  non è nullo, si trovano certamente  $k$  cammini semplici e.indipendenti tra  $s$  e  $t$ . ■

Anche in questo caso si ha come conseguenza la forma globale.

**Teorema 4.10.** *Sia  $k \geq 1$ , e  $G$  un grafo con almeno 2 vertici. Allora  $G$  è  $k$ -e.connesso se e solo se per ogni coppia  $s, t$  di vertici distinti di  $G$  esistono  $k$  cammini semplici e.indipendenti da  $s$  a  $t$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Esercizio. ■

### 4.3 Fattori.

Un *fattore* di un grafo  $G$  è un sottografo il cui insieme dei vertici coincide con quello del grafo  $G$ . Uno spanning-tree di un grafo  $G$  è, ad esempio, un fattore di  $G$ . Se un fattore è un grafo regolare di valenza  $k$ , allora si dice che è un  $k$ -*fattore*.

#### 1-fattori.

Un interesse primario riveste l'esistenza in un grafo di 1-fattori, poiché l'idea di 1-fattore è l'estensione ad un grafo arbitrario di quella di accoppiamento ottimale in un grafo bipartito. Infatti, siccome un grafo ha ogni vertice di grado 1 se e solo se ogni sua componente connessa è costituita da due vertici e dal lato che li congiunge, un 1-fattore di un grafo  $G$  non è che un insieme di lati di  $G$  a due a due indipendenti e tali che i loro estremi coprono tutti i vertici di  $G$  (vedi figura 4.5, oppure la figura ??, che mostra un 1-fattore del grafo  $K_{10}$ ).

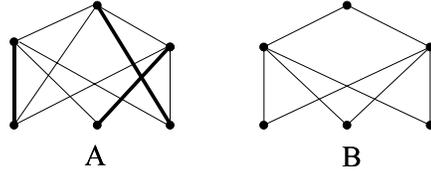


Figura 4.5: 1-fattori.

Chiaramente, un grafo che ammette un 1-fattore deve avere un numero pari di vertici, ma questa condizione è ben lontana dall'essere sufficiente (vedi figura 4.5 B).

Supponiamo che il grafo  $G = (V, E)$  ammetta un 1-fattore  $U$ , e sia  $S \subseteq V$ . Osserviamo che se  $\Delta$  è una componente connessa di  $G - S$  e  $\Delta$  ha un numero dispari di vertici, allora ci deve essere almeno un vertice di  $\Delta$  che è estremo di un lato di  $U$  il cui altro estremo appartiene ad  $S$  (non può appartenere a  $G - S$  dato che  $\Delta$  è una componente connessa di questo). Inoltre ciascun elemento di  $S$  è associato in questo modo ad al più una componente connessa di  $G - S$  con un numero dispari di vertici. Ne segue che *il numero di componenti connesse di  $G - S$  con un numero dispari di vertici è al più  $|S|$* . Ciò vale per ogni sottoinsieme  $S$  di vertici di  $G$ , e così inteso costituisce dunque una condizione necessaria a che  $G$  ammetta un 1-fattore. E, come nel caso degli accoppiamenti in grafi bipartiti, una condizione necessaria relativamente ovvia, si rivela essere anche sufficiente: questo il contenuto di un importante risultato di W. Tutte. Se  $G = (V, E)$  è un grafo e  $S \subseteq V$ , denotiamo con  $q(G - S)$  il numero di componenti connesse di  $G - S$  con un numero dispari di vertici.

**Teorema 4.11.** (Tutte 1947) *Un grafo  $G = (V, E)$  ammette un 1-fattore se e soltanto se, per ogni  $S \subseteq V$ ,*

$$q(G - S) \leq |S|. \quad (4.2)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La necessità della condizione (4.2) affinché  $G$  ammetta un 1-fattore è già stata provata sopra. Dimostriamone quindi la sufficienza.

Sia  $G = (V, E)$  un grafo che soddisfa (4.2). Procediamo per induzione su  $|V|$ . Osserviamo, innanzi tutto, che  $|V|$  è pari (viene da (4.2) con  $S = \emptyset$ ), e che se  $x \in V$  allora  $G - x$  contiene

una ed una sola componente connessa dispari (dato che  $|V \setminus \{x\}|$  è dispari per quanto appena osservato). Esiste dunque un sottoinsieme non vuoto  $S$  di  $V$  di ordine massimo tale che

$$q(G - S) = |S|. \quad (4.3)$$

Sia ora  $\Delta$  una componente connessa di  $G - S$ .

1) *Se  $\Delta$  ha un numero pari di vertici allora ammette un 1-fattore.*

Infatti, in questo caso, se  $X$  è un insieme di vertici di  $\Delta$ :

$$|S| + |X| = |S \cup X| \geq q(G - (S \cup X)) = q(\Delta - X) + q(G - S) = q(\Delta - X) + |S|$$

da cui  $q(\Delta - X) \leq |X|$ . Per ipotesi induttiva  $\Delta$  ammette un 1-fattore.

2) *Se  $\Delta$  ha un numero dispari di vertici, e  $u$  è un vertice di  $\Delta$  adiacente a qualche  $x \in S$ ; allora  $\Delta - u$  ammette un 1-fattore.*

Infatti, sia  $X$  è un insieme di vertici di  $\Delta - u$ ; allora

$$q(G - (S \cup \{u\} \cup X)) = q(G - S) - 1 + q((\Delta - (\{u\} \cup X)) = |S| - 1 + q((\Delta - u) - X).$$

Ora, per l'ipotesi e la massimalità di  $S$

$$q(G - (S \cup \{u\} \cup X)) < |S \cup \{u\} \cup X| = |S| + 1 + |X|;$$

quindi

$$q((\Delta - u) - X) \leq |X| + 1. \quad (4.4)$$

Ma, poiché il numero dei vertici di  $\Delta - \{u\}$  è pari,  $q((\Delta - u) - X) \equiv |X| \pmod{2}$ . Da (4.4) si deduce quindi  $q((\Delta - u) - X) \leq |X|$ . Per ipotesi induttiva  $\Delta - \{u\}$  ammette un 1-fattore.

Visto questo, sia  $S$  come sopra, e siano  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  le componenti connessi di  $G - S$  con un numero dispari di vertici. Per ogni sottoinsieme  $U$  di  $S$  si ha  $q(G - U) \leq |U|$ ; ne segue che il numero di  $\Delta_i$  che sono adiacenti a qualche  $x \in S - U$  è maggiore o uguale ad  $|S - U|$ . Per il Teorema di Hall 3.15, esiste un accoppiamento ottimale tra  $S$  e le componenti  $\Delta_i$ ; ovvero è possibile ordinare  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ , in modo che per ogni  $i = 1, \dots, n$ , esista un  $u_i \in \Delta_i$  con  $\{x_i, u_i\}$  un arco di  $G$ .

A questo punto, per ogni  $i = 1, \dots, n$  scegliamo un 1-fattore di  $\Delta_i - u_i$  (esiste per il punto (2)); a questi uniamo un 1-fattore per ogni componente di  $G - S$  che ha un numero pari di vertici (esiste per il punto (1)); e a tutto ciò aggiungiamo gli archi  $\{x_1, u_1\}, \dots, \{x_n, u_n\}$ . In questo modo si ottiene un 1-fattore di  $G$  e si completa la dimostrazione. ■

## 2-fattori.

Un grafo connesso ha tutti i vertici di grado 2 se e soltanto se è un ciclo. Quindi, un 2-fattore di un grafo  $G$  è un fattore costituito da cicli a due a due privi di vertici in comune. In particolare, dunque, un grafo hamiltoniano ammette un 2-fattore (il grafo di Petersen ammette un 2-fattore ma non è hamiltoniano).

**Teorema 4.12** (Petersen 1891). *Sia  $k$  un numero pari. Ogni grafo regolare  $k$ -valente ammette un 2-fattore.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $G = (V, E)$  un grafo regolare di grado pari, che chiaramente possiamo assumere connesso. Allora, per il teorema 1.5,  $G$  ha un circuito euleriano

$$\mathcal{U} : v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m = v_0.$$

Costruiamo un grafo bipartito  $G'$  a partire dall'insieme dei vertici  $V^+ \cup V^-$ , intendendo che ogni vertice  $v \in V$  di  $G$  è "sdoppiato" in due vertici distinti  $v^+$  e  $v^-$ , e come archi prendendo quelli del tipo  $\{v_i^+, v_{i+1}^-\}$ , ricavati dalla sequenza fornita dal circuito  $\mathcal{U}$ . Osserviamo che, poiché  $\mathcal{U}$  è un grafo euleriano, c'è un'ovvia corrispondenza biunivoca tra i lati di  $G$  e quelli di  $G'$ ; inoltre  $G'$  è regolare di grado  $k/2$ . Un facile corollario del Teorema di Hall 3.15 (vedi esercizio 3.16), assicura che il grafo  $G'$  ammette un accoppiamento ottimale (cioè un 1-fattore). I lati di tale accoppiamento (o meglio i loro corrispondenti in  $G$ ) costituiscono quelli di un 2-fattore di  $G$ . ■

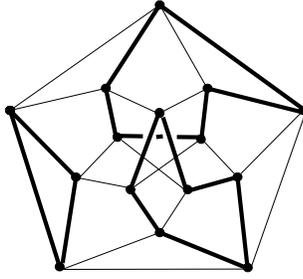
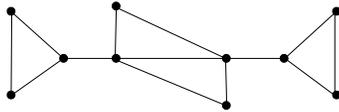


Figura 4.6: un 2-fattore

Si osservi che l'ammettere un 2-fattore non è una proprietà più forte di quella di ammettere un 1-fattore: ogni ciclo di lunghezza dispari ammette un 2-fattore (se stesso) ma non un 1-fattore; la figura seguente è un altro esempio con un numero pari di vertici.



### Cicli hamiltoniani.

Naturalmente un ciclo hamiltoniano, quando esiste, è un tipo particolare di fattore. Vediamo un interessante risultato che mette in relazione indice di stabilità e hamiltonianità dei grafi regolari. Ricordo che un sottoinsieme  $S$  dell'insieme dei vertici di un grafo  $G$  si dice stabile se nessuna coppia di elementi di  $S$  è adiacente in  $G$ , e che l'indice di stabilità  $\alpha(G)$  di un grafo  $G$  è la massima cardinalità di un suo sottoinsieme stabile di vertici (quindi,  $\alpha(G)$  è il massimo intero  $n$  tale che il grafo complementare  $\overline{G}$  contiene un sottografo completo  $K_n$ ).

**Teorema 4.13.** (Chvátal e Erdős) *Sia  $k \geq 2$ , e  $G$  un grafo  $k$ -connesso. Se  $\alpha(G) \leq k$  allora  $G$  è hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $G$  un grafo  $k$ -connesso con  $\alpha(G) \leq k$ , e sia

$$\mathcal{C} : x_0 e_1 x_2 e_2 \dots x_{n-1} e_n x_n$$

(con  $x_0 = x_n$ ) un ciclo di  $G$  con il massimo numero di lati. Poniamo  $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Supponiamo, per assurdo, che  $\mathcal{C}$  non sia un ciclo hamiltoniano. Allora  $G - X$  non è vuoto: sia  $\Delta$  una componente connessa di  $G - X$ , e sia  $y$  un vertice di  $\Delta$ .

Denotiamo con  $S$  l'insieme dei vertici in  $X$  che sono adiacenti a qualche vertice di  $\Delta$ . Osserviamo quindi che, per la massimalità della lunghezza del ciclo  $\mathcal{C}$ , se  $x_i \in S$  allora  $x_{i+1} \notin S$ ; in particolare  $S \neq X$ . Sia  $x \in X \setminus S$ , allora, poiché  $\Delta$  è una componente connessa di  $G - X$ , ogni cammino da  $y$  a  $x$  deve passare per qualche elemento di  $S$ . Dunque  $S$  è un insieme di vertici che separa  $G$ , e pertanto  $|S| \geq k$ .

Poniamo  $S^+ = \{x_{i+1} \mid x_i \in S\}$  ( $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ). Per quanto appena osservato  $S^+ \cap S = \emptyset$ . Consideriamo  $x_{i+1}, x_{j+1} \in S^+$ , con  $i < j$ , e supponiamo che  $e = \{x_{i+1}, x_{j+1}\}$  sia un arco di  $G$ ; allora, per quanto detto non è un arco di  $\mathcal{C}$ . Inoltre, poiché  $x_i, x_j \in S$ , esistono vertici  $u, v$  di  $\Delta$  tali che  $\{u, x_i\}$  e  $\{v, x_j\}$  sono lati di  $G$  e, siccome  $\Delta$  è connesso, esiste un cammino semplice  $\mathcal{D}$  tra  $u$  e  $v$  tutto contenuto in  $\Delta$ . Ma allora considerando  $\{v, x_{j+1}\}$  seguito dal tratto di  $\mathcal{C}$  (all'indietro) tra  $x_j$  e  $x_{i+1}$ , poi dal lato  $e$ , quindi dal tratto di  $\mathcal{C}$  percorso da  $x_{j+1}$  a  $x_i$ , infine da  $\{x_i, u\}$  e da  $\mathcal{D}$ , si otterrebbe un ciclo in  $G$  strettamente più lungo di  $\mathcal{C}$  (si veda l'argomento nella dimostrazione del Teorema di Ore 1.7), il che contraddice la scelta di quest'ultimo.

Dunque  $S^+$  è un insieme stabile di vertici di  $G$ .

Poiché nessun elemento di  $S^+$  è adiacente ad alcun vertice di  $\Delta$ , ne segue che dato  $y$  un vertice in  $\Delta$ ,  $S^+ \cup \{y\}$  è stabile. Pertanto

$$\alpha(G) \geq |S^+ \cup \{y\}| > |S^+| = |S| \geq k$$

che è contro le ipotesi. ■

## 4.4 Esercizi

**Esercizio 4.1.** Siano  $f$  e  $g$  due flussi per la rete  $R$ . Si dica se è vero che l'applicazione  $f \wedge g$  definita ponendo, per ogni arco  $e$  di  $R$ ,  $(f \wedge g)(e) = \min\{f(e), g(e)\}$ , è un flusso per  $R$ .

**Esercizio 4.2.** Si faccia un esempio di una rete in cui le sezioni di minima capacità non sono quelle composte dal minimo numero di archi.

**Esercizio 4.3.** Trovare un flusso con valore massimo nella rete di Figura 4.1.

**Esercizio 4.4.** Sia  $f$  un flusso per la rete  $R$ . Provare che se  $t \notin S_f$  e  $U(S_f)$  è una sezione di  $R$ , allora  $f$  è un flusso di valore massimo.

**Esercizio 4.5.** Si  $\delta(G)$  il minimo tra i gradi dei vertici di un grafo connesso  $G$ . Si provi che  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ . Si trovino esempi di grafi per cui la differenza  $\lambda(G) - \kappa(G)$  è arbitrariamente grande.

**Esercizio 4.6.** Si provi che un grafo connesso è 2-connesso se e soltanto se ogni coppia di archi incidenti appartiene ad un ciclo.

**Esercizio 4.7.** (*Lemma del ventaglio*). Siano  $k \geq 1$ ,  $G$  un grafo  $k$ -connesso e  $u$  un vertice di  $G$ . Siano  $y_1, y_2, \dots, y_k$  vertici distinti (e tutti diversi da  $u$ ) di  $G$ . Si provi che esistono  $k$  cammini semplici  $P_1, \dots, P_k$  in  $G$  tali che  $P_i$  congiunge  $u$  a  $y_i$  e, per ogni  $i \neq j$ ,  $P_i$  e  $P_j$  hanno in comune il solo vertice  $u$ . [Sugg.: aggiungere a  $G$  un vertice adiacente ai vertici  $y_1, \dots, y_k$ , e quindi applicare il Teorema di Menger]

**Esercizio 4.8.** Sia  $2 \leq k$  e sia  $G$  un grafo  $k$ -connesso. Si provi per ogni sottoinsieme di  $k$  vertici distinti di  $G$  esiste un ciclo che li contiene tutti. (Sugg.: usare il Lemma del Ventaglio).

**Esercizio 4.9.** Si trovi un grafo cubico connesso privo di 1-fattori.

**Esercizio 4.10.** Sia  $G$  un grafo connesso che ammette un 2-fattore costituito da due cicli disgiunti. Si provi che  $G$  ha un 1-fattore se e sole se ha un numero pari di vertici.

**Esercizio 4.11.** Sia  $G$  un grafo cubico. Provare che se  $G$  ha un circuito hamiltoniano, allora il sottografo che si ottiene togliendo da  $G$  i lati di un tale circuito è un 1-fattore di  $G$ . Viceversa sia  $M$  un 1-fattore di  $G$ ; provare che ogni componente connessa del grafo ottenuto togliendo da  $G$  i lati di  $M$  è un ciclo. Concludere che un grafo cubico connesso è hamiltoniano se e soltanto se ammette un 1-fattore tale che il suo residuo è connesso.

**Esercizio 4.12.** Sia  $S$  un insieme di vertici del grafo  $G = (V, E)$ . Si provi che  $S$  è stabile se e soltanto se  $V \setminus S$  è una copertura di  $G$  come definita nella sezione 3.2.

**Esercizio 4.13.** Si determini il grado di connessione e l'indice di e.connessione dei grafi delle figure 1.16.

**Esercizio 4.14.** Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici e sia  $2 \leq k \leq n - 1$ . Si provi che se  $G$  ha  $k$  vertici di grado  $n - 1$  allora  $G$  è  $k$ -connesso.

**Esercizio 4.15.** Si dia un esempio di un grafo 3-e.connesso ma non 2-connesso.

**Esercizio 4.16.** Usando il *line graph* (esercizio 1.30) si dimostri il Teorema 4.9 a partire dal Teorema 4.7 (il viceversa non è facile).

**Esercizio 4.17.** Sia  $G$  un grafo  $k$ -connesso, e siano  $S, T$  sottoinsiemi disgiunti di vertici di  $G$  tali che  $|S| \leq |T| \leq k$ . Si provi che esistono  $|T|$  cammini a due a due indipendenti di  $G$  tali che i loro estremi sono uno in  $S$  e l'altro in  $T$ . [sugg.: usare l'esercizio 4.7]

**Esercizio 4.18.** Provare che il grafo completo  $K_7$  può essere decomposto in tre cicli hamiltoniani disgiunti (ovvero tali che a due a due non hanno alcun lato in comune, e che utilizzano globalmente tutti i lati di  $K_7$ ). Provare che invece  $K_6$  non può essere decomposto in cicli hamiltoniani disgiunti. Cosa si può dire in generale per  $K_n$  ?

**Esercizio 4.19.** Sia  $G$  un grafo. Un sottografo (indotto) massimale per essere 2-connesso si dice un *blocco* di  $G$ .

- (i) Dire perché nella definizione la parola "indotto" è messa tra parentesi.
- (ii) Si provi che due blocchi distinti hanno al più un vertice in comune.

**Esercizio 4.20.** Siano  $B_1$  e  $B_2$  due blocchi distinti del grafo  $G$ . Si provi che esiste al più un lato di  $G$  i cui estremi appartengono uno a  $B_1$  ed uno a  $B_2$ ; si dimostri che se un tale lato esiste allora è un ponte di  $G$ .

**Esercizio 4.21.** Sia  $G$  un grafo. Definiamo il grafo dei blocchi  $B(G)$ , prendendo come vertici i blocchi distinti di  $G$ , e congiungendo due di essi con un lato se e solo se hanno un vertice in comune oppure esiste un lato di  $G$  con un estremo in ciascuno di essi. Si provi che  $B(G)$  è un grafo semplice, e che se  $G$  è connesso allora  $B(G)$  è un albero.

**Esercizio 4.22.** Sia  $k \geq 2$ , e sia  $G$  un grafo  $k$ -connesso con  $2k$  vertici. Si provi che  $G$  ha un ciclo hamiltoniano.

**Esercizio 4.23.** Si provi che un grafo cubico connesso è 2-connesso se e solo se è privo di ponti.

**Esercizio 4.24.** Sia  $G$  un grafo cubico 3-connesso. Si provi che ogni vertice di  $G$  appartiene al più ad un triangolo.

**Esercizio 4.25.** Si provi che un grafo cubico 3-e.connesso è 3-connesso.

**Esercizio 4.26.** Sia  $G$  un grafo 3-connesso, e siano  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  gli insiemi dei vertici di due cicli di lunghezza massima di  $G$ . Si provi che  $|\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2| \geq 3$ .

**Esercizio 4.27.** Sia  $G$  un grafo con un numero pari di vertici. Si provi che se  $G$  ha un 2-fattore allora  $G$  ha un 1-fattore.

**Esercizio 4.28.** Si utilizzi il Teorema di Tutte 4.11 per dimostrare il seguente (e anteriore) risultato di Petersen: un grafo cubico privo di ponti ammette un 1-fattore.

**Esercizio 4.29.** Si trovi un grafo euleriano privo di 2-fattori.

**Esercizio 4.30.** Si dia una dimostrazione del Teorema di Hall 3.15 utilizzando il Teorema di Menger. [sugg.: ad un grafo bipartito si aggiungano opportunamente due vertici...]

**Esercizio 4.31.** Dedurre il Teorema 3.15 dal Teorema di Tutte.

**Esercizio 4.32.** Si provi che il grafo  $G = (V, E)$  contiene  $t$  archi indipendenti se e solo se  $q(G - S) \leq |S| + 2t$  per ogni  $S \subseteq V$ .

## Capitolo 5

# Colorazioni

Il problema della colorazione (dei vertici, ma anche dei lati) di un grafo ha diverse motivazioni pratiche. Gli esempi che seguono sono magari un po' idioti, ma potrebbero dare un'idea.

Nella capitale del pianeta Olosac si tiene un convegno di matematica intergalattica a cui sono invitati rappresentanti di ogni pianeta e specie (almeno, di quelle interessate alla materia) della galassia, i quali sono ospitati in vari alberghi. È però noto che, con tutta la buona volontà, vi sono specie nell'universo per le quali la prossimità fisica è pressoché incompatibile. Ad esempio, un conigliode fumaliano non dormirà sonni tranquilli se nella stanza accanto alberga uno smilodonte elbaniano; a sua volta, una lattuga mistica di Macros II preferirà non correre il rischio di scendere in ascensore in compagnia del conigliode (senza contare che gli smilodonti cadono a terra privi di sensi alla vista di una lattuga mistica). Agli organizzatori si presenta dunque il problema: qual è il minimo numero di alberghi che occorre prevedere in modo che delegazioni di razze incompatibili non alloggino nello stesso albergo? Un simile problema può essere affrontato considerando un grafo i cui vertici siano le diverse delegazioni, e i lati connettano delegazioni i cui membri appartengono a razze galattiche incompatibili; cercando quindi di stabilire qual è il minimo numero di colori (gli alberghi) con cui è possibile colorare i vertici del grafo in modo che vertici adiacenti abbiano colori diversi. Al problemi di colorazione dei vertici è dedicata la prima sezione di questo capitolo.

Supponiamo ora che, nell'ambito dei lavori del convegno intergalattico di matematica, ciascuna delegazione intenda avere degli incontri bilaterali con alcune altre delegazioni<sup>1</sup>, e che ogni delegazione possa incontrarne al più un'altra ogni giorno; qual è il minimo numero di giorni che gli organizzatori devono prevedere affinché tutti gli incontri bilaterali abbiano luogo? Anche questa questione può essere tradotta in un problema di colorazione di un grafo: in questo caso ad essere colorati sono i lati. I vertici del grafo sono ancora le diverse delegazioni, ma questa volta i lati connettono coppie di delegazioni che intendono incontrarsi durante il convegno; il problema diventa il seguente: qual è il minimo numero di colori (i diversi giorni) con cui è possibile colorare *i lati* del grafo in modo che lati consecutivi (cioè con un vertice in comune) abbiano colori diversi? Illustreremo brevemente l'argomento della colorazione dei lati di un grafo nella seconda sezione del capitolo.

---

<sup>1</sup>Va da sé che gli organizzatori olosacchiani hanno accettato di prevedere incontri *bilaterali* solo dopo una lunga ed estenuante trattativa.

Nella terza sezione accenneremo ad un tipo di problemi, introdotto più di recente, in cui la colorazione (dei vertici o dei lati) è vincolata da liste di colori "consentiti".

Nell'ultima sezione torniamo a parlare di colorazioni di vertici, introducendo una classe notevole di grafi (i grafi perfetti) la cui definizione è strettamente legata al numero cromatico.

## 5.1 Colorazioni dei vertici.

Come detto nel primo capitolo, una **colorazione** (dei vertici) di un grafo  $G = (V, E)$  è un'applicazione  $\gamma : V \rightarrow S$ , dove  $S$  è un insieme non vuoto (i cui elementi sono detti *colori*), tale che

$$\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \Rightarrow \gamma(u) \neq \gamma(v)$$

(a parole: è una assegnazione di un colore a ciascun vertice di  $G$  in modo che vertici adiacenti abbiano colori diversi).

Sia  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ ; un grafo  $G$  si dice  $k$ -colorabile se esiste una colorazione di  $G$  con  $k$  colori. Un grafo è 1-colorabile se e solo se non contiene alcun lato, ed è 2-colorabile se e soltanto se è bipartito. Più in generale, dire che un grafo è  $k$ -colorabile equivale a dire che ammette una  $k$ -partizione dei vertici: il concetto è il medesimo, ma fare riferimento ai colori sembra espedito più consono alla sua visualizzazione. Ogni grafo finito  $G$  ammette una colorazione con un numero finito di colori, ed il *minimo* numero di colori mediante i quali è possibile colorare  $G$  è detto **numero cromatico** di  $G$  e si indica con  $\chi(G)$ . Dunque, dato un grafo  $G$ ,  $\chi(G) = k$  se e solo se  $G$  è  $k$ -colorabile e non è  $(k - 1)$ -colorabile.

È ovvio che  $\chi(K_n) = n$ , per ogni  $n \geq 1$ , e che, nel caso dei cicli, si ha

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Per quanto osservato prima,  $\chi(G) = 2$  se e soltanto se  $G$  contiene almeno un lato ed è bipartito; dal Teorema 3.11 si ha quindi che  $\chi(G) = 2$  se e soltanto se  $G$  non ha cicli dispari (posto che  $G$  abbia almeno un lato). Criteri simili non sono noti per numeri cromatici più grandi di 2, ed è in genere piuttosto difficile determinare il numero cromatico di un grafo. Chiaramente, il numero cromatico di un grafo è maggiore o uguale a quello di ogni suo sottografo; dunque un limite inferiore al numero cromatico di un grafo è certamente dato dall'esistenza di sottografi completi: se  $G$  contiene un sottografo isomorfo al grafo completo  $K_n$ , allora  $\chi(G) \geq \chi(K_n) = n$ . Per formalizzare questo fatto, si chiama *numero di clique* di un grafo (finito)  $G$ , e si denota con  $\omega(G)$ , il massimo  $n$  tale che  $G$  contiene un sottografo isomorfo a  $K_n$ . Quindi, per ogni grafo  $G$ ,

$$\omega(G) \leq \chi(G) \tag{5.1}$$

(osserviamo che il numero di clique di  $G$  non è altro che l'indice di stabilità  $\alpha(\overline{G})$  del grafo complementare  $\overline{G}$ ). Più avanti (sezione 4.4) daremo una costruzione di grafi privi di triangoli (quindi con numero di clique uguale a 2) e numero cromatico arbitrariamente grande.

Non è complicato descrivere un algoritmo greedy che, dato un grafo  $G$ , ne fornisce una colorazione (in genere non ottimale). Si comincia col fissare un ordinamento  $v_1, v_2, v_3, \dots$

sull'insieme dei vertici di  $G$ , e si considerano i colori  $1, 2, 3, \dots$ . Si assegna colore 1 al vertice  $v_1$ , e colore 2 oppure 1 al vertice  $v_2$  a seconda che sia o no adiacente a  $v_1$ ; dopo di che si procede scorrendo la lista dei vertici ed assegnando ad ogni nuovo vertice il primo colore dell'elenco che sia ammissibile. In questo modo si ottiene certamente una colorazione di  $G$ , che tuttavia non è in generale realizzata con il minimo numero possibile di colori; dato che il numero di colori necessario dipende fortemente dalla scelta iniziale dell'ordinamento dei vertici (vedi esercizio 5.3). Ma non è possibile fare molto meglio; ed algoritmi che diano una colorazione ottimale, e quindi forniscano anche il valore esatto del numero cromatico del grafo, non sono noti.

Tuttavia, il semplice algoritmo che abbiamo descritto consente un'osservazione non del tutto banale. Per esporla meglio, fissiamo la seguente notazione: se  $G$  è un grafo, indichiamo con  $\Delta(G)$  il *massimo dei gradi* dei vertici di  $G$ . Immaginiamo quindi di operare mediante l'algoritmo di sopra su un grafo  $G$ , e supponiamo di avere a disposizione un insieme  $S$  di colori abbastanza grande. Notiamo allora che ad ogni passo i primi  $\Delta(G) + 1$  colori di  $S$  saranno sufficienti a procedere; infatti ad ogni nuovo vertice  $v$  è assegnato il primo colore ammissibile, ovvero il primo colore diverso da quelli di ogni vertice già colorato a cui  $v$  sia adiacente. Ora, il grado di  $v$  è al più  $\Delta(G)$ , e quindi ci sono al più  $\Delta(G)$  colori che non possiamo assegnare; dunque almeno un colore tra i primi  $\Delta(G) + 1$  che abbiamo a disposizione è ammissibile, e possiamo procedere. In conclusione, l'algoritmo descritto colora  $G$  con al più  $\Delta(G) + 1$  colori<sup>2</sup>. In altre parole abbiamo provato

$$\text{Sia } G \text{ un grafo, allora } \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (5.2)$$

I grafi completi  $K_n$  ed i cicli di lunghezza dispari  $C_{2n+1}$  sono esempi di grafi  $G$  il cui numero cromatico è uguale a  $\Delta(G) + 1$ . Il Teorema seguente mostra come essi siano essenzialmente i soli grafi con tale proprietà. Si noterà come il migliorare di un semplice valore 1 il limite trovato sopra sia tutt'altro che banale.

**Teorema 5.1.** (Brooks, 1941) *Sia  $G$  un grafo connesso che non sia un ciclo di lunghezza dispari o un grafo completo. Allora*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo per induzione sul numero di vertici di  $G$ . Possiamo quindi assumere che  $G = (V, E)$  sia un grafo connesso che non è né completo né un ciclo di lunghezza dispari, e tale che tutti i grafi con un numero inferiore di vertici soddisfano il Teorema. Poniamo  $d = \Delta(G)$ .

Osserviamo subito che possiamo assumere  $d \geq 3$ . Infatti, se  $d = 2$ , allora dalla formula dei gradi  $|V| \geq |E|$ ; essendo  $G$  connesso, si ha che  $|V| = |E|$  e  $G$  è un ciclo pari, oppure  $|V| = |E| + 1$  e allora  $G$  è un albero; in ogni caso  $G$  è 2-colorabile.

Sia dunque  $d \geq 3$ . Scegliamo un vertice  $v \in V$  con  $d_G(v) = d$ , e consideriamo il grafo  $H = G - v$  (ottenuto da  $G$  togliendo il vertice  $v$  e tutti i lati ad esso adiacenti). Sia  $H_0$  una componente connessa di  $H$ . Allora  $H_0$  è  $d$ -colorabile: infatti, se  $\Delta(H) = d$ , chiaramente  $H_0$

<sup>2</sup>Si osservi che, nelle considerazioni fatte, non è tanto il grado effettivo del nuovo vertice  $v$  che conta, quanto il grado di  $v$  nel sottografo indotto da esso e dai vertici già colorati; ciò suggerisce che, nell'ordinare i vertici del grafo prima di iniziare l'algoritmo, può essere una buona idea quella di mettere per primi i vertici con grado maggiore.

non può essere un grafo completo, dato che qualche vertice di  $H_0$  è connesso a  $v$ , e dunque è  $d$ -colorabile per ipotesi induttiva; mentre se  $\Delta(H_0) < d$  allora  $H_0$  è  $d$ -colorabile mediante l'algoritmo. Ne segue che anche  $H$  è  $d$ -colorabile. Siano  $v_1, v_2, \dots, v_d$  i vertici (di  $H$ ) adiacenti a  $v$  in  $G$ . Se, in una  $d$ -colorazione di  $H$ , due di questi vertici hanno lo stesso colore, allora almeno uno dei  $d$  colori non compare in  $v_1, \dots, v_d$ ; colorando  $v$  con tale colore otteniamo una  $d$ -colorazione di  $G$ . Pertanto possiamo assumere che:

- 1) ogni  $d$ -colorazione di  $H$  assegna colori distinti ai vertici  $v_1, \dots, v_d$ .

Conveniamo di chiamare  $i$  il colore del vertice  $v_i$  in una data  $d$ -colorazione di  $H$ .

Osserviamo anche che, per ogni  $i$  il grado di  $v_i$  in  $H$  è al più  $d-1$ ; se in una  $d$ -colorazione di  $H$ ,  $v_i$  è adiacente a due vertici dello stesso colore, allora i vertici adiacenti a  $v_i$  impiegano al massimo  $d-2$  colori, lasciando fuori, poniamo, il colore  $j \neq i$ , ma allora è possibile cambiare il colore di  $v_i$  con  $j$ , ottenendo ancora una  $d$ -colorazione di  $H$  che viola il punto 1). Dunque

- 2) per ogni  $1 \leq i \leq d$  ed ogni  $d$ -colorazione di  $H$ , i vertici adiacenti a  $v_i$  in  $H$  hanno colori distinti.

Similmente si osserva che, data una  $d$ -colorazione di  $H$ , se un vertice  $w$  di  $H$  è adiacente a tre vertici dello stesso colore, allora un colore diverso da quello di  $w$  non compare tra i vertici ad esso adiacenti, ed è possibile cambiare il colore di  $w$  con tale nuovo colore ottenendo ancora una  $d$ -colorazione di  $H$ .

Ora, per ogni  $1 \leq i < j \leq d$ , sia  $H_{i,j}$  il sottografo indotto in  $H$  dai vertici i cui colori sono  $i$  e  $j$ , e sia  $C_{i,j}$  la componente connessa di  $H_{i,j}$  che contiene  $v_i$ . È chiaro che possiamo scambiare tra loro colori  $i$  e  $j$  su tutti e soli i vertici di  $C_{i,j}$  ottenendo ancora una  $d$ -colorazione di  $H$ . Se  $v_j$  non appartenesse a  $C_{i,j}$ , si otterrebbe, mediante questo scambio, una  $d$ -colorazione di  $H$  in cui sia  $v_i$  che  $v_j$  hanno colore  $j$ , il che è escluso da 1). Pertanto

- 3)  $v_i$  e  $v_j$  appartengono alla stessa componente connessa  $C_{i,j}$  di  $H_{i,j}$ .

Ora, dati  $1 \leq i, j \leq d$ , sia  $\mathcal{P}$  un cammino semplice in  $C_{i,j}$  che connette  $v_i$  a  $v_j$ , e supponiamo che  $\mathcal{P} \neq C_{i,j}$ . Allora, essendo  $C_{i,j}$  connesso e poiché, per il punto 2), sia  $v_i$  che  $v_j$  hanno grado 1 in  $C_{i,j}$ , esiste un vertice  $w$  interno al cammino  $\mathcal{P}$  che ha grado almeno 3 in  $C_{i,j}$ ; sia  $w$  un tale vertice a minima distanza da  $v_i$ . Ora,  $w$  è adiacente a tre vertici dello stesso colore in  $C_{i,j}$  (che è 2-colorato) e dunque in  $H$ ; per quanto osservato in precedenza è possibile ricolorare  $w$  con uno dei  $d$  colori che è diverso sia dal colore  $i$  che dal colore  $j$ , ottenendo una nuova  $d$ -colorazione di  $H$ . In questa colorazione  $w$  non appartiene pertanto a  $C_{i,j}$ , e siccome rimuovere  $w$  da  $C_{i,j}$  rende il grafo restante sconnesso (si rifletta su questa affermazione), in questa nuova colorazione  $v_i$  e  $v_j$  non appartengono alla stessa componente connessa di  $H_{i,j}$ , in contraddizione con il punto 3). Dunque  $\mathcal{P}$  non contiene vertici di grado maggiore o uguale a 3 in  $C_{i,j}$ , e pertanto  $\mathcal{P} = C_{i,j}$ . Quindi

- 4) per ogni  $1 \leq i \leq d$ , il sottografo  $C_{i,j}$  è costituito da un unico cammino semplice con estremi  $v_i$  e  $v_j$ .

Supponiamo ora che per tre distinti  $i, j, k$  i cammini semplici  $C_{i,j}$  e  $C_{i,k}$ , oltre che in  $v_i$  abbiano un altro vertice in comune  $u$ . Allora, in  $H$ ,  $u$  (che ha ovviamente colore  $i$ ) è adiacente a due distinti vertici di colore  $j$  e due distinti vertici di colore  $k$ , e per la solita ragione possiamo ricolorare  $u$  con un colore diverso da  $i$ , ed in questa colorazione  $v_i$  non è più connesso a  $v_j$  in  $C_{i,j}$ , contro il punto 3). Pertanto

5) per distinti  $i, j, k$  i cammini semplici  $C_{i,j}$  e  $C_{i,k}$  si incontrano solo nel vertice  $v_i$ .

Osserviamo che i vertici  $v_1, v_2, \dots, v_d$  non sono tutti mutuamente adiacenti, perché in tal caso, essendo tutti adiacenti a  $v$  ed essendo  $d = \Delta(G)$  (e  $G$  connesso), si avrebbe che  $G$  è costituito dai vertici  $v, v_1, \dots, v_d$ , ed è un grafo completo, il che è contro l'ipotesi. Quindi tra essi esiste almeno una coppia, che possiamo assumere sia  $v_1, v_2$ , di vertici non adiacenti. In altre parole,  $C_{1,2}$  contiene un vertice  $u \neq v_2$  (di colore 2) adiacente a  $v_1$ . A questo punto, scambiamo i colori 1 e 3 per i vertici di  $C_{1,3}$ , ottenendo una nuova  $d$ -colorazione di  $H$ , rispetto alla quale indichiamo con  $H'_{i,j}$  e  $C'_{i,j}$  i grafi ricavati secondo le ovvie definizioni. Per 4) i  $C'_{i,j}$  sono cammini semplici. Ora  $u$  (che mantiene il colore 2, essendo adiacente a  $v_1$  (che ha colore 3)) appartiene a  $C'_{2,3}$ . D'altra parte il cammino semplice da  $u$  a  $v_2$ , ottenuto da  $C_{1,2}$  togliendo il vertice  $v_1$  ed il lato  $\{v_1, u\}$ , mantiene la sua vecchia colorazione nei colori 1 e 2 e quindi è il primo pezzo dell'unico cammino 1,2-colorato che parte da  $v_2$  (che mantiene colore 2) anche nella nuova colorazione; in altre parole è un pezzo del cammino semplice  $C'_{1,2}$ . Ma allora il vertice  $u$  (che non è  $v$ ) appartiene sia a  $C'_{2,3}$  che a  $C'_{1,2}$ . Questo contraddice 5) rispetto alla nuova colorazione, e conclude la dimostrazione del Teorema. ■

Chi ha letto la dimostrazione avrà notato come in essa non si faccia quasi alcun ricorso a risultati precedenti; a partire da definizioni di base (connessione, cammino semplice, etc.) viene sviluppato un ragionamento ad hoc che richiede un certa sottigliezza. Ciò è tipico di molte dimostrazioni in Teoria dei Grafi: spesso i problemi devono essere affrontati con mezzi teorici minimi, ma notevole ingegno. Quanto al contenuto del teorema di Brooks, esso è senz'altro significativo; tuttavia in generale il limite  $\Delta(G)$  è lontano dal valore effettivo di  $\chi(G)$ . Ma, sempre in generale, non è possibile fare molto meglio: ad esempio, non esiste una descrizione soddisfacente dei grafi  $G$  per cui  $\chi(G) = \Delta(G)$ .

**Polinomio cromatico.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo; per ogni  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ , si denota con  $p_G(k)$  il numero di colorazioni (dei vertici) di  $G$  con i colori  $\{1, 2, \dots, k\}$  (cioè il numero di applicazioni  $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  che sono colorazioni di  $G$ ); quindi, il numero cromatico di  $G$  è il minimo  $k$  tale che  $p_G(k) \geq 1$ .

È immediato constatare (lo si provi per esercizio) che se  $\Delta_1, \dots, \Delta_t$ , sono le componenti connesse di  $G$ , allora, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$p_G(k) = \prod_{i=1}^t p_{\Delta_i}(k). \quad (5.3)$$

Sia  $e = \{x, y\}$  un arco del grafo  $G$ ; come al solito,  $G - e$  è il grafo ottenuto da  $G$  togliendo l'arco  $e$ , denotiamo invece con  $G/e$  il grafo ottenuto da  $G$  identificando (o "fondendo") gli estremi di  $e$  (ed eventualmente cancellando archi doppi che si potrebbero ottenere).

**Lemma 5.2.** *Sia  $e$  un arco del grafo  $G$ ; allora per ogni  $k \geq 1$*

$$p_G(k) = p_{G-e}(k) - p_{G/e}(k).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $e = \{x, y\}$  un arco di  $G$ , e  $k \geq 1$ . Sia  $t$  il numero di  $k$ -colorazioni di  $G - e$  in cui  $x$  e  $y$  hanno lo stesso colore; poiché le colorazioni di  $G - e$  in cui  $x$  e  $y$  hanno colori diversi sono proprio le colorazioni di  $G$ , si ha

$$p_{G-e}(k) = p_G(k) + t. \quad (5.4)$$

D'altra parte, ad ogni  $k$ -colorazione di  $G - e$  in cui  $x$  e  $y$  hanno lo stesso colore si può naturalmente associare una colorazione di  $G/e$ , e viceversa. Quindi  $t = p_{G/e}(k)$  e l'identità nell'enunciato segue da (5.4). ■

**Teorema 5.3.** *Sia  $G$  un grafo con  $n$  vertici,  $m$  archi e  $t$  componenti connesse. Allora*

$$p_G(k) = \sum_{i=0}^{n-t} (-1)^i a_i k^{n-i} \quad (5.5)$$

dove  $a_i \in \mathbb{N}$  per ogni  $i = 0, \dots, n - k$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = m$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Induzione su  $m$ . Se  $m = 0$  allora  $n = t$  e  $p_G(k) = k^n$ , che è la (5.5) nel caso  $n - t = 0$ .

Sia  $m \geq 1$  e sia  $e$  un arco di  $G$ . Il numero di archi dei grafi  $G - e$  e  $G/e$  è  $m - 1$  (contando anche gli archi doppi nel secondo caso). Poiché il numero di componenti connesse di  $G/e$  è  $t$ , ed il numero di vertici  $n - 1$ , per ipotesi induttiva si ha:

$$p_{G/e}(k) = \sum_{i=0}^{n-1-t} (-1)^i c_i k^{(n-1)-i} \quad (5.6)$$

con  $c_i \in \mathbb{N}$  ( $i = 0, \dots, n - 1 - t$ ),  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = m - 1$ . Consideriamo ora il grafo  $G - e$ , il cui numero di vertici è  $n$  e quello delle componenti connesse  $s \in \{t, t + 1\}$ . Per ipotesi induttiva,

$$p_{G-e}(k) = \sum_{i=0}^{n-s} (-1)^i b_i k^{n-i} \quad (5.7)$$

con  $b_i \in \mathbb{N}$  ( $i = 0, \dots, n - 1 - t$ ),  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = m - 1$ . Applicando il Lemma 5.2 si ottiene l'uguaglianza dell'enunciato con  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $a_i = b_i + c_{i-1}$  per  $i > 0$ , in particolare  $a_1 = b_1 + c_0 = (m - 1) + 1 = m$ . ■

Il polinomio a coefficienti interi  $p_G(x)$  definito dalle identità in (5.5) si chiama il *polinomio cromatico* di  $G$ . Si osservi che, se  $e$  è un arco del grafo  $G$ , dal Lemma 5.2 segue che

$$p_G(x) = p_{G-e}(x) - p_{G/e}(x). \quad (5.8)$$

Inoltre, se  $k \in \mathbb{N}$  con  $k < \chi(G)$ , allora  $(x - k)$  divide  $p_G(x)$ .

Ad esempio, il polinomio cromatico di una cammino  $P_n$  è  $x^n(x - 1)^{n-1}$ , mentre quello di un triangolo è  $x(x - 1)(x - 2)$ ; dalla formula (5.8) deduciamo che il polinomio cromatico di un ciclo  $C_4$  è

$$P_{C_4}(x) = x(x - 1)^3 - x(x - 1)(x - 2) = (x - 1)^4 + (x - 1).$$

Si osservi anche che grafi non isomorfi possono avere lo stesso polinomio cromatico; ad esempio il polinomio cromatico di  $P_n$  è lo stesso di quello di una stella con  $n - 1$  raggi (cioè  $n - 1$  archi con un vertice in comune); vedi anche l'esercizio 5.10 per un'ulteriore generalizzazione.

## 5.2 Colorazioni dei lati.

Una **colorazione dei lati** di un grafo  $G$  è una assegnazione di un colore a ciascun lato di  $G$  in modo che lati consecutivi non abbiano lo stesso colore (in altri termini: in modo che per ogni vertice  $v$  di  $G$  i lati incidenti a  $v$  siano colorati con colori diversi). Formalmente, una colorazione dei lati di  $G = (V, E)$  è una applicazione  $c : E \rightarrow C$ , tale che, per ogni  $e_1, e_2 \in E$ ,  $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Rightarrow c(e_1) \neq c(e_2)$ .

Immaginiamo di dover organizzare un torneo all'italiana tra un numero  $n$  di squadre di calcio; quante giornate sono richieste (al minimo) per giocare tutte le partite? Siccome ogni squadra deve affrontare  $n - 1$  squadre, è chiaro che  $n - 1$  è un limite inferiore al numero totale di giornate. Forse saremmo portati a ritenere che sia anche il numero giusto: questo è vero se  $n$  è pari (ma non è del tutto ovvio), ma non è vero se  $n$  è dispari. Supponiamo, ad esempio, che le squadre siano 9; allora il numero complessivo di partite da giocare è  $\binom{9}{2} = 36$ ; se fossero sufficienti 8 giornate per disputarle tutte ci sarebbe almeno una giornata in cui vengono disputate 5 partite (dato che  $8 \times 4 = 32 < 36$ ), ma 5 partite coinvolgono 10 squadre, il che è impossibile. Dunque, se  $n$  è dispari sono necessarie almeno  $n$  giornate per completare il torneo. Sono sufficienti? Come vedremo la risposta è sì. Per il momento osserviamo come questo problema si riduca naturalmente al problema della colorazione dei lati del grafo completo  $K_n$  che impieghi il minimo numero di colori: i vertici sono le diverse squadre, ed ogni colore indica le partite da giocarsi in una stessa giornata. Trovare una colorazione del genere fornisce quindi anche il calendario completo degli incontri. Discuteremo più avanti questo caso in dettaglio; per il momento, torniamo a considerazioni di carattere generale.

Il minimo numero di colori mediante i quali è possibile colorare i lati di un grafo  $G$  si chiama **indice cromatico** di  $G$ , e lo denoteremo con  $\chi'(G)$ .

Sia  $C_n$  il ciclo di lunghezza  $n$ ; allora è facile provare che  $\chi'(C_n)$  è uguale a 2 o a 3 a seconda che  $n$  sia pari o dispari. L'esempio di sopra chiede di trovare l'indice cromatico di un grafo completo: questione sulla quale torneremo dopo aver fatto la seguente banale osservazione. Supponiamo sia data una colorazione dei lati di un grafo  $G$ ; allora, per ogni vertice  $v$  di  $G$ , i lati incidenti a  $v$  hanno tutti colore diverso; quindi il numero di colori è almeno pari al grado di  $v$ . Pertanto, per ogni grafo  $G$ , si ha

$$\Delta(G) \leq \chi'(G)$$

dove  $\Delta(G)$  è il massimo dei gradi dei vertici di  $G$ .

Veniamo ora alla questione di determinare l'indice cromatico dei grafi completi  $K_n$ . Per quanto appena osservato,  $\chi'(K_n) \geq \Delta(K_n) = n - 1$ . Supponiamo prima che  $n = 2k + 1$  sia dispari; in tal caso il numero di lati è  $|E| = k \cdot (2k + 1)$ . Se fosse  $\chi' = \chi'(K_{2k+1}) = 2k$ , allora per almeno uno dei colori  $s$ , il numero  $t(s)$  di lati di colore  $s$  deve soddisfare

$$t(s) \geq |E|/\chi' = \frac{k(2k+1)}{2k} = \frac{2k+1}{2};$$

e siccome tale numero è un intero, deve essere  $t(s) \geq k + 1$ . Ma lati dello stesso colore hanno tutti estremi distinti, e  $k + 1$  lati hanno  $2k + 2$  estremi distinti, il che non può essere, perché questo numero supera quello dei vertici di  $K_{2k+1}$ . Dunque  $\chi' \geq \Delta(K_{2k+1}) + 1 = 2k + 1$ . A questo punto diamo una esplicita colorazione con  $2k + 1$  colori che poi ci sarà utile anche

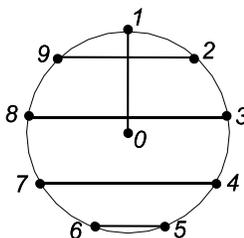
nel caso pari. Come insieme  $S$  dei colori prendiamo l'insieme delle classi di resto modulo  $n = 2k+1$ , che scriviamo come  $S = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$ ; quindi etichettiamo i vertici di  $K_n$  con gli interi  $0, 1, \dots, n-1$ , ed assegnamo ad ogni lato  $\{i, j\}$  di  $K_n$  il colore  $\gamma'(\{i, j\}) = [i+j]_n$ . Se due lati  $\{i, j\}$  ed  $\{i, k\}$  con un estremo in comune hanno lo stesso colore, allora  $i+j \equiv i+k \pmod{n}$ , da cui  $j \equiv k \pmod{n}$ , da cui segue  $j = k$  dato che entrambi sono compresi tra  $0$  e  $n-1$ . Dunque quella data è una colorazione dei lati di  $K_n$  con  $n$  colori. Osserviamo che, per ciascun vertice  $i$ , i lati adiacenti ad  $i$  assumono tutti i colori di  $S$  tranne il colore  $[2i]_n$ ; poiché  $n$  è dispari, l'insieme delle classi  $[2i]_n$ , con  $0 \leq i \leq n-1$  è tutto  $S$ ; concludiamo dunque che tali colori "mancanti" sono, al variare dei vertici, tutti diversi.

Supponiamo ora che  $n = 2k$  sia pari (con  $k \geq 2$ ), e indichiamo con  $0, 1, \dots, n-1$  i suoi vertici. Togliamo da  $K_n$  il vertice  $n-1$  e coloriamo i lati del restante grafo completo  $K_{n-1}$  con il metodo descritto in precedenza (i colori sono le classi di resto modulo  $n-1$ ). Quindi ad ogni vertice del tipo  $\{i, n-1\}$  assegnamo il colore  $[2i]_{n-1}$ . Per quanto osservato sopra, in tal modo si ottiene una colorazione dei lati di  $K_n$ , e questa utilizza  $n-1$  colori.

Abbiamo dunque provato il seguente risultato.

**Proposizione 5.4.** *Sia  $k \geq 1$ . Allora  $\chi'(K_{2k}) = 2k-1$  e  $\chi'(K_{2k+1}) = 2k+1$ .*

Le esplicite colorazioni di  $K_n$  che abbiamo dato forniscono un metodo, nel caso si tratti di rappresentare lo schema di un torneo all'italiana, per stilare un calendario, mediante il quale è inoltre possibile determinare con un semplice calcolo in quale giornata una data partita  $\{i, j\}$  dovrà essere disputata. La figura seguente (dove si considera il caso di  $n = 10$  squadre) ne è una rappresentazione:



Rispetto alla descrizione con le classi di resto data sopra, nel diagramma sono indicati mediante archi spessi gli incontri della prima giornata; quelli della seconda giornata si ottengono tenendo fissi i numeri sui vertici e ruotando il diagramma dei lati di  $1/9$  di angolo giro; un'ulteriore rotazione darà gli incontri della terza giornata, e così via.

Tornando al caso generale, e prima di passare ai teoremi principali, facciamo un'utile osservazione sui sottografi "bicolori". Siano  $\alpha, \beta$  due colori distinti in una data colorazione dei lati del grafo  $G = (V, E)$ , denotiamo con  $E_{\alpha, \beta}$  l'insieme dei lati colorati con  $\alpha$  o  $\beta$ , e con  $G_{\alpha, \beta} = (V, E_{\alpha, \beta})$  il fattore di  $G$  costituito dai soli lati in  $E_{\alpha, \beta}$ . Allora, in  $G_{\alpha, \beta}$  ogni vertice ha grado al più 2, e dunque le componenti connesse di  $G_{\alpha, \beta}$  sono *cammini semplici* (tipo  $P_m$ ) oppure *cicli* (tipo  $C_m$ ).

Ancora, un poco di terminologia servirà ad abbreviare alcuni passi nelle dimostrazioni. Sia  $v \in V$  un vertice del grafo  $G = (V, E)$ ; data una colorazione  $c : E \rightarrow C$ , un colore  $\alpha \in C$  si dice *c-disponibile* in  $v$  se per ogni arco  $e \in E$  incidente a  $v$ ,  $c(e) \neq \alpha$ .

**Proposizione 5.5.** (König 1916) *Sia  $G$  un grafo bipartito. Allora  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un grafo bipartito, e procediamo per induzione sul numero di lati  $|E|$ . Se  $|E| = 0$  non c'è nulla da provare.

Sia quindi  $|E| \geq 1$ , sia  $d = \Delta(G)$ , e sia  $e = \{x, y\} \in E$ . Per ipotesi induttiva, esiste una colorazione  $c'$  dei lati del grafo  $G - e$  mediante  $d$  colori. In  $G' = G - e$  i vertici  $x$  e  $y$  hanno grado al più  $d - 1$ ; quindi ci sono due colori  $\alpha$  e  $\beta$  (tra i  $d$  a disposizione) tale che  $\alpha$  è  $c'$ -disponibile in  $x$  e  $\beta$  è  $c'$ -disponibile in  $y$ . Se  $\alpha = \beta$ , basta assegnare ad  $e$  il colore  $\alpha$  per estendere  $c'$  ad una  $d$ -colorazione dei lati di  $G$ .

Supponiamo  $\alpha \neq \beta$ , o meglio che  $\beta$  non sia  $c'$ -disponibile in  $x$ , ovvero che in  $G' = G - e$ ,  $x$  sia estremo di un lato (ed uno solo) colorato con  $\beta$ . Il grado di  $x$  nel grafo bicolore  $G'_{\alpha, \beta}$  è 1, e dunque, per quanto osservato sopra, la componente connessa contenente  $x$  nel grafo  $G'_{\alpha, \beta}$  è un cammino semplice  $\mathcal{P}$  con un estremo in  $x$ . Ora,  $\mathcal{P}$  non può contenere il vertice  $y$ , perché, se così fosse, dato che  $\beta$  è  $c'$ -disponibile in  $y$ ,  $y$  sarebbe l'altro estremo di  $\mathcal{P}$  ed inoltre sarebbe estremo di un lato colorato con  $\alpha$ ; dunque  $\mathcal{P}$  avrebbe lunghezza pari, per cui aggiungendo ad esso il lato  $e$  si otterrebbe un ciclo di lunghezza dispari in  $G$ , il che è assurdo essendo  $G$  bipartito. A questo punto, ricoloriamo i lati di  $\mathcal{P}$ , scambiando i due colori  $\alpha$  e  $\beta$ ; poiché  $\mathcal{P}$  è una componente connessa di  $G'_{\alpha, \beta}$  questo dà luogo ad una nuova  $d$ -colorazione dei lati di  $G' = G - e$ , rispetto alla quale  $\beta$  è disponibile sia in  $x$  che in  $y$ . Assegnando allora al lato  $e$  il colore  $\beta$  si ottiene una  $d$ -colorazione dei lati di  $G$ . ■

Così, supponiamo che un'agenzia (per esempio, matrimoniale) per ciascun individuo  $x$  in un certo insieme  $A$  abbia individuato, mediante un test preliminare, una rosa di 12 individui appartenenti ad un altro insieme  $B$  (disgiunto da  $A$ ) ritenuti 'affini' ad  $x$ , e che intenda quindi organizzare degli incontri a due tra coppie di individui 'affini'. Supponiamo anche che per ciascun individuo (nell'insieme  $A$  o in  $B$ ) l'agenzia intenda organizzare al più un incontro al giorno. Il Teorema 5.5 assicura allora che, indipendentemente da quanti siano gli individui in  $A$  e in  $B$ , l'agenzia potrà organizzare tutti gli incontri tra 'affini' in 12 giorni.

Ricordiamo ora la definizione di *line graph*  $L(G)$  di un grafo  $G$ : è il grafo i cui vertici sono gli archi di  $G$  e due di essi sono adiacenti in  $L(G)$  se e soltanto se hanno un estremo in comune in  $G$ . Si riconosce quindi che l'indice cromatico di un grafo  $G$  coincide con il numero cromatico del suo line graph  $L(G)$ . Osservando che ogni lato di un grafo  $G$  ha un estremo in comune con al più  $2\Delta(G) - 2$  altri lati (e quindi  $\Delta(L(G)) \leq 2\Delta(G) - 2$ ), ed applicando il Teorema di Brooks al grafo  $L(G)$ , si ricava  $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 2$ . Tuttavia, si può dire molto di più: infatti vale il seguente importante risultato.

**Teorema 5.6.** (Vizing 1964) *Sia  $G$  un grafo. Allora*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta provare la seconda disuguaglianza. Procediamo per assurdo. Sia  $G = (V, E)$  grafo con  $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$  e con numero  $|E|$  di archi minimo possibile. Osserviamo che  $E \neq \emptyset$ . Poniamo  $d = \Delta(G)$ .

Per ogni lato  $e = \{x, y\} \in E$ , la minimalità di  $G$  implica l'esistenza di una  $(d + 1)$ -colorazione degli archi di  $G - e$ . Se  $c$  è una  $(d + 1)$ -colorazione degli archi di  $G - e$ , uno stesso colore  $\alpha$  non può essere  $c$ -disponibile in entrambi gli estremi di  $e$ , poiché altrimenti potremmo estendere  $c$  ad una colorazione di  $E$  ponendo  $c(e) = \alpha$ . Inoltre, se  $\alpha$  è un colore  $c$ -disponibile in

$x$ , e  $\beta$  è un colore  $c$ -disponibile in  $y$ , la componente connessa bicolore contenente  $x$  in  $(G-e)_{\alpha,\beta}$  è un cammino semplice  $\mathcal{P}$  in che inizia dal vertice  $x$  (i cui archi sono alternativamente  $c$ -colorati  $\alpha$  e  $\beta$ ) che chiamiamo  $\alpha|\beta$ -cammino; se tale cammino non termina in  $y$ , possiamo ricolorare gli archi di  $G-e$ , scambiando i colori  $\alpha$  e  $\beta$  sui soli archi del cammino  $\mathcal{P}$ , ottenendo così una nuova colorazione di  $G-e$  in cui  $\alpha$  è disponibile sia in  $x$  che in  $y$ , in contraddizione con quanto sopra osservato. Abbiamo quindi:

(+) Per ogni arco  $\{x, y\}$  ed ogni  $(d+1)$ -colorazione degli archi di  $G - \{x, y\}$  in cui il colore  $\alpha$  è disponibile in  $x$  e il colore  $\beta$  è disponibile in  $y$ , esiste un  $\alpha|\beta$ -cammino da  $x$  a  $y$ .

Sia  $e_0 = \{x, y_0\} \in E$ , e sia  $c_0 : E \setminus \{e_0\} \rightarrow C$  una fissata  $(d+1)$ -colorazione di  $G_0 = G - e_0$ . Per (+), esiste un arco  $e_1 = \{x, y_1\}$  ( $e_1 \neq e_0$ ) tale che  $c_0(e_1)$  è  $c_0$ -disponibile in  $y_0$ .

Sia  $k$  massimo tale che esistano archi distinti  $e_0 = \{x, y_0\}, \dots, e_k = \{x, y_k\}$  tali che, per  $0 \leq i \leq k-1$ :

- $c_0(e_{i+1})$  è  $c_0$ -disponibile in  $y_i$ .

Per quanto appena osservato  $k \geq 1$ ; dunque  $1 \leq k \leq d-1$ . Ora, il fatto che, per ogni  $i = 0, \dots, k-1$ ,  $c_0(e_{i+1})$  sia un colore  $c_0$ -disponibile nel vertice  $y_i$  consente di definire  $c_i : E \setminus \{e_i\} \rightarrow C$  ponendo,

- $c_i(e_j) = c_0(e_{j+1})$  per ogni  $0 \leq j < i$
- $c_i(e) = c_0(e)$  per ogni  $e \notin \{e_0, e_1, \dots, e_i\}$ .

e di verificare facilmente che, per ogni  $i = 1, \dots, k$ , tale funzione  $c_i$  è una colorazione degli archi di  $G - e_i$  (ad esempio: per induzione su  $i$ ).

Sia  $\beta \in C$  un colore  $c_0$ -disponibile in  $y_k$ . Allora  $\beta$  è  $c_i$ -disponibile in  $y_k$  per ogni  $i, i = 0, \dots, k$ .

Sia ora  $\alpha$  un colore  $c_0$ -disponibile in  $x$ ; osserviamo che  $\alpha$  è  $c_i$ -disponibile in  $x$ , per ogni  $i, i = 0, \dots, k$ . Per (+)  $\alpha \neq \beta$ , e nella colorazione  $c_k$  esiste un  $\alpha|\beta$ -cammino  $\mathcal{P}$  in  $G - e_k$  da  $y_k$  in  $x$ . Sia  $y$  il penultimo vertice in  $\mathcal{P}$  (cioè,  $\{x, y\}$  è l'ultimo arco di  $\mathcal{P}$ ). Osserviamo che  $c_k(\{x, y\}) = \beta$  (perché  $\alpha$  è disponibile in  $x$ ); se fosse  $y \notin \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ , allora potremmo porre  $y_{k+1} = y$ , contro la massimalità di  $k$ . Dunque è  $y = y_i$  per un opportuno  $i, 0 \leq i < k$ ; ovvero  $e_i = \{x, y_i\}$  è l'ultimo lato di  $\mathcal{P}$  e

$$\beta = c_k(e_i) = c_0(e_{i+1}).$$

Per la scelta dei vertici  $y_j$ ,  $\beta$  è  $c_0$ -disponibile in  $y_i$  e quindi  $\beta$  è  $c_i$ -disponibile in  $y_i$ . Per (+) esiste quindi un  $\alpha|\beta$ -cammino  $\mathcal{P}'$  da  $y_i$  a  $x$  nella colorazione  $c_i$  di  $G - e_i$ .

Osserviamo però che la parte  $\mathcal{P}_0$  del cammino  $\mathcal{P}$  compresa fra i vertici  $y_i$  e  $y_k$  non può che essere l'inizio del cammino  $\mathcal{P}'$ , poiché i lati di  $\mathcal{P}_0$  sono contenuti nell'insieme  $E_0 = E \setminus \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$  e le colorazioni  $c_i$  e  $c_k$  coincidono su  $E_0$ . Ma da  $y_k$  non si può continuare con un lato di  $G - e_i$  colorato (da  $c_i$ ) con colore  $\beta$ , perché  $\beta$  è  $c_i$ -disponibile in  $y_k$ . Segue  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_0$  e quindi  $\mathcal{P}'$  termina in  $y_k$ , che è una contraddizione. ■

Dunque, ad esempio, ricordando il caso degli incontri bilaterali al congresso intergalattico citato nell'introduzione al capitolo, possiamo concludere che sicuramente tali incontri potranno tutti aver luogo in un numero di giornate pari a quello del massimo numero di incontri che una singola delegazione intende effettuare più uno. Un risultato non del tutto ovvio.

### 5.3 $L$ -colorazioni.

Il concetto di  $L$ -colorazione (dove  $L$  sta per “lista”, anche se non allude ad alcuna forma di ordinamento) è un’importante generalizzazione del concetto di colorazione (dei vertici, o degli archi). L’obiettivo finale è lo stesso: colorare i vertici (archi) di un grafo in modo che vertici adiacenti (archi consecutivi) abbiano colori diversi, ma con la limitazione derivante dalla richiesta che il colore di ciascun vertice (o arco)  $x$  sia assegnato prendendolo da una “lista”  $L(x)$  di colori associata a  $x$  (che, in generale, non coincide con l’insieme di tutti i colori disponibili).

Formalizziamo la cosa nel caso dei vertici. Sia  $G = (V, E)$  un grafo, e sia  $L$  un’applicazione (*lista*) che ad ogni  $v \in V$  associa un insieme non vuoto  $L(v)$ ; una  $L$ -colorazione di  $G$  è una colorazione di  $G$

$$c : V \longrightarrow \bigcup_{v \in V} L(v)$$

tale che  $c(v) \in L(v)$  per ogni  $v \in V$ .

Sia  $k \geq 1$ ; un’applicazione  $L$  del tipo descritto sopra la chiameremo  $k$ -lista se  $|L(v)| \geq k$  per ogni  $v \in V$ . A prima vista parrebbe che se  $k$  è il numero cromatico del grafo  $G$ , allora per ogni  $k$ -lista  $L$ , avendo a disposizione  $k$ -scelte per il colore di ciascun vertice, sia sempre possibile trovare una  $L$ -colorazione di  $G$ . L’esempio della figura 5.1 mostra che così non è.

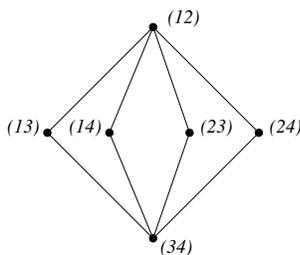


Figura 5.1:  $K_{2,4}$  non è 2-assegnabile

Il grafo in figura è il grafo bipartito  $K_{2,4}$ , ha quindi numero cromatico 2, ma non è possibile estrarre una colorazione dalla 2-lista indicata in figura.

Sia  $k \geq 1$ . Un grafo  $G = (V, E)$  si dice  $k$ -assegnabile se per ogni  $k$ -lista  $L$  su  $V$  esiste una  $L$ -colorazione di  $G$ . Il numero  $\ell$ -cromatico di  $G$  è il minimo  $k$  tale che  $G$  è  $k$ -assegnabile; esso si denota con  $ch(G)$  (dove  $ch$  sta per “choosable”, che noi abbiamo goffamente tradotto con “assegnabile”).

È chiaro che  $ch(G) \geq \chi(G)$ , per ogni grafo  $G$ . È inoltre ovvio che il numero  $\ell$ -cromatico di un grafo completo con  $n$  vertici è  $n - 1$ , cioè  $ch(K_n) = n - 1 = \chi(K_n)$ , e si può provare che lo stesso avviene per i cicli, ovvero  $ch(C_n) = 2, 3$  a seconda che  $n$  sia pari o dispari (ma in questo caso la dimostrazione non è ovvia, vedi esercizio 5.25). In generale però, come abbiamo osservato sopra, la disuguaglianza  $ch(G) \geq \chi(G)$  è propria. Difatti,  $K_{2,4}$  ha numero  $\ell$ -cromatico 3, e non dovrebbe risultare difficile generalizzare l’esempio della figura 5.1 per dimostrare che, per ogni  $n \geq 2$ ,  $K_{n,n}$  ha numero  $\ell$ -cromatico maggiore o uguale a  $n + 1$  (altri esempi di grafi bipartiti con numero  $\ell$ -cromatico arbitrariamente grande sono suggeriti negli

esercizi 5.26 e 5.27). Di fatto, la classe dei grafi con numero  $\ell$ -cromatico 2 è piuttosto ristretta (pur se contiene ogni albero), ed è essenzialmente descritta dalla seguente Proposizione.

**Proposizione 5.7.** *Sia  $G$  un grafo connesso e privo di vertici di grado 1. Allora  $ch(G) = 2$  se e soltanto se  $G$  è un ciclo di lunghezza pari oppure  $G$  consiste di un ciclo di lunghezza pari e di un ciclo di lunghezza 4 che in comune hanno due archi consecutivi.*

DIMOSTRAZIONE. Vedi esercizi 5.29–5.30. ■

D'altra parte, limitazioni generali per il numero  $\ell$ -cromatico di un grafo si procurano in modo simile a quanto visto per il numero cromatico. Ad esempio, riguardando la descrizione dell'algoritmo greedy nella sezione 5.1, si riconosce come quello stesso algoritmo fornisca una  $L$ -colorazione del grafo  $G$  per ogni  $k$ -lista  $L$  con  $k \geq \Delta(G) + 1$ . Di fatto, sussiste il Teorema di Brooks per  $L$ -colorazioni (quindi  $ch(G) \leq \Delta(G)$  per ogni grafo  $G$  che non sia completo o un ciclo dispari). Quello che proveremo ora è un bel Teorema riguardante i grafi planari (che va confrontato con il Teorema dei Quattro Colori).

**Teorema 5.8.** (Thomassen 1994) *Sia  $G$  un grafo planare; allora  $ch(G) \leq 5$ .*

Per la dimostrazione, è conveniente introdurre la classe dei grafi *triangolati*: un grafo è triangolato se è piano ed ogni sua faccia limitata è un triangolo (ovvero ha il bordo costituito da tre archi), mentre il bordo di quella esterna è un ciclo.

**Lemma 5.9.** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo triangolato con almeno tre vertici; sia  $C$  l'insieme dei vertici del ciclo che costituisce il bordo esterno di  $G$ . Sia  $L$  una lista di colori sui vertici di  $G$  tale che  $|L(x)| \geq 3$  per ogni  $x \in C$ , e  $|L(x)| \geq 5$  per ogni  $x \in V \setminus C$ . Siano  $x_1, x_2$  vertici consecutivi di  $C$ . Allora ogni  $L$ -assegnazione di colori (distinti) di  $x_1$  e  $x_2$  può essere estesa ad una  $L$ -colorazione di  $G$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sul numero  $n$  di vertici di  $G$ . Se  $n = 3$ ,  $G$  è un triangolo e la cosa è chiara. Sia dunque  $n \geq 4$ , ed assumiamo il Lemma vero per grafi triangolati con un numero minore di vertici. Sia  $C : x_1 x_2 \dots, x_t x_1$  il ciclo esterno di  $G$  e distinguiamo 2 casi.

(1) Esiste un vertice  $x_i$  del ciclo  $C$  con  $2 \leq i \leq t - 2$ , adiacente a  $x_t$  (l'arco  $\{x_t, x_i\}$  si dice una *corda* del ciclo  $C$ ).

In questo caso, la corda  $e = \{x_t, x_i\}$  ripartisce  $G$  in due porzioni del piano, che hanno in comune soltanto  $e$  (con i suoi due estremi). Sia  $G_1$  il sottografo indotto dalla porzione che contiene il vertice  $x_1$  (e, di conseguenza, anche  $x_2$ ); è facile vedere che  $G_1$  è triangolato, e quindi, per ipotesi induttiva, esiste una  $L$ -colorazione di  $G_1$  che estende la data colorazione di  $x_1$  e  $x_2$ . Sia poi  $G_2$  il sottografo indotto dai vertici dell'altra porzione; anche  $G_2$  è triangolato e  $x_t$  ed  $x_i$  sono vertici consecutivi nel suo ciclo esterno; per ipotesi induttiva, possiamo estendere la colorazione di  $x_t$  e quella di  $x_i$  ricavate dalla  $L$ -colorazione di  $G_1$  ad una  $L$ -colorazione di  $G_2$ . È chiaro che le  $L$ -colorazioni delle due porzioni separate da  $e$  sono compatibili e forniscono una  $L$ -colorazione di  $G$  con la proprietà richiesta.

(2)  $x_t$  non è adiacente ad alcun vertice  $x_2, \dots, x_{t-2}$ .

Siano  $x_{t-1}, y_1, \dots, y_m, x_1$  i vertici adiacenti ad  $x_t$ , ordinati in modo che siano vertici consecutivi di un ciclo  $U : x_1 x_2 \dots x_{t-1} y_1 \dots y_m x_1$  (ciò è possibile perché  $G$  è triangolato: vedi Figura 5.2). Siano 1 il colore inizialmente assegnato a  $x_1$ , e siano  $c, s$  colori distinti in  $L(x_t)$  e diversi da 1. Sia  $G' = G - x_t$ , allora il ciclo  $U$  è il bordo esterno di  $G'$ . Sui vertici di  $G'$  consideriamo le lista di colori  $L'$ , dove  $L'(y) = L(y)$  se  $y \notin \{y_1, \dots, y_m\}$ , e  $L'(y_j) = L(y_j) \setminus \{c, s\}$ ,

per  $j = 1, \dots, m$ . Per la condizione (2), tutti i vertici  $y_1, \dots, y_m$  sono vertici interni del grafo di partenza  $G$ , e dunque  $|L'(y_i)| \geq 3$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Possiamo pertanto applicare l'ipotesi induttiva: esiste una  $L'$ -colorazione di  $G'$  (che è quindi anche una  $L$ -colorazione) che estende la data colorazione di  $x_1$  e  $x_2$ . In questa colorazione uno dei due colori  $c, s$  non compare tra i vertici adiacenti a  $x_t$ ; possiamo quindi estendere la colorazione di  $G'$  ad una  $L$ -colorazione di  $G$  assegnando a  $x_t$  tale colore. ■

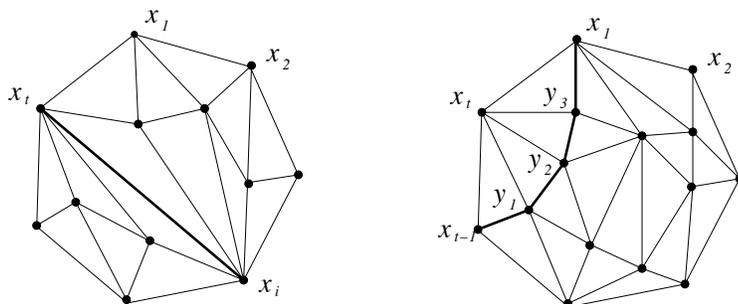


Figura 5.2: I due casi della dimostrazione del Lemma 5.9

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.8.** Si prova facilmente che ogni grafo piano  $G$  si può estendere, mediante l'aggiunzione, se necessario, di nuovi archi, ad un grafo piano triangolato  $G'$  (ad esempio, ogni grafo piano massimale è triangolato - vedi esercizio ??). A questo punto, poiché un grafo planare è isomorfo ad un grafo piano, l'affermazione dell'enunciato segue immediatamente dal Lemma 5.9. ■

Dal Teorema di Thomassen discende immediatamente che il numero cromatico di un grafo planare è al più 5. La dimostrazione diretta di questo risultato, trovata da Heawood nel 1890, è considerevolmente più intricata: il che illustra il fatto, non infrequente in matematica - in particolare quando si applichino argomenti induttivi - che, invece di ciò che risulta più naturale, può essere più agevole dimostrarne un'opportuna generalizzazione. Come abbiamo già detto nella sezione 2.2, la congettura che il numero cromatico di un grafo planare è al più 4 è stata provata da Appel e Haken nel 1976 mediante un considerevole (e a tutt'oggi ancora necessario) utilizzo del computer. Per quanto riguarda invece il numero  $\ell$ -cromatico, è stato provato (Voigt) che esistono grafi planari per i quali tale numero è 5, e quindi che il Teorema 5.8 è migliore possibile.

**List coloring di archi.** La definizione di  $L$ -colorazione degli archi di un grafo  $G = (V, E)$  è analoga: data una assegnazione di liste di colori  $L$  che ad ogni  $e \in E$  associa l'insieme  $L(e)$ ; una  $L$ -colorazione degli archi di  $G$  è un'applicazione

$$c' : E \longrightarrow \bigcup_{e \in E} L(e),$$

tale che  $c'(e) \in L(e)$  per ogni  $e \in E$ , e  $c'(e) \neq c'(e_1)$  per ogni coppia  $e$  ed  $e_1$  di archi con un vertice in comune.

L'indice  $\ell$ -cromatico del grafo  $G = (V, E)$ , che si denota con  $ch'(G)$ , è dunque il minimo  $k$  tale che per ogni  $k$ -lista  $L$  su  $E$  esiste una  $L$ -colorazione degli archi di  $G$ .

È chiaro che  $ch'(G)$  non può essere minore dell'indice cromatico  $\chi'(G)$ , e non è difficile provare (usando il teorema di Brooks per  $L$ -colorazioni sul line graph) che  $ch'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ , per ogni grafo  $G$ . Tuttavia, in questo caso, è stata formulata la seguente

**Congettura.**  $ch'(G) = \chi'(G)$  per ogni grafo  $G$ .

Il risultato più significativo in direzione della dimostrazione di tale congettura è il seguente Teorema di Galvin (che non dimostriamo).

**Teorema 5.10.** (Galvin 1995) *Sia  $G$  un grafo bipartito; allora  $ch'(G) = \chi'(G)$ .*

Pertanto, tenendo conto della proposizione 5.5, se  $G$  è un grafo bipartito, allora

$$ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G).$$

## 5.4 Grafi perfetti

Abbiamo già osservato (disuguaglianza (5.1)) che il numero cromatico di un grafo  $G$  non può essere inferiore al suo numero di clique (ovvero al massimo  $n$  tale che  $G$  contiene un sottografo isomorfo a  $K_n$ ).

Nel prossimo capitolo, come applicazione della Teoria di Ramsey, proveremo che *esistono grafi  $G$  privi di triangoli (dunque tali che  $\omega(G) = 2$ ) e numero cromatico arbitrariamente grande*; quindi non solo la disuguaglianza in (5.1) è in generale propria; ma anzi il numero cromatico non può essere in alcun modo limitato in funzione del numero di clique.

Di fatto, come abbiamo già accennato, Erdős e Lovász hanno provato l'esistenza, per ogni  $g, k \geq 4$ , di grafi con calibro  $\geq g$  e numero cromatico  $\geq k$ .

Detto in modo informale, questi esempi mostrano che il numero cromatico ha un significato che riguarda "globalmente", e non "localmente", il grafo: infatti, grafi con calibro molto grande, possono essere pensati come "localmente privi di circuiti" (e quindi localmente 2-colorabili), ma possono tuttavia avere numero cromatico grande. Diventa quindi interessante considerare grafi in cui il numero cromatico è determinato "localmente", e la formalizzazione migliore di questa idea ancor vaga è quella che porta alla definizione di grafo perfetto.

Un grafo  $G$  si dice **perfetto** se  $\chi(H) = \omega(H)$  per ogni sottografo indotto  $H$  di  $G$ .

Ogni grafo completo è perfetto (i sottografi indotti di un grafo completo sono completi).

- Se un grafo, con almeno un arco, non ha triangoli (ovvero sottografi indotti isomorfi a  $K_3$ ), allora  $\omega(G) = 2$ , e dunque se  $G$  non è bipartito non è perfetto. Viceversa, ogni grafo bipartito è perfetto: infatti se  $H$  è un sottografo indotto di un grafo bipartito, allora  $H$  è bipartito, quindi non contiene triangoli e dunque (a meno che  $H$  sia privo di archi, nel qual caso  $\chi(H) = \omega(H) = 1$ ) si ha  $\chi(H) = 2 = \omega(H)$ .

- Sia  $\overline{G}$  il grafo complementare di un grafo bipartito  $G$ ; a partire da un accoppiamento massimale  $\{e_1, \dots, e_{\nu(G)}\}$  di  $G$  possiamo dare una colorazione a  $\overline{G}$  assegnando colore  $i$  agli estremi dell'arco  $e_i$ , ed un diverso colore ad ogni altro vertice che non compaia tra gli estremi degli archi  $e_1, \dots, e_{\nu(G)}$ ; quindi  $\chi(\overline{G}) \leq n - \nu(G)$ . D'altra parte, dal Corollario 3.13 segue  $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}) = \alpha(G) = n - \nu(G)$ ; quindi  $\chi(\overline{G}) = n - \nu(G) = \omega(\overline{G})$ . Poiché (come si vede facilmente) ogni sottografo indotto di  $\overline{G}$  è a sua volta il grafo complementare di un sottografo indotto di  $G$ , si conclude che il complementare di un grafo bipartito è perfetto.

• Sia ora  $L(G)$  il line-graph di un grafo bipartito  $G$ . Allora, come si vede facilmente, si ha  $\omega(L(G)) = \Delta(G)$ ; tenendo conto che inoltre (come osservato nella sezione 5.2)  $\chi(L(G)) = \chi'(G)$ , dal Teorema di König 5.5 segue  $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$ . Osservando poi che ogni sottografo indotto di  $L(G)$  è il line-graph di un opportuno grafo bipartito, si conclude che  $L(G)$  è un grafo perfetto. A questo punto si verifica (vedi teorema 5.12 oppure l'esercizio 5.33) che anche il complementare di  $L(G)$  è perfetto.

Abbiamo dunque il seguente risultato.

**Proposizione 5.11.** *I grafi bipartiti, i grafi complementari dei grafi bipartiti, i line-graph dei grafi bipartiti e i loro complementari sono perfetti.*

I grafi perfetti sono stati introdotti da Berge agli inizi degli anni '60. Berge stesso formulò alcune congetture, una prima delle quali fu provata da Lovász nel 1972: essa è il contenuto del seguente Teorema.

**Teorema 5.12.** (Lovász) *Il grafo complementare di un grafo perfetto è perfetto.*

Questo risultato discende immediatamente da un altro Teorema di Lovász (ricordiamo che con  $|H|$  indichiamo la cardinalità dell'insieme dei vertici di un grafo  $H$ ):

**Teorema 5.13.** *Un grafo  $G$  è perfetto se e soltanto se*

$$\alpha(H)\omega(H) \geq |H| \quad (5.9)$$

per ogni sottografo indotto  $H$  di  $G$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (Gasparyan) Supponiamo che  $G$  sia un grafo perfetto e sia  $H$  un sottografo indotto di  $G$ . Dunque  $H$  è  $\omega(H)$ -colorabile e l'insieme dei vertici di  $H$  può essere ripartito in  $\omega(H)$  sottoinsiemi stabili (gli insiemi dei vertici di uno stesso colore), ognuno contenente al più  $\alpha(H)$  vertici. Segue quindi  $|H| \leq \alpha(H)\omega(H)$ .

Per provare l'implicazione inversa, procediamo per assurdo e supponiamo che  $G$  sia un grafo non perfetto con insieme dei vertici di cardinalità minima tale che valga  $|H| \leq \alpha(H)\omega(H)$  per ogni sottografo indotto  $H$  di  $G$ . Per la minimalità di  $|G|$ , ogni sottografo indotto proprio di  $G$  è quindi un grafo perfetto.

Sia  $S$  un sottoinsieme stabile di  $G$ . Osserviamo che

$$\omega(G - S) = \omega(G)$$

Infatti  $\omega(G) \leq \chi(G) - 1$  perché  $G$  non è perfetto e  $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - S)$  dato che da ogni colorazione di  $G - S$  si ottiene una colorazione di  $G$  semplicemente aggiungendo un nuovo colore per i vertici in  $S$ . Segue,  $\omega(G) \leq \omega(G - S)$  ricordando che, se  $S \neq \emptyset$ ,  $G - S$  è perfetto. Viceversa, chiaramente  $\omega(G - S) \leq \omega(G)$ .

Scriviamo  $\alpha = \alpha(G)$ ,  $\omega = \omega(G)$  e denotiamo con  $V$  l'insieme dei vertici di  $G$ . Proviamo che in  $G$  esistono sottoinsiemi stabili

$$S_1, S_2, \dots, S_{\alpha\omega+1}$$

e sottografi completi su  $\omega$  vertici

$$T_1, T_2, \dots, T_{\alpha\omega+1}$$

tali che

- (a) ogni vertice in  $V$  appartiene ad esattamente  $\alpha$  sottoinsiemi  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq \alpha\omega + 1$ ;  
 (b)  $S_i \cap T_i = \emptyset$  per  $1 \leq i \leq \alpha\omega + 1$ ;  
 (c)  $|S_i \cap T_j| = 1$  per  $1 \leq i < j \leq \alpha\omega + 1$ ;

(dove le intersezioni denotano le intersezioni tra gli insiemi dei vertici).

Iniziamo scegliendo un sottoinsieme stabile  $S_1$  di  $G$  con  $|S_1| = \alpha$ . Sia  $v \in S_1$ . Il grafo  $G - v$  è perfetto e quindi  $\chi(G - v) = \omega(G - v) \leq \omega$ . Dunque, per ogni  $v \in S_1$ , l'insieme  $V - v$  ammette una partizione  $\mathcal{S}_v$  in  $\omega$  sottoinsiemi stabili di  $G$  (gli insiemi di vertici dello stesso colore in una  $\omega$ -colorazione di  $V - v$ ). Sia  $\{S_2, \dots, S_{\alpha\omega+1}\}$  l'unione delle famiglie  $\mathcal{S}_v$  al variare di  $v \in S_1$ . Dunque  $S_1, S_2, \dots, S_{\alpha\omega+1}$  sono sottoinsiemi stabili di  $G$  che soddisfano la condizione (a). (Infatti se  $w \in S_1$ , allora  $w$  sta in  $\alpha - 1$  dei sottoinsiemi  $S_i$ , per  $2 \leq i \leq \alpha\omega + 1$ , mentre se  $w \in V \setminus S_1$ , allora  $w$  appartiene ad esattamente un  $S_i \in \mathcal{S}_v$  per ogni  $v \in S_1$ ).

Per ogni  $1 \leq i \leq \alpha\omega + 1$ ,  $\omega(G - S_i) = \omega$  e pertanto esiste un sottografo completo  $T_i$  di  $G - S_i$  tale che  $|T_i| = \omega$ . La condizione (b) è quindi immediata, mentre la (c) segue osservando che  $|S_i \cap T_j| \leq 1$  (dato che gli  $S_i$  sono stabili) e che quindi, per (a) e (b),

$$\alpha\omega = \alpha|T_j| = \sum_{1 \leq i \leq \alpha\omega+1, i \neq j} |S_i \cap T_j| \leq \alpha\omega .$$

Siano ora  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$  le "matrici di incidenza" delle famiglie  $\{S_1, S_2, \dots, S_{\alpha\omega+1}\}$  e  $\{T_1, T_2, \dots, T_{\alpha\omega+1}\}$ , rispetto ad un opportuna numerazione  $V = \{v_i \mid i = 1, \dots, n\}$  dei vertici di  $G$ .  $\mathbf{S} = (s_{i,j})$  e  $\mathbf{T} = (t_{i,j})$  sono matrici  $n \times (\alpha\omega + 1)$ , tali che  $s_{i,j} = 1$  se  $v_i \in S_j$  e  $s_{i,j} = 0$  se  $v_i \notin S_j$ , mentre  $t_{i,j} = 1$  se  $v_i \in T_j$  e  $t_{i,j} = 0$  altrimenti. Per (b) e (c),

$$(\mathbf{S}^t) \mathbf{T} = \mathbf{Z}$$

dove  $\mathbf{Z} = (z_{i,j})$  è la matrice  $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$  con  $z_{i,j} = 1$  se  $i \neq j$  e  $z_{i,j} = 0$  se  $i = j$ . La matrice  $\mathbf{Z}$  è invertibile: l'inversa è  $\frac{1}{\alpha\omega} \mathbf{J} - \mathbf{I}$ , come si vede osservando che  $\mathbf{Z} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$  è la differenza della matrice  $\mathbf{J}$  con tutte le entrate 1 e della matrice identità  $\mathbf{I}$ . Segue quindi che il rango di  $\mathbf{S}$  (e di  $\mathbf{T}$ ) è almeno  $\alpha\omega + 1$  e pertanto che  $n = |G| \geq \alpha\omega + 1$ , contro l'ipotesi. ■

Il teorema 5.12 segue immediatamente, dato che, per ogni grafo  $G$ ,  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ .

La congettura più importante di Berge (che prese il nome di "Strong Perfect Graph Conjecture" e che implica il teorema di Lovász), proponeva un'elegante caratterizzazione dei grafi perfetti. Per descriverla, è opportuno osservare come alcuni semplici grafi non siano perfetti. Si tratta dei cicli di ordine dispari maggiore o uguale a 5. Infatti, se  $n \geq 2$ , per il ciclo  $C_{2n+1}$  si ha  $\omega(C_{2n+1}) = 2$  e  $\chi(C_{2n+1}) = 3$ . D'altra parte, un tale ciclo è un grafo non-perfetto *minimale*, nel senso che ogni suo sottografo indotto proprio (il cui insieme di vertici è cioè un sottoinsieme proprio dell'insieme dei vertici di  $C_{2n+1}$ ) è perfetto (essendo costituito da componenti connesse che sono cammini semplici). Anche il grafo complementare di un ciclo dispari di lunghezza almeno 5 non è perfetto (questo segue dal teorema di Lovász, ma può essere agevolmente dimostrato in modo diretto) ed ha la proprietà che tutti i suoi sottografi indotti propri sono perfetti. Quindi i cicli  $C_{2n+1}$ , con  $n \geq 2$ , ed i loro grafi complementari sono grafi non-perfetti minimali. La congettura di Berge affermava che questi sono i soli grafi non-perfetti minimali. La verifica di tale congettura è stata portata a compimento nel 2002 da Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas, basandosi sul lavoro di diversi altri studiosi: una dimostrazione completa occupa così diverse centinaia di pagine.

**Teorema 5.14. (Strong Perfect Graph Theorem)** *Sia  $G$  un grafo minimale non-perfetto. Allora  $G$  è un ciclo dispari di lunghezza  $\geq 5$  oppure il complementare di un ciclo dispari di lunghezza  $\geq 5$ .*

**Corollario 5.15.** *Un grafo è perfetto se e soltanto se non contiene sottografi indotti isomorfi ad un ciclo di ordine dispari, di lunghezza  $\geq 5$ , o al complementare di un tale ciclo.*

### 5.5 Esercizi.

**Esercizio 5.1.** Si devono assegnare le frequenze ad otto radio locali  $R_1, \dots, R_8$ , con il vincolo che stazioni la cui distanza è inferiore a 100 km devono trasmettere su frequenze differenti. Qual è il minimo numero di frequenze da impiegare se le reciproche distanze tra le emittenti sono quelle descritte dalla tabella seguente?

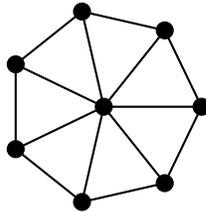
$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	$R_7$	$R_8$	
0	233	114	62	55	70	64	144	$R_1$
	0	91	251	152	62	47	60	$R_2$
		0	65	64	166	121	77	$R_3$
			0	38	188	135	149	$R_4$
				0	63	109	85	$R_5$
					0	65	131	$R_6$
						0	71	$R_7$
							0	$R_8$

**Esercizio 5.2.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo e sia  $c = \chi(G)$  il suo numero cromatico. Si provi che  $|E| \geq \binom{c}{2}$ . Si osservi che da questo deriva

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}.$$

**Esercizio 5.3.** Si assegni un ordine ai vertici del grafo del cubo in modo che l'applicazione dell'algoritmo di tipo greedy descritto nella sezione 5.1, a partire da tale ordinamento, termini con il richiedere 4 colori (mentre, essendo il grafo del cubo bipartito, ne sono sufficienti due).

**Esercizio 5.4.** Dato  $n \geq 3$ , si determini il numero cromatico della ruota con  $n$ -raggi  $W_n$



il grafo  $W_7$

**Esercizio 5.5.** Si provi che un grafo con dieci vertici e numero cromatico 4 contiene almeno un triangolo.

**Esercizio 5.6.** Fissato  $n \geq 2$ , qual è il massimo numero di lati di un grafo con  $n$  vertici e numero cromatico 4?

**Esercizio 5.7.** Sia  $\Gamma$  un grafo bipartito e  $\bar{\Gamma}$  il suo complementare. Si provi che  $\chi(\bar{\Gamma}) = \omega(\bar{\Gamma})$ .

**Esercizio 5.8.** Si descriva il polinomio cromatico del grafo completo  $K_n$ .

**Esercizio 5.9.** Sia  $T$  un albero con  $n$  vertici; si provi che il polinomio cromatico di  $T$  è  $x(x-1)^{n-1}$ . Si dica se è vero il viceversa.

**Esercizio 5.10.** Si provi che il polinomio cromatico di un  $n$ -ciclo è  $(x-1)^n + (-1)^n(x-1)$ .

**Esercizio 5.11.** Un grafo  $G$  si dice *critico* se per ogni suo sottografo proprio  $H$  (cioè  $H$  è sottografo di  $G$  e  $H \neq G$ ) si ha  $\chi(H) < \chi(G)$ .

i) Si provi che il grafo  $W_5$  della Figura 4.2 è critico.

ii) Si provi che se  $G$  è un grafo critico, allora per ogni suo vertice  $v$  si ha  $d_G(v) \geq \chi(G) - 1$ .

**Esercizio 5.12.** Si dia una dimostrazione del Teorema di Brooks utilizzando i polinomi cromatici.

**Esercizio 5.13.** Si determini l'indice cromatico dei grafi dei poliedri regolari, quello dei grafi dell'esercizio 3.11, e quello del grafo di Grötzsch.

**Esercizio 5.14.** Si provi che l'indice cromatico del grafo di Petersen è 4. Si cerchi di trovare un altro grafo cubico con indice cromatico uguale a 4 (ce ne sono).

**Esercizio 5.15.** Sia  $G$  un grafo cubico connesso e tale che  $\chi'(G) = 4$ . Si provi che  $G$  non ammette cicli hamiltoniani.

**Esercizio 5.16.** Si determini, per ogni  $n \geq 2$ , l'indice cromatico del  $n$ -ipercubo  $Q_n$ .

**Esercizio 5.17.** Sia  $G$  un grafo tale che  $\chi(G - v_1 - v_2) = \chi(G) - 2$ , per ogni coppia di vertici distinti  $v_1$  e  $v_2$  di  $G$ . Si provi che  $G$  è un grafo completo.

**Esercizio 5.18.** Dato un grafo  $G$ , definiamo con  $\chi_2(G)$  il minimo numero di colori con cui è possibile colorare i vertici di  $G$  in modo che vertici la cui distanza è minore o uguale a due abbiano colori diversi. Si determini, per ogni  $n \geq 1$ ,  $\chi_2(C_{2n})$  e  $\chi_2(C_{2n+1})$ .

**Esercizio 5.19.** Si determini  $\chi_2(G)$  nei casi del grafo del cubo e del grafo di Petersen.

**Esercizio 5.20.** Sia  $G$  un grafo regolare connesso con un numero pari di vertici. Supponiamo che  $G$  si decomponga in  $k$  cicli hamiltoniani disgiunti (significa che esistono  $k$  cicli hamiltoniani in  $G$ , tali che ogni lato di  $G$  appartiene a uno ed un solo di essi). Si provi che  $\chi'(G) = \Delta(G) = 2k$ .

**Esercizio 5.21.** Sia  $n \geq 1$  e sia  $G$  il grafo i cui vertici sono tutti i sottoinsiemi di  $\{1, 2, \dots, n\}$  e, dati due di essi  $X$  e  $Y$ ,  $\{X, Y\}$  è un lato di  $G$  se e solo se  $X \subseteq Y$ , e  $|Y \setminus X| = 1$ . Si determini  $\chi(G)$  e  $\chi'(G)$ .

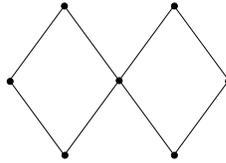
**Esercizio 5.22.** Senza fare uso della Proposizione 5.5 si provi che ogni grafo bipartito regolare  $d$ -valente ammette una colorazione dei lati con  $d$  colori.

**Esercizio 5.23.** Sia  $G$  un grafo connesso. Si provi che è possibile colorare con 2 colori i vertici di  $G$  in modo che per ogni coppia di vertici distinti esiste un cammino semplice che li congiunge i cui vertici hanno (considerati nell'ordine dato dal cammino) colori alternati. Si provi che l'analogia conclusione non vale colorando di due colori gli archi di  $G$ .

**Esercizio 5.24.** Si provi che il numero  $\ell$ -cromatico di una foresta è 2.

**Esercizio 5.25.** Sia  $n \geq 3$ , e sia  $L$  una 2-lista sui vertici del ciclo  $C_n$ . Si dimostri che se  $|\bigcup_{v \in V} L(v)| \geq 3$ , allora  $C_n$  è  $L$ -colorabile. Si deduca che il numero  $\ell$ -cromatico di  $C_n$  è 2 se  $n$  è pari e 3 se  $n$  è dispari.

**Esercizio 5.26.** Si determini il numero  $\ell$ -cromatico del seguente grafo

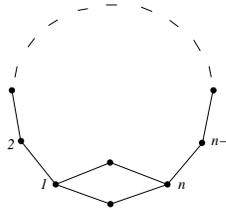


**Esercizio 5.27.** Sia  $n \geq 2$ ,  $I = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ , e  $V = I^{[n]}$ . Sia  $G$  il grafo bipartito completo sui vertici  $V_1 \cup V_2$ , con  $V_1 = V = V_2$ . Si provi che  $ch(G) > n$ . [sugg.: si consideri la  $n$ -lista su  $V_1 \cup V_2$  che ad ogni vertice associa se stesso (come sottoinsieme di  $I$ )]

**Esercizio 5.28.** Sia  $G$  un grafo connesso (bipartito) con  $ch(G) = 2$ . Si provino le seguenti affermazioni

- (i) Se  $u, v$  sono vertici distinti di  $G$ , allora non esistono tre cammini indipendenti da  $u$  a  $v$ , di cui almeno due di lunghezza  $\geq 3$ .
- (ii) Due cicli non banali e distinti di  $G$  hanno in comune almeno 2 vertici.

**Esercizio 5.29.** Sia  $n \geq 3$  un numero dispari. Si provi che il seguente grafo ha numero  $\ell$ -cromatico uguale a 2



**Esercizio 5.30.** Si dimostri la Proposizione 5.7.

**Esercizio 5.31.** Sia  $n \geq 1$ . Un *quadrato latino* di ordine  $n$  è una matrice  $n \times n$  tale che in ogni sua riga e in ogni sua colonna compare una e una sola volta ogni elemento dell'insieme  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Si descriva un metodo per ricavare un quadrato latino da ogni  $n$ -colorazione dei lati del grafo completo bipartito  $K_{n,n}$ .

**Esercizio 5.32.** Si provi (senza applicare il teorema di Lovász) che il grafo complementare di un ciclo dispari di lunghezza almeno 5 non è perfetto.

**Esercizio 5.33.** Si provi (senza applicare il teorema di Lovász) che il grafo complementare del line-graph di un grafo bipartito è perfetto.



## Capitolo 6

# Teoria di Ramsey

In questo capitolo torniamo ad argomenti che non riguardano solo la teoria dei grafi, anche se useremo il linguaggio di questi per introdurli in una prima formulazione. Infatti, i concetti e i risultati della teoria di Ramsey (in onore al suo fondatore, il matematico e filosofo Frank Plumpton Ramsey morto nel 1930 all'età di 26 anni) costituiscono un aspetto molto importante, e in un certo senso fondamentale, di una parte sempre più larga della matematica. In maniera informale, diremo che l'interesse di questa teoria è lo studio delle condizioni sotto cui una certa forma d'ordine o regolarità compare in situazioni generiche.

I risultati della teoria di Ramsey hanno tipicamente due caratteristiche primarie. Innanzitutto non si tratta di teoremi costruttivi. Si prova infatti che una certa struttura esiste, ma sempre senza fornire un algoritmo, o un qualunque metodo, di costruzione. In secondo luogo, quasi sempre le dimostrazioni di tali risultati manipolano oggetti tendenzialmente grandi: i cosiddetti “bounds” delle dimostrazioni crescono, pressoché sempre, in modo esponenziale, e di fatto non sono che gradini utili allo scopo di dimostrare gli enunciati.

### 6.1 Teoremi di Ramsey per grafi.

Supponiamo che, nel corso delle giornate intergalattiche di matematica sul pianeta Olosac, alcuni congressisti, appartenenti a varie razze, si ritrovino casualmente una sera in una certa birreria: se i congressisti sono almeno sei allora sicuramente esistono almeno tre di essi che appartengono a razze mutuamente compatibili, oppure mutuamente incompatibili (prima di andare avanti, si cerchi di dimostrare questa affermazione dopo averla tradotta in termini di grafi). Più in generale, la questione è la seguente: data una colorazione dei lati di un grafo completo  $K_n$  mediante due colori, qual è il valore minimo di  $n$  affinché il grafo contenga un sottografo completo  $K_r$  che sia monocromatico? L'affermazione fatta sopra è che se  $n$  è maggiore o uguale a 6 allora c'è sicuramente un triangolo monocromatico.

Per comodità espressive, in questa sezione, salvo esplicito avviso, useremo il termine “colorazione” di un grafo con un significato diverso da quello attribuitogli nel capitolo 5. Con colorazione dei lati di un grafo  $G = (V, E)$  intenderemo una *qualsiasi* assegnazione di colori,

presi da un certo insieme, ai lati di  $G$ , senza alcuna condizione sui colori dei lati contigui o altro; dunque una qualsiasi applicazione  $E \rightarrow S$ , dove  $S$  è l'insieme dei colori.

Dato un grafo  $G$  a cui sia stata assegnata una tale colorazione, diremo che un sottografo di  $G$  è *monocromatico* se, nella colorazione data, i suoi lati hanno tutti lo stesso colore.

La figura 1.1 mostra una colorazione di  $K_5$  mediante due colori, escogitata in modo che non vi sia alcun triangolo monocromatico.

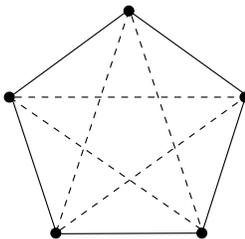


Figura 6.1: una 2-colorazione di  $K_5$  priva di triangoli monocromatici.

È possibile fare lo stesso in  $K_6$ ? La risposta è no. Infatti, supponiamo di aver colorato con due colori  $b$  e  $c$  i lati di  $K_6$ , e sia  $v_0$  un vertice fissato; poiché  $v_0$  ha grado 5, per il principio dei cassetti, almeno tre lati incidenti ad esso hanno lo stesso colore; siano  $\{v_0, v_1\}$ ,  $\{v_0, v_2\}$  e  $\{v_0, v_3\}$  tali lati, e sia  $b$  il loro colore. Se uno tra i lati  $\{v_i, v_j\}$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ , ha colore  $b$  allora il triangolo indotto da  $\{v_0, v_i, v_j\}$  è monocromatico; se invece tali lati hanno tutti colore  $c$  allora è il triangolo indotto da  $\{v_1, v_2, v_3\}$  ad essere monocromatico. Dunque,

*ogni colorazione con due colori di un grafo completo con almeno sei vertici contiene un triangolo monocromatico.*

Il triangolo non è che il primo caso interessante di grafo completo; con un po' più di lavoro si riesce a provare che ogni colorazione con due colori di  $K_{18}$  contiene un sottografo monocromatico di tipo  $K_4$ . La lettrice che, a questo punto, abbia sentito l'impulso irrefrenabile di provare a dimostrare quest'ultima affermazione, ci sarà riuscita senz'altro, ma si sarà resa conto che definire come "poco" il lavoro in più richiesto rispetto al caso del triangolo sia piuttosto eufemistico (ma è quel tipo di eufemismo che ci si aspetta da un "professionista"<sup>1</sup>). Nella sua forma più semplice, il Teorema di Ramsey è la generalizzazione all'esistenza, in grafi completi con un numero sufficientemente grande di vertici, di un sottografo monocromatico isomorfo a  $K_n$ .

**Teorema 6.1.** (Ramsey 1930) *Per ogni  $n \geq 1$ , esiste un intero  $R(n)$  tale che, data una qualsiasi colorazione dei lati del grafo completo  $K_{R(n)}$  mediante due colori, esiste un sottografo completo  $K_n$  monocromatico.*

Ricordando la definizione di *grafo complementare*  $\overline{G}$  di un grafo  $G$  (vedi esercizio 1.28: è il grafo i cui vertici sono gli stessi di  $G$  e, dati due vertici distinti  $u$  e  $v$ ,  $\{u, v\}$  è un lato di  $\overline{G}$  se e soltanto se non è un lato di  $G$ ), il Teorema di Ramsey si può riformulare nella maniera seguente:

<sup>1</sup>O forse è il tipo di eufemismo che un professionista si aspetta che ci si aspetti da lui, o da lei.

Per ogni  $n \geq 1$ , esiste un intero  $R(n)$  tale che se  $G$  è un grafo con almeno  $R(n)$  vertici allora  $G$  o il suo complementare  $\bar{G}$  contengono un sottografo isomorfo al grafo completo  $K_n$ .

Risulta più agevole dimostrare il teorema di Ramsey in una forma leggermente (e, in un certo senso, apparentemente) più generale. Dati  $n, m \geq 2$ , denotiamo con  $R(n, m)$  il più piccolo intero (se esiste) tale che data una qualsiasi colorazione dei lati del grafo completo  $K_{R(n, m)}$  mediante due colori  $b$  e  $c$ , esiste un sottografo  $b$ -monocromatico isomorfo a  $K_n$  oppure un sottografo  $c$ -monocromatico isomorfo a  $K_m$ . Il numero  $R(n)$  del teorema 6.1 coincide quindi con  $R(n, n)$ ; inoltre, chiaramente,  $R(n, m) = R(m, n)$ . Proveremo il seguente risultato

**Teorema 6.2.** Per ogni  $n, m \geq 2$ ,  $R(n, m)$  esiste e valgono le seguenti relazioni:

- 1)  $R(n, 2) = n$  per ogni  $n \geq 2$ .
- 2) Per ogni  $n, m \geq 3$ :  $R(n, m) \leq R(n-1, m) + R(n, m-1)$ .
- 3) Per ogni  $n, m \geq 2$ :  $R(n, m) \leq \binom{n+m-2}{m-1} \leq 2^{n+m-3}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per comodità chiameremo *blu* il colore  $b$  e *rosso* il colore  $c$  (*carminio* ci pareva un po' altezzoso), e con "colorazione" di un certo grafo intenderemo una colorazione dei suoi lati in blu e rosso. L'esistenza di  $R(n, m)$ , per ogni  $n, m \geq 2$ , discende chiaramente per induzione, una volta dimostrati i punti 1) e 2).

1) Una colorazione di  $K_n$  che non sia interamente blu include almeno un lato rosso (cioè un  $K_2$  rosso). Dunque  $R(n, 2) = n = R(2, n)$ .

2) Siano  $n, m \geq 3$ . Procediamo per induzione su  $n + m$ . Se  $n = m = 3$ , allora  $R(2, 3) + R(3, 2) = 3 + 3 = 6 = R(3, 3)$ , come abbiamo visto nelle considerazioni preliminari. Sia  $r = R(n-1, m) + R(n, m-1)$ , e sia data una colorazione del grafo  $K_r$ . Mostriamo che  $K_r$  contiene come sottografo o un  $K_n$  blu oppure un  $K_m$  rosso. Fissiamo un vertice  $v$ ; i lati incidenti a  $v$  sono  $r-1$ , alcuni blu e gli altri rossi.

Supponiamo che i lati blu adiacenti a  $v$  siano in numero maggiore o uguale a  $R(n-1, m)$ ; allora il grafo  $K'$  indotto dagli altri estremi ( $\neq v$ ) di essi è un grafo completo che per ipotesi induttiva contiene o un  $K_{n-1}$  blu oppure un  $K_m$  rosso. Nel secondo caso siamo a posto, altrimenti, aggiungendo al sottografo blu  $K_{n-1}$  il vertice  $v$  si ottiene un sottografo  $K_n$  blu.

Dunque, possiamo assumere che in  $v$  siano incidenti meno di  $R(n-1, m)$  lati blu. Ne segue per il principio dei cassetti, che a  $v$  sono incidenti almeno  $R(n, m-1)$  lati rossi. Il sottografo indotto dagli estremi diversi da  $v$  di tali lati rossi, avendo almeno  $R(n, m-1)$  vertici, contiene o un  $K_n$  blu oppure un  $K_{m-1}$ , e ragionando come sopra, in  $K_r$  si trova o un sottografo  $K_n$  blu o un  $K_m$  rosso. Dunque  $R(n, m) \leq r$ , e il punto 2) è provato

3) La prima disequaglianza discende, per induzione da 1), da 2) e dalla regola di Pascal. Infatti, per ogni  $n, m \geq 2$ :

$$\binom{(n-1) + m - 2}{m-1} + \binom{n + (m-1) - 2}{m-2} = \binom{n + m - 2}{m-1}.$$

La seconda disequaglianza si deduce dal fatto che il coefficiente binomiale  $\binom{n+m-2}{m-1}$  compare come addendo nello sviluppo alla Newton di  $(1+1)^{n+m-2} = 2^{n+m-2}$ . ■

I numeri  $R(n, m)$  sono detti *numeri di Ramsey* e sono noti solo in pochi casi:  $R(3, 3) = 6$ ,  $R(3, 4) = 9$ ,  $R(3, 5) = 14$ ,  $R(3, 6) = 18$ ,  $R(3, 7) = 23$ ,  $R(3, 8) = 28$ ,  $R(3, 9) = 36$ ,  $R(4, 4) = 18$  e  $R(4, 5) = 25$ .

Vediamo ora anche una maggiorazione dal basso dei numeri di Ramsey.

**Proposizione 6.3** (Erdős 1947).  $R(n) > 2^{n/2}$  per ogni  $n \geq 3$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione utilizza un argomento di natura probabilistica. Sia  $\ell \geq n$ ; il numero di di 2-colorazioni degli archi del grafo completo  $K_\ell$ , ottenuta colorando ogni lato con uno dei due possibili colori, rosso e blu, non è che il numero di applicazioni dall'insieme degli archi di  $K_\ell$  nell'insieme dei due colori, è

$$x = 2 \binom{n}{2}.$$

Fissato un  $n$ -sottoinsieme  $X$  di  $\{1, \dots, \ell\}$ , le colorazioni in cui il corrispondente sottografo indotto (che è un grafo completo su  $n$  vertici) risulta monocromatico sugli archi è

$$y = 2 \cdot 2 \binom{\ell}{2} - \binom{n}{2}.$$

In altri termini, la probabilità che il sottografo indotto da  $X$  sia monocromatico è:

$$p_{mon}(X) = \frac{y}{x} = 2^{1 - \binom{n}{2}}$$

Ora il numero degli  $n$ -sottoinsiemi di vertici di  $K_\ell$  è  $\binom{\ell}{n}$ ; pertanto, posto  $p_{mon}(n)$  la probabilità che ci sia almeno un  $K_n$ -sottografo monocromatico, si ha,

$$p_{mon}(n) \leq \binom{\ell}{n} \cdot 2^{1 - \binom{n}{2}} < \frac{\ell^n}{n!} \cdot \frac{2^{1+n/2}}{2^{n^2/2}},$$

che è minore di 1 se  $\ell \leq 2^{n/2}$  e  $n \geq 3$ . Quindi

$$p_{mon}(n) < 1$$

se  $\ell \leq 2^{n/2}$ ; ciò significa che, in questi casi, esiste almeno una 2-colorazione degli archi di  $K_\ell$  che non dà luogo ad alcun  $n$ -sottografo completo monocromatico. ■

Quindi, insieme con il punto 3) del Teorema 6.2 si conclude che, per ogni  $n \geq 3$ ,

$$\sqrt{2}^n < R(n) < 4^n.$$

In quel misura queste limitazioni siano buone, se cioè esista un numero reale  $c > \sqrt{2}$  tale che  $R(n) > c^n$  (o, dall'altra parte, un numero reale  $d < 4$  per cui  $R(n) < d^n$ ) è un problema

tuttora insoluto e considerato estremamente difficile. Ma non è solo l'enunciato della Proposizione 6.3 ad essere importante, perché la dimostrazione fu quella che attirò l'attenzione sulla efficacia del punto di vista probabilistico in combinatoria; da allora questo metodo (che purtroppo non avremo lo spazio per approfondire in questo corso) è stato sviluppato ed è ora parte del bagaglio di ogni combinatorista.

**Generalizzazioni.** Il Teorema di Ramsey può essere generalizzato in varie direzioni. La prima consiste nel consentire un numero maggiore, ma sempre finito, di colori (omettiamo la dimostrazione: per un caso particolare, che non sarebbe troppo difficile generalizzare, si veda l'esercizio 6.9).

**Teorema 6.4.** *Per ogni  $c \geq 2$  ed ogni  $n_1, n_2, \dots, n_c \geq 1$ , esiste un intero  $R = R(n_1, n_2, \dots, n_c)$  tale che per ogni colorazione di  $K_R$  mediante i  $c$  colori  $l_1, l_2, \dots, l_c$ , esiste un sottografo  $l_i$ -monocromatico isomorfo a  $K_{n_i}$  per almeno un  $1 \leq i \leq c$ .*

In un'altra direzione si richiede la presenza, come sottografi monocromatici, di grafi diversi dai grafi completi. Poiché ogni grafo con  $n$  vertici è un sottografo di  $K_n$ , è chiaro che per ogni coppia di grafi  $H, U$  esiste un minimo intero  $R(H, U)$  tale che per ogni colorazione dei lati del grafo completo  $K_{R(H, U)}$  mediante i due colori  $b$  e  $c$  esiste un sottografo  $b$ -monocromatico isomorfo a  $H$  oppure un sottografo  $c$ -monocromatico isomorfo a  $U$ . Il problema riguarda trovare, per  $H$  e  $U$  appartenenti ad opportune classi di grafi, il valore esatto (o perlomeno delle stime significative) di  $R(H, U)$ . Il seguente risultato è uno dei pochi in cui si riescono a trovare i valori esatti per infinite coppie di grafi.

**Proposizione 6.5.** *Siano  $n, t \geq 2$ , e sia  $A_t$  un albero con  $t$  vertici. Allora*

$$R(K_n, A_t) = (n-1)(t-1) + 1.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $t = 2$ , allora  $A_2 = K_2$  è composto da un unico lato, e  $R(K_n, A_2) = R(n, 2) = n = (n-1)(2-1) + 1$ , per il punto 1) del Teorema 6.2. Similmente, si prova che  $R(K_2, A_t) = t$ .

Ora, proviamo che  $R(K_n, A_t) \leq (n-1)(t-1) + 1$  procedendo per induzione su  $n+t$ . Per quanto visto sopra, possiamo assumere  $n, t \geq 3$ . Sia  $s = (n-1)(t-1) + 1$ , e  $G$  il grafo completo  $K_s$  i cui lati sono colorati in blu e rosso. Sia  $A_{t-1}$  ottenuto da  $A_t$  rimuovendo un vertice di grado 1 ed il lato ad esso incidente. Osserviamo che  $A_{t-1}$  è ancora un albero, e denotiamo con  $v$  l'unico vertice di  $A_{t-1}$  che, in  $A_t$ , era adiacente al vertice che è stato rimosso. Sia  $G_0$  il sottografo indotto in  $G$  da  $s - (n-1) = (n-1)(t-2) + 1$  vertici fissati. Per ipotesi induttiva,  $G_0$  contiene un sottografo blu di tipo  $K_n$ , oppure un sottografo rosso  $B$  isomorfo ad  $A_{t-1}$ . Nel primo caso siamo a posto. Nel secondo caso sia  $v'$  il vertice di  $B$  che, nell'isomorfismo, corrisponde al vertice  $v$  di  $A_{t-1}$ . Se esiste un lato rosso incidente a  $v'$  il cui secondo estremo non è uno dei vertici di  $B$ , allora il sottografo ottenuto aggiungendo a  $B$  tale lato è rosso ed è chiaramente isomorfo ad  $A_t$ . Possiamo quindi supporre che tutti i lati che congiungono  $v'$  ai vertici di  $G$  che non stanno in  $B$  sono blu. Il numero di tali lati è  $s - (t-1) = (n-2)(t-1) + 1$ , e quindi, per ipotesi induttiva, il sottografo indotto dagli estremi, diversi da  $v'$ , di tali lati contiene un  $K_{n-1}$  blu o un  $A_t$  rosso. Nel secondo caso siamo a posto; nel primo caso congiungendo i vertici di  $C$  a  $v'$  si ottiene un sottografo blu isomorfo a  $K_n$ . Dunque  $R(K_n, A_t) \leq s$ .

Proviamo ora la diseuguaglianza opposta. Siano dati  $n, t \geq 2$ . Sia  $G$  l'unione disgiunta di  $t - 1$  grafi completi  $K_{n-1}$ . Allora  $G$  ha  $r = (n - 1)(t - 1)$  vertici. Il grafo completo  $K_r$  è l'unione di  $G$  con il suo complementare  $\overline{G}$ , che non è altro che il grafo completo  $(t - 1)$ -partito  $K_{n-1, n-1, \dots, n-1}$ . Coloriamo di blu i lati appartenenti a  $G$ . Diamo la seguente colorazione ai lati di  $\overline{G}$ . Numeriamo i vertici di tale grafo in modo che il vertice  $v_{i,j}$  rappresenta l' $i$ -esimo elemento della  $j$ -esima copia di  $K_{n-1}$  (per  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  e  $j = 1, 2, \dots, t - 1$ ). Coloriamo di rosso ogni lato di  $\overline{G}$  della forma  $\{v_{i,j}, v_{i,l}\}$  (per ogni  $j \neq l$ ), mentre coloriamo di blu ogni restante lato di  $\overline{G}$ . Si vede allora che, rispetto a tale colorazione,  $K_r$  non contiene alcun sottografo blu isomorfo a  $K_n$ , né alcun albero rosso con  $t$  vertici. Dunque  $(n - 1)(t - 1) < R(K_n, A_t)$ , e questo completa la dimostrazione. ■

## 6.2 Teoremi di Ramsey per insiemi.

Il teorema, o i teoremi, di Ramsey assumono un aspetto particolarmente suggestivo quando sono espressi con il linguaggio dei grafi; tuttavia la teoria di Ramsey non è una teoria idiomantica di tale linguaggio, ed ha numerose interpretazioni e importanti applicazioni in diversi ambiti della matematica: dalla logica, alla teoria degli insiemi, alla probabilità, etc.

Vediamone una formulazione più vicina a quella originaria, e più generale. Cominciamo con l'osservare che assegnare una colorazione (così come intesa in questo capitolo) ai lati di un grafo completo mediante un numero finito  $r$  di colori, significa considerare una partizione in  $r$  classi dell'insieme,  $V^{[2]}$ , dei sottoinsiemi di cardinalità 2 (i lati) di un insieme  $V$  (l'insieme dei vertici). Il teorema di Ramsey (Teorema 6.4) afferma che, per ogni  $n, c \geq 2$ , se  $|V|$  è sufficientemente grande per ogni partizione di  $V^{[2]}$  in  $c$  parti esiste un sottoinsieme  $X \subseteq V$  di cardinalità  $n$  tale che tutti i 2-sottoinsiemi di  $X$  appartengono alla stessa classe della partizione.

È possibile estendere questo nel modo seguente. Se  $V$  è un insieme (non necessariamente finito) e  $k \geq 1$ , denotiamo con  $V^{[k]}$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi di ordine  $k$  di  $V$ . Se  $c \geq 1$  è un intero, chiamiamo  $c$ -colorazione di  $V^{[k]}$  una partizione di  $V^{[k]}$  in  $c$  classi di equivalenza, e diciamo che un sottoinsieme  $X$  di  $V$  è  $[k]$ -monocromatico se  $X^{[k]}$  è contenuto in una sola classe di equivalenza, ovvero se tutti i  $k$ -sottoinsiemi di  $X$  hanno una stessa colorazione.

Il Teorema di Ramsey nella sua forma più generale si può allora enunciare in questo modo.

**Teorema 6.6.** [Teorema generalizzato di Ramsey nel caso finito.] Siano  $k, c, n \geq 1$  interi. Allora esiste un intero  $r = r^k(c, n)$  tale che per ogni insieme  $V$  con  $|V| \geq r$ , ed ogni  $c$ -colorazione di  $V^{[k]}$ , esiste un sottoinsieme  $[k]$ -monocromatico di cardinalità  $n$ .

Dimostriamo il Teorema generalizzato di Ramsey, utilizzando tecniche che coinvolgono insiemi infiniti. Innanzitutto proviamo una versione infinita del Teorema di Ramsey.

**Teorema 6.7.** [Teorema di Ramsey nel caso infinito] Siano  $k, c \geq 1$  interi, e  $V$  un insieme infinito. Data una qualsiasi  $c$ -colorazione di  $V^{[k]}$  esiste un sottoinsieme infinito  $[k]$ -monocromatico di  $V$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo per induzione su  $k$ , tenendo fissato  $c$ . Se  $k = 1$  l'affermazione è ovvia.

Sia dunque  $k \geq 2$ , e sia  $V^{[k]}$  colorato mediante  $c$  colori, ovvero sia definita un'applicazione  $\chi : V^{[k]} \rightarrow C$  (dove  $|C| = c$ ). Costruiamo induttivamente una sequenza infinita

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$$

di sottoinsiemi infiniti di  $V$ , ed una di elementi  $x_0, x_1, x_2, \dots$  tali che, per ogni  $i$ :

$$(1) \quad x_i \in V_i, \text{ e } V_{i+1} \subseteq V_i \setminus \{x_i\};$$

(2) i  $k$ -sottoinsiemi del tipo  $\{x_i\} \cup Y$ , al variare di  $Y \in V_{i+1}^{[k-1]}$ , hanno tutti lo stesso colore  $c(i)$ .

Iniziamo col porre  $V_0 = V$  e  $x_0$  un qualsiasi elemento di  $V$ . Supponiamo di aver costruito  $V_0, V_1, \dots, V_i$ , e fissato  $x_0, x_1, \dots, x_i$ . Vogliamo costruire la coppia  $(V_{i+1}, x_{i+1})$ . Incominciamo col colorare ciascun  $Y \in (V_i \setminus \{x_i\})^{[k-1]}$  assegnandogli il colore del  $k$ -insieme  $\{x_i\} \cup Y$  nella colorazione  $\chi$ , data in partenza, ovvero definiamo

$$\begin{aligned} \chi_i : (V_i \setminus \{x_i\})^{[k-1]} &\longrightarrow C \\ Y &\longmapsto \chi(\{x_i\} \cup Y). \end{aligned}$$

In questo modo otteniamo una  $c$ -colorazione,  $\chi_i$ , di  $(V_i \setminus \{x_i\})^{[k-1]}$ . Poiché  $V_i \setminus \{x_i\}$  è infinito, l'ipotesi induttiva assicura che esiste un sottoinsieme infinito  $[k-1]$ -monocromatico,  $V_{i+1}$ . Inoltre, rispetto alla colorazione  $\chi$  di partenza, abbiamo che i  $k$ -sottoinsiemi di  $V_{i+1} \cup \{x_i\}$ , contenenti l'elemento  $x_i$ , hanno tutti lo stesso colore, che chiamiamo  $c(i)$ . Come  $x_{i+1}$  prendiamo un qualsiasi elemento di  $V_{i+1}$ . Le successioni costruite in questo modo soddisfano chiaramente (1) e (2).

Ora, poiché  $c$  è finito, per il principio dei cassetti, esiste un sottoinsieme infinito  $A$  di  $\mathbb{N}$  tale che il colore  $c(i)$  è lo stesso per ogni  $i \in A$ . Ponendo  $X = \{x_i \mid i \in A\}$  si ottiene un sottoinsieme infinito e  $[k]$ -monocromatico di  $V$ . ■

Ristretto al caso dei grafi (cioè  $k = 2$ ), il Teorema 6.7 si può enunciare nel modo seguente. *Sia  $G$  un grafo su un insieme infinito di vertici  $V$ , e tale che per ogni sottoinsieme infinito  $X$  di  $V$  esiste almeno un lato di  $G$  i cui estremi appartengono a  $X$ ; allora  $G$  contiene un sottografo completo infinito.*

Un altro utile ingrediente per la dimostrazione del Teorema 6.6 è il seguente Lemma dovuto a König.

**Lemma 6.8.** [*König's Infinity Lemma*] *Sia  $G = (V, E)$  un grafo su un insieme di vertici  $V$  infinito. Sia  $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$ , dove  $V_0, V_1, \dots$  sono insiemi finiti, non vuoti e disgiunti. Assumiamo che sia definita un'applicazione  $f : V \setminus V_0 \rightarrow V$  tale che per ogni  $v \in V_i$  ( $i \geq 1$ ),  $f(v) \in V_{i-1}$  e  $\{v, f(v)\} \in E$ . Allora esiste una sequenza infinita (o raggio)*

$$v_0, v_1, v_2, \dots$$

con  $v_i \in V_i$ , per ogni  $i \geq 0$  e  $v_i = f(v_{i+1})$ , per ogni  $i \geq 0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathcal{C}$  l'insieme degli “ $f$ -cammini”, ovvero l'insieme di tutti i cammini del tipo

$$v, f(v), f^2(v), \dots, f^{s(v)}(v),$$

con termine in qualche elemento  $f^{s(v)}(v) \in V_0$ . Ora, ogni  $v \in V$  è vertice di un cammino in  $\mathcal{C}$  ed ogni siffatto cammino è finito, pertanto  $\mathcal{C}$  deve necessariamente contenere infiniti cammini. Essendo  $V_0$  un insieme finito, esiste un sottoinsieme infinito  $\mathcal{C}_0$  di  $\mathcal{C}$  costituito da cammini con termine comune, diciamo  $v_0 \in V_0$ . Ora poiché  $V_1$  è un insieme finito, esiste almeno un vertice,  $v_1 \in V_1$ , tale che il sottoinsieme  $\mathcal{C}_1$  di  $\mathcal{C}_0$  costituito dai cammini che passano per  $v_1$  sia infinito. Procedendo in questo modo si costruisce una sequenza infinita,  $v_0, v_1, \dots$ , che soddisfa alla richiesta dell'enunciato. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.6.

Per ogni  $r \in \mathbb{N}$ , indicheremo con  $I_r$  il prototipo dell'insieme di  $r$  elementi, ovvero  $I_r := \{1, 2, \dots, r\}$ .

Supponiamo per assurdo che esista una terna  $k, c, n$  tale che per ogni intero  $r \geq k$  esiste una  $c$ -colorazione  $\gamma_r : I_r^{[k]} \rightarrow C$ , con  $|C| = c$ , dei  $k$ -sottoinsiemi dell'insieme  $I_r$ , tale che nessun  $n$ -sottoinsieme di  $I_r$  sia  $[k]$ -monocromatico (ovvero per ogni  $X \subseteq I_r$ , con  $|X| = n$ , esistono  $Y$  ed  $Y'$  in  $X^{[k]}$  tali che  $\gamma_r(Y) \neq \gamma_r(Y')$ ).

Poniamo  $V_r$  l'insieme di tutte queste  $c$ -colorazioni  $\gamma_r$  di  $I_r$ . Allora ogni  $V_r$  è finito, non vuoto.

Sia  $V = \bigcup_{r \geq k} V_r$ . Per  $r \geq k$  e  $\gamma \in V_{r+1}$ , definiamo  $f(\gamma)$  la restrizione di  $\gamma$  ad  $I_r^{[k]}$ , cioè  $f(\gamma) := \gamma|_{I_r^{[k]}}$ . Si noti che effettivamente tale restrizione è un elemento di  $V_r$ . Sia  $G$  il grafo  $G = (V, E)$ , dove l'insieme dei lati è così definito

$$E = \{\{\gamma, f(\gamma)\} | \gamma \in V \setminus V_k\}.$$

Per il Lemma 6.8 esiste in  $G$  una sequenza infinita

$$\delta_k, \delta_{k+1}, \dots$$

con  $\delta_i = f(\delta_{i+1})$  per ogni  $i \geq k$ . Per come sono definite le colorazioni  $\delta_i$  sono consistenti ed è possibile allora definire una colorazione  $\delta : \mathbb{N}^{[k]} \rightarrow C$ , come “unione” delle colorazioni del raggio (ovvero  $\delta(Y) := \delta_m(Y)$  se  $Y \subseteq I_m^{[k]}$ ).

Per il Teorema 6.7, esiste un sottoinsieme infinito  $X' \subseteq \mathbb{N}$  che sia  $[k]$ -monocromatico, rispetto a  $\delta$ . Pertanto esiste  $X \subseteq X'$ , con  $|X| = n$  e  $[k]$ -monocromatico, rispetto a  $\delta$ . Ma  $X \in I_{r_0}$  per qualche  $r_0 \geq k$  (ad es.  $r_0 = \max(X)$ ), quindi  $X$  è un  $n$ -sottoinsieme di  $I_{r_0}$  che è  $[k]$ -monocromatico, rispetto a  $\delta_{I_{r_0}^{[k]}} = \delta_{r_0}$ , in contraddizione con  $\delta_{r_0} \in V_{r_0}$ . ■

### 6.3 Alcune applicazioni dei teoremi di Ramsey.

In questa sezione, che potrebbe essere quasi arbitrariamente lunga, diamo conto di alcune applicazioni non troppo complicate dei Teoremi di Ramsey, scelte fra quelle più suggestive, o inerenti alcuni degli argomenti di questo corso.

1) Iniziamo con la costruzione, promessa nella sezione 5.4, di grafi  $G$  privi di triangoli (dunque tali che  $\omega(G) = 2$ ) che hanno numero cromatico arbitrariamente alto.

**Proposizione 6.9.** *Esistono grafi privi di triangoli e numero cromatico arbitrariamente grande.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero  $n \geq 3$ , sia  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Definiamo il grafo  $G_n$  nel modo seguente: l'insieme dei vertici di  $G_n$  è l'insieme  $I_n^{[2]}$  di tutti i sottoinsiemi di ordine 2 di  $I_n$ , e una coppia  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$  di essi è un arco di  $G_n$  se e solo se  $a < b = c < d$ .

Siano  $v_1 = \{a_1, b_1\}, v_2 = \{a_2, b_2\}, v_3 = \{a_3, b_3\}$  vertici di  $G_n$  (in cui abbiamo fissato la notazione in modo che  $a_i < b_i$ , per  $i = 1, 2, 3$ ), che assumiamo consecutivi. Quindi, per come sono definiti gli archi,  $b_1 = a_2 < b_2 = a_3$ , e da ciò segue che  $v_1, v_3$  non sono estremi di un arco di  $G_n$  (perché in tal caso dovrebbe essere  $b_1 = a_3$ ). Pertanto  $v_1, v_2, v_3$  non sono i vertici di un triangolo in  $G_n$ . Dunque  $G_n$  non ha triangoli e quindi, per definizione,  $\omega(G_n) = 2$ .

Applichiamo ora il Teorema di Ramsey, per provare che, al crescere di  $n$ , il numero cromatico  $\chi(G_n)$  tende a  $\infty$ . Sia quindi  $c \geq 2$ , e sia  $n \geq r^2(c, 3)$ . Allora, per ogni colorazione di  $I_n^{[2]}$  in  $c$  colori esiste un sottoinsieme di 3 elementi  $X = \{a, b, c\}$  di  $I_n$  tale che  $X^{[2]}$  è contenuto in una stessa classe di colore. Ma, se  $a < b < c$ , i vertici di  $G_n$   $\{a, b\}$  e  $\{b, c\}$  sono adiacenti. Quindi non esistono  $c$ -colorazioni di  $G_n$ ; ovvero,  $\chi(G_n) > c$ . ■

Osserviamo che, per ogni  $n \geq 5$ ,  $g(G_n) = 5$ . Quindi il calibro dei grafi  $G_n$  è comunque limitato. Ma abbiamo già accennato al fatto che Erdős e Lovász hanno provato l'esistenza, per ogni  $g, k \geq 4$ , di grafi con calibro  $\geq g$  e numero cromatico  $\geq k$ .

2) Passiamo a qualche applicazione alla geometria affine.

Sia  $V$  un insieme di punti sul piano, e data ogni terna di elementi di  $V$ , la coloriamo in rosso se è costituita da punti allineati, ed in blu altrimenti. Il teorema di Ramsey 6.6 ci dice che, fissati interi positivi  $n$  ed  $m$ , se il numero di punti di  $V$  è sufficientemente grande, allora in  $V$  esistono  $m$  punti a tre a tre non allineati, oppure  $n$  punti su una stessa retta (infatti si vede facilmente che se ogni terna di un insieme di punti è allineata, allora tutti i punti dell'insieme giacciono su di una stessa retta). La versione infinita (Teorema 6.7) assicura che, se  $V$  è infinito, allora esiste un sottoinsieme infinito  $X$  di  $V$  tale che  $X$  è contenuto in una retta oppure nessuna terna di elementi di  $X$  è costituita da elementi allineati.

Rimanendo nello stesso ambito, proviamo qualcosa di meno immediato. Ricordiamo che dato un insieme  $X$  di punti nel piano, l'*inviluppo convesso* di  $X$  è il minimo sottoinsieme convesso del piano che contiene  $X$  (che si prova esistere; ricordiamo anche che un sottoinsieme  $C$  del piano è convesso se per ogni coppia di punti di  $C$  il segmento che li congiunge è contenuto in  $C$ ). Diciamo che un insieme finito  $X$  di punti del piano forma un *poligono convesso* se nessun punto di  $X$  appartiene all'inviluppo convesso degli altri. Si provino le seguenti facili affermazioni:

i) Dati cinque punti del piano, a tre a tre non allineati, ce ne sono quattro di essi che formano un poligono convesso;

ii) un insieme finito di punti nel piano forma un poligono convesso se e solo se ogni suo sottoinsieme di quattro punti forma un quadrilatero convesso.

Ora, dato un insieme finito  $X$  di punti del piano, consideriamo la seguente 2-colorazione delle quadruple di elementi di  $X$ : in rosso quelle che formano un quadrilatero convesso, in blu tutte le altre. Il punto i) dice che  $X$  non contiene sottoinsiemi blu-monocromatici con cinque elementi. Quindi il Teorema 6.6 assicura che, per ogni  $n \geq 2$ , se il numero di elementi di  $X$  supera un certo valore, allora  $X$  contiene un sottoinsieme monocromatico rosso di

ordine  $n$ , ed il punto ii) consente di concludere che tale insieme forma un  $n$ -agono convesso. Abbiamo cioè provato un altro risultato, dovuto a Erdős e Szekers.

**Teorema 6.10.** *Esiste una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , tale che ogni insieme del piano costituito da  $f(n)$  punti a tre a tre non allineati contiene un sottoinsieme di  $n$  punti che forma un poligono convesso.*

Osserviamo che, in congiunzione con l'osservazione 1) di sopra, possiamo concludere che esiste una funzione  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che ogni insieme del piano costituito da  $g(n)$  punti contiene un sottoinsieme di  $n$  punti che forma un poligono convesso, oppure un sottoinsieme di  $n$  punti che giacciono su una stessa retta.

3) Il prossimo esempio riguarda l'analisi reale, e si tratta di un risultato semplice e già noto, l'estensione al caso infinito del Teorema 2.3, la cui dimostrazione mediante il teorema di Ramsey è quasi immediata.

**Teorema 6.11.** *Ogni successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a valori reali ammette una sottosuccessione costante o strettamente monotona (crescente o decrescente).*

DIMOSTRAZIONE. Si assegni ad ogni coppia di numeri naturali  $i$  e  $j$ , con  $i < j$ , un diverso colore a seconda che  $a_j - a_i$  sia strettamente positivo, zero, o strettamente negativo. Il Teorema 6.7 assicura che esiste un sottoinsieme infinito  $X$  di  $\mathbb{N}$  tale che ogni coppia di elementi di  $X$  ha lo stesso colore. I termini della successione corrispondenti agli elementi di  $X$  formano una sottosuccessione che (a seconda del colore) è strettamente crescente, costante, o strettamente decrescente. ■

4) La dimostrazione del prossimo risultato, con il quale torniamo ai grafi ed alle colorazioni (dei vertici, nel senso della sezione 5.1), è, infatti, piuttosto un'applicazione del Lemma di König.

**Teorema 6.12.** *[de Bruijn, Erdos 1951] Siano  $G$  un grafo su un insieme di vertici  $V$ , infinito numerabile, e  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ . Se ogni sottografo finito di  $G$  ha numero cromatico al più  $k$ , allora  $G$  ha numero cromatico al più  $k$ .*

DIMOSTRAZIONE. Enumerato l'insieme  $V = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ , per ogni  $i \geq 1$  sia  $G_i$  il sottografo indotto in  $G$  dal sottoinsieme  $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ . Consideriamo il grafo  $\Gamma$  il cui insieme di vertici  $\mathcal{V}$  è costituito dalle coppie  $(G_i, \gamma)$  dove  $\gamma$  è una  $k$ -colorazione (dei vertici) di  $G_i$ , e due vertici  $(G_i, \gamma), (G_j, \gamma')$  costituiscono un arco se  $i < j$  e la restrizione di  $\gamma'$  a  $X_i$  coincide con  $\gamma$ . Per ogni  $i \geq 1$  poniamo

$$\mathcal{V}_i = \{(G_i, \gamma) \mid \gamma \text{ colorazione di } G_i\}.$$

Allora,  $\mathcal{V} = \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{V}_i$ , ed è definita una funzione  $f : \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}$  ponendo, per ogni  $i \geq 2$ ,

$$f(G_i, \gamma) = (G_{i-1}, \gamma|_{X_{i-1}}),$$

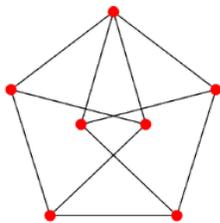
che soddisfa la condizione del Lemma di König 6.8. Dunque esiste una sequenza infinita

$$(G_1, \gamma_1), (G_2, \gamma_2), \dots$$

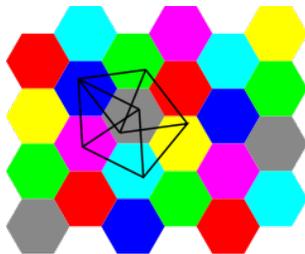
tale che, per ogni  $j > i \geq 1$ , la restrizione di  $\gamma_j$  a  $X_i$  coincide con  $\gamma_i$ . Questo definisce una applicazione  $\gamma$  su  $V$  che fornisce una  $k$ -colorazione di  $G$ . ■

Il Teorema di de Bruijn e Erdos vale anche senza la restrizione di numerabilità sull'insieme dei vertici  $V$ .

*Colorare il piano.* Un curioso e tuttora irrisolto problema di colorazione di grafi infiniti è quello di *Hadwiger–Nelson*. I vertici del grafo sono i punti del piano euclideo e gli archi sono costituiti da tutte e sole le coppie di vertici la cui distanza euclidea è uguale a 1: il problema chiede quale sia il numero cromatico di tale grafo. È, almeno in apparenza, un grafo piuttosto diverso da quelli che di solito abbiamo avuto tra le mani: l'insieme dei vertici è più che numerabile, ed il grado di ogni vertice infinito. Il Teorema di Bruijn e Erdos riconduce però la questione ai suoi sottografi finiti; il problema diventa: qual è il minimo numero di colori necessario per colorare un qualsiasi insieme finito di punti nel piano euclideo in modo che punti a distanza 1 abbiano colori diversi? Per qualche ragione - non del tutto misteriosa - si denota tale numero con  $\chi(\mathbb{R}^2)$ . Il grafo di Moser (figura sotto) è di questo tipo ed ha numero cromatico 4, quindi  $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ .



Dall'altra parte, mediante una tessellazione del piano mediante esagoni di diametro poco meno che unitario, non è difficile provare che 7 colori sono sufficienti.



In conclusione,  $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ , e questo è il meglio che ad oggi sia noto su  $\chi(\mathbb{R}^2)$ .

5) *Il Teorema di Schur.* Nel 1916 Issai Schur provò un interessante risultato legato ai problemi di partizione di insiemi numeric, che anticipò storicamente quella che sarà poi la Teoria di Ramsey, ed ha come bella applicazione il fatto che l'Ultimo Teorema di Fermat è falso per i campi finiti  $\mathbb{Z}_p$ , con  $p$  sufficientemente grande. Di questo teorema diamo una dimostrazione vicina a quella originale, che utilizza comunque un argomento “a la Ramsey”, lasciando per esercizio (esercizio 6.12) la dimostrazione mediante il teorema di Ramsey di una versione con limite non specificato.

Sia  $S$  un insieme ed  $r$  un intero naturale. Per definizione, una  $r$ -partizione di  $S$  è semplicemente una qualunque applicazione  $\chi : S \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ .

**Teorema 6.13** (Schur 1916). *Per ogni intero  $r \geq 2$  ed ogni  $r$ -partizione dell'insieme  $\{1, \dots, n\}$ , con  $n \geq [er!]$  (dove  $e$  è il numero di Nepero), esistono tre interi  $x, y, z$  che appartengono ad uno stesso termine della partizione e tali che  $x + y = z$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\chi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$  una  $r$ -colorazione dei primi  $n$  interi positivi. Assumiamo per assurdo che non esistano interi positivi  $x, y$  con  $x + y \leq n$  e tali che  $\chi(x) = \chi(y) = \chi(x + y)$ , e proviamo che  $n < er!$ .

Sia  $c_1$  uno fra i colori che ricorrono più frequentemente, diciamo  $n_1$  volte, fra gli  $n$  elementi e siano  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n_1}$  gli  $n_1$  elementi di  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  aventi tutti colore  $c_1$ . Per il principio dei cassetti si ha  $n \leq rn_1$ .

Poniamo  $A_1 := \{x_i - x_1 | 1 \leq i \leq n_1\}$  e osserviamo che nessun elemento di  $A_1$  può avere il colore  $c_1$ . Pertanto  $A_1$  è colorato con  $r - 1$  colori. Sia  $c_2$  uno fra i colori che ricorrono più frequentemente, diciamo  $n_2$  volte, fra gli  $n_1 - 1$  elementi di  $A_1$  e siano  $y_1 < y_2 < \dots < y_{n_2}$  gli elementi di  $A_1$  aventi tutti colore  $c_2$ . Per il principio dei cassetti, abbiamo che  $n_1 - 1 \leq (r - 1)n_2$ .

Poniamo ora  $A_2 := \{y_i - y_1 | 1 \leq i \leq n_2\}$  e osserviamo che nessun elemento di  $A_2$  può avere colore  $c_1$  o  $c_2$  (infatti  $y_i - y_1 = (x_j - x_1) - (x_l - x_1) = x_j - x_l$  per opportuni  $j, l = 1, 2, \dots, n_2$ ). Pertanto  $A_2$  è colorato con  $r - 2$  colori. Similmente a prima, sia  $c_3$  un colore che ricorre più frequentemente fra gli  $n_2 - 1$  elementi di  $A_2$  e siano  $z_1 < z_2 < \dots < z_{n_3}$  gli elementi di  $A_2$  aventi colore  $c_3$ . Abbiamo che  $n_2 - 1 \leq (r - 2)n_3$ .

Continuiamo con questa procedura, finché  $n_k = 1$  (alla peggio si avrà  $n_k = 1$  per  $k = r$ ). Allora  $n \leq rn_1$  e  $n_i \leq (r - i)n_{i+1} + 1$ , pertanto abbiamo che

$$n \leq \sum_{i=0}^{r-1} r(r-1)(r-2)\dots(r-i) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{r!}{i!} < r! \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = er!$$

come si voleva. ■

**Corollario 6.14.** *Per ogni intero  $n \geq 1$ , esiste un numero primo  $p_0$  tale che per ogni primo  $p \geq p_0$  la congruenza*

$$x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$$

*ha soluzioni non banali (i.e.  $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$ ) in  $\mathbb{Z}^3$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $p_0$  il più piccolo primo maggiore di  $en! + 1$  e sia  $p$  un qualunque primo  $p \geq p_0$ . Indichiamo con  $g$  un generatore del gruppo moltiplicativo  $\mathbb{Z}_p^*$ . Allora ogni elemento di  $\mathbb{Z}_p^*$  si scrive come  $g^z$ , per un unico  $z \in \{0, \dots, p - 1\}$ . Inoltre esistono unici  $q \geq 0$  ed  $r \in \{0, \dots, n - 1\}$  tali che  $z = nq + r$ . Possiamo allora definire la seguente colorazione sugli elementi di  $\mathbb{Z}_p^*$

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{Z}_p^* &\rightarrow \{0, 1, \dots, n - 1\} \\ g^{nq+r} &\mapsto r \end{aligned}$$

Per il Teorema 6.13 esistono  $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}_p^*$  tali che  $x_1 + y_1 = z_1$  e  $\chi(x_1) = \chi(y_1) = \chi(z_1)$ . Posti  $x_1 = g^{nj_x+i}$ ,  $y_1 = g^{nj_y+i}$  e  $z_1 = g^{nj_z+i}$ , abbiamo che  $x = g^{j_x}$ ,  $y = g^{j_y}$  e  $z = g^{j_z}$  è una soluzione non banale dell'equazione di Fermat in  $\mathbb{Z}_p$ . ■

## 6.4 I Teoremi di Van der Waerden e di Hales-Jewett

Due fra i teoremi chiave della Teoria di Ramsey sono storicamente il Teorema di Van der Waerden del 1927 e quello di Hales e Jewett del 1963. In questa sezione li proveremo entrambi, mostrando il primo come conseguenza del secondo.

Da un punto di vista informale, il Teorema di Hales-Jewett afferma che presi due interi positivi  $t$  e  $r$ , esiste un numero, che chiameremo  $HJ = HJ(r, t)$ , tale che se coloriamo con  $r$  colori le celle del cubo di dimensione  $HJ$  e lato di lunghezza  $t$ , allora esiste sempre una riga, o colonna, o diagonale, ..., di lunghezza  $t$  le cui celle hanno tutte lo stesso colore. Detto in altri termini, immaginiamo una versione multi-dimensionale del celebre gioco del “tris”, costituita da righe tutte della stessa ampiezza  $t$ , e immaginiamo che a tale gioco partecipino  $r$  giocatori. Allora ogni partita avrà sempre un vincitore, indipendentemente da quanto sia grande  $t$ , o dal numero di giocatori,  $r$ , o dall'ordine con cui vengono fatte le mosse, purché la dimensione della “scacchiera da gioco” sia sufficientemente grande. In particolare, se  $r = 2$  e i due giocatori si alternano nelle mosse, allora chi inizia per primo possiede sempre una strategia vincente (sebbene questo gli sia di poco aiuto, in quanto non esiste un algoritmo costruttivo per ottenere tale strategia).

Introduciamo alcuni concetti di geometria combinatoria.

Siano  $t$  ed  $n$  due interi naturali e indichiamo con  $[t]$  l'insieme  $\{1, 2, \dots, t\} \subset \mathbb{N}$  e con

$$[t]^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in [t], \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Lo spazio  $[t]^n$  viene detto *cubo combinatorico*  $n$ -dimensionale di ampiezza  $t$ .

Un sottoinsieme  $L \subseteq [t]^n$  è una *retta combinatoria* se esiste un sottoinsieme *non vuoto*  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset [n]$  e dei numeri  $a_i$  per  $i \notin I$ , per cui si ha

$$L = \{x \in [t]^n \mid x_i = a_i \text{ per } i \notin I \text{ e } x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k}\}.$$

Se introduciamo il simbolo “\*” per denotare il parametro (unico in questo caso), ogni linea combinatoria risulta essere definita da un vettore, chiamato *radice*,

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

dove  $\tau_i = a_i$  per  $i \notin I$  e  $\tau_i = *$  per  $i \in I$ . Per  $j \in [t]$  definiamo  $\tau(j)$ , la stringa  $\tau$  dove ogni posizione marcata da \* viene sostituita con  $j$ . Abbiamo che

$$L = \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)\}.$$

Vediamo un esempio per chiarirci subito le idee. Nello spazio  $[6]^5$  consideriamo la retta combinatoria definita dalla radice  $\tau = (*, 6, *, *, 1)$ . In questo caso abbiamo che “l'insieme attivo” è  $I = \{1, 3, 4\} \subset [6]$  e “le posizioni fisse” sono date da  $a_2 = 6$  e  $a_5 = 1$ :

$$L = \begin{cases} (1, 6, 1, 1, 1) = \tau(1) \\ (2, 6, 2, 2, 1) = \tau(2) \\ (3, 6, 3, 3, 1) = \tau(3) \\ (4, 6, 4, 4, 1) = \tau(4) \\ (5, 6, 5, 5, 1) = \tau(5) \\ (6, 6, 6, 6, 1) = \tau(6) \end{cases}$$

Ogni retta combinatoria di  $[t]^n$  è costituita pertanto da esattamente  $t$  punti, mentre in totale il numero delle radici distinte, e quindi di tutte le possibili rette combinatorie, è  $(t+1)^n - t^n$ .

Possiamo in generale definire un qualunque *spazio combinatorio  $m$ -dimensionale* di  $[t]^n$  nel modo seguente. Siano  $*_1, *_2, \dots, *_m$  simboli mutuamente distinti (e non appartenenti all'alfabeto  $[t]$ ). Sia  $\tau$  una *radice generalizzata*, ovvero un elemento di  $([t] \cup \{*_1, *_2, \dots, *_m\})^n$ , dove ciascuno dei simboli  $*_i$  compare almeno una volta. Allora  $\tau$  definisce in modo univoco un sottospazio combinatorio  $m$ -dimensionale  $S_\tau$ , esso è definito come l'insieme dei punti dello spazio  $[t]^n$  che possono essere ottenuti rimpiazzando nelle coordinate di  $\tau$  ogni simbolo  $*_j$ , per ogni  $j \in [m]$ , con tutti i possibili valori di  $[t]$ .

Vediamo un esempio. Nello spazio  $[3]^4$ , prendiamo come radice generalizzata  $\tau = (1, *_1, 3, *_2)$ , allora  $S_\tau$  è il piano definito dai seguenti punti

$$S_\tau = \begin{cases} (1, 1, 3, 1) = \tau(1, 1) \\ (1, 1, 3, 2) = \tau(1, 2) \\ (1, 1, 3, 3) = \tau(1, 3) \\ (1, 2, 3, 1) = \tau(2, 1) \\ (1, 2, 3, 2) = \tau(2, 2) \\ (1, 2, 3, 3) = \tau(2, 3) \\ (1, 3, 3, 1) = \tau(3, 1) \\ (1, 3, 3, 2) = \tau(3, 2) \\ (1, 3, 3, 3) = \tau(3, 3) \end{cases}$$

Gli elementi di  $[t]^n$  vengono anche detti *parole* di lunghezza  $n$  nell'*alfabeto*  $[t] = \{1, 2, \dots, t\}$ . La scelta dell'insieme  $[t]$  è stata una convenzione, ovviamente un arbitrario insieme  $A$ , con  $|A| = t$  simboli, è ugualmente un adeguato alfabeto per lo stesso cubo combinatorio (detto in modo formale, i cubi combinatori  $[t]^n$  ed  $A^n$  sono isomorfi). Nel seguito adotteremo anche la seguente notazione

$$\mathbf{a} = a_1 a_2 \dots a_n$$

per il generico elemento  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  di  $A^n$ . Una simile notazione “a stringa” verrà usata anche per le radici in  $(A \cup \{*\})^n$ .

Enunciamo e proviamo il Teorema di Hales e Jewett nella sua forma più completa. La dimostrazione che presentiamo non è quella originale del 1963, bensì una elegante dimostrazione dovuta a Shelah.

**Teorema 6.15** (Hales Jewett 1963). *Siano assegnati un alfabeto  $A$  di  $t$  simboli e due interi positivi  $m$  ed  $r$ . Allora esiste un intero  $n = HJ(m, r, t)$  tale che per ogni  $r$ -colorazione dello spazio  $A^n$  esiste un  $m$ -spazio combinatorio monocromatico.*

**DIMOSTRAZIONE.** Un semplice trucco permette di dimostrare il Teorema nel caso generale, una volta provato l'asserto nel caso delle rette, ovvero per  $m = 1$ . Infatti, assumiamo il risultato vero per  $m = 1$ , ovvero l'esistenza degli interi  $HJ(1, r, t)$  per ogni  $r$  e  $t$ . Sia  $m \geq 2$  e consideriamo un nuovo alfabeto  $B$  di cardinalità  $t^m$ , i cui elementi sono tutte le stringhe di lunghezza  $m$  nell'alfabeto  $A$ . Sia  $n = HJ(1, r, t^m)$ , allora per ogni  $r$ -colorazione di  $B^n$  esiste una retta monocromatica  $L$  nell'alfabeto  $B$ . Si provi per esercizio che tale retta in  $B^n$  è un

$m$ -spazio di  $A^{mn}$ , e quindi  $HJ(m, r, t) \leq m \cdot HJ(1, r, t^m)$ .

Proviamo dunque il risultato per  $m = 1$ .

Per semplicità indicheremo con  $HJ(r, t)$  il numero  $HJ(1, r, t)$  che stiamo cercando.

Sia fissato  $r$ , il numero di colori, e facciamo induzione su  $t$  la cardinalità dell'alfabeto  $A$ .

Per  $t = 1$  il Teorema è banale.

Assumiamo il risultato vero per  $t - 1$  (ed  $r$ ) e proviamolo per  $t$ . Poniamo

$$n := HJ(r, t - 1),$$

e definiamo ricorsivamente la seguente sequenza di dimensioni  $N_1, \dots, N_n$

$$N_1 := r^{t^n}, \quad N_i := r^{t^{n + \sum_{j=1}^{i-1} N_j}}.$$

Poniamo  $N := N_1 + \dots + N_n$ . Proveremo l'esistenza di  $HJ(r, t)$ , mostrando che  $HJ(r, t) \leq N$ , ovvero che per tale  $N$  ogni  $r$ -colorazione di  $A^N$  garantisce l'esistenza di una retta combinatoria di  $A^N$  che sia monocromatica. (La scelta particolarmente "bizzarra" degli  $N_i$ , e quindi di tale  $N$ , non deve far spaventare; è un tecnicismo che tornerà utile per provare il fatto  $(\star)$  di sotto).

Possiamo fissare come alfabeto  $A$  l'insieme dei seguenti  $t$  simboli  $A = \{0, 1, \dots, t - 1\}$ . Sia dunque

$$\chi : A^N \longrightarrow \{1, 2, \dots, r\}$$

una  $r$ -colorazione dell' $N$ -cubo  $A^N$  e proponiamoci di trovare almeno una retta combinatoria monocromatica. Poiché stiamo facendo induzione su  $t$  occorre definire un'opportuna colorazione, che chiameremo  $\chi'$  su  $(A')^n$ , dove  $A'$  è un alfabeto di  $t - 1$  simboli.

Diciamo che due parole  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^n$  sono *vicine* se differiscono in esattamente un'unica coordinata, diciamo la  $i$ -esima, in cui  $a_i = 0$  e  $b_i = 1$ , cioè se:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1 \dots a_{i-1} 0 a_i \dots a_n \\ \mathbf{b} &= a_1 \dots a_{i-1} 1 a_i \dots a_n, \end{aligned}$$

per opportuni  $a_j \in \{0, 1, \dots, t - 1\}$ .

Data una parola  $\mathbf{a} = a_1 a_2 \dots a_n \in A^n$  e una sequenza di  $n$  radici

$$\tau = \tau^1 \tau^2 \dots \tau^n \in (A \cup \{*\})^N,$$

dove la  $i$ -esima radice  $\tau^i$  ha lunghezza  $N_i$  (ovvero  $\tau^i \in (A \cup \{*\})^{N_i}$ ), definiamo  $\tau(\mathbf{a})$  la corrispondente parola di lunghezza  $N$  nell'alfabeto  $A$ , data da:

$$\tau(\mathbf{a}) = \tau^1(a_1) \tau^2(a_2) \dots \tau^n(a_n) \in A^N.$$

Ovvero, rimpiazziamo ogni  $*$  in  $\tau^i$  rispettivamente con  $a_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Affermiamo che vale il seguente

**Fatto  $(\star)$ .** Esiste una successione di  $n$  radici  $\tau = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \in (A \cup \{*\})^N$  come sopra, per cui

$$\chi(\tau(\mathbf{a})) = \chi(\tau(\mathbf{b}))$$

per ogni coppia di parole vicine  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^n$ .

Prima di provare  $(\star)$  facciamo vedere come da ciò segue il resto della dimostrazione del Teorema.

Usiamo la colorazione  $\chi$  di  $A^N$  per definire una colorazione “ad-hoc” per  $(A')^n$ , con  $A' := A \setminus \{0\}$ . Definiamo

$$\begin{aligned}\chi' : (A')^n &\longrightarrow \{1, 2, \dots, r\} \\ \mathbf{a} &\longmapsto \chi(\tau(\mathbf{a}))\end{aligned}$$

dove  $\tau$  è definito da  $(\star)$ . Poiché l'alfabeto  $A \setminus \{0\}$  contiene  $t - 1$  simboli ed  $n = HJ(r, t - 1)$ , possiamo applicare l'ipotesi induttiva alla colorazione  $\chi'$ . Esisterà pertanto una radice

$$\nu = \nu_1\nu_2 \dots \nu_n \in ((A \setminus \{0\}) \cup \{*\})^n$$

per cui la retta

$$L_\nu = \{\nu(1), \nu(2), \dots, \nu(t - 1)\}$$

è monocromatica, rispetto a  $\chi'$ . Consideriamo ora la stringa

$$\tau(\nu) = \tau^1(\nu_1)\tau^2(\nu_2) \dots \tau^n(\nu_n) \in (A \cup \{*\})^N.$$

Questa stringa ha lunghezza  $N$  ed è una radice poiché lo è  $\nu$ , e quindi contiene almeno un simbolo  $*$ . Affermiamo allora che la retta

$$L_{\tau(\nu)} = \{\tau(\nu)(0), \tau(\nu)(1), \dots, \tau(\nu)(t - 1)\} \subseteq A^N$$

è monocromatica rispetto alla colorazione iniziale  $\chi$ . Infatti,  $\chi'$  assegna lo stesso colore alle parole  $\nu(1), \nu(2), \dots, \nu(t - 1)$ . Quindi, per definizione di  $\chi'$ , la colorazione  $\chi$  assegna lo stesso colore alle parole  $\tau(\nu(1)), \tau(\nu(2)), \dots, \tau(\nu(t - 1))$ . Ora se  $\nu$  contiene, nella sua espressione, un solo “\*”, allora  $\tau(\nu(0))$  è una parola vicina a  $\tau(\nu(1))$  e, in virtù del Fatto  $(\star)$ , riceve lo stesso colore (rispetto a  $\chi$ ). Altrimenti se  $\nu$  contiene più di un “\*”, noi possiamo sempre raggiungere la parola  $\tau(\nu(0))$  da  $\tau(\nu(1))$ , tramite una successione di parole vicine, pertanto, per il Fatto  $(\star)$ , le parole  $\tau(\nu(0))$  e  $\tau(\nu(1))$  sono colorate nello stesso modo. Ne segue che l'intera retta  $L_{\tau(\nu)}$  è monocromatica.

Rimane ora da provare il Fatto  $(\star)$ .

Proviamo l'esistenza delle radici  $\tau^i$  facendo induzione inversa su  $i$ . Supponiamo d'aver definito  $\tau^{i+1}, \dots, \tau^n$  e definiamo  $\tau^i$ .

Sia  $L_{i-1} := \sum_{j=1}^{i-1} N_j$  la lunghezza del segmento iniziale  $\tau^1\tau^2 \dots \tau^{i-1}$  delle radici che stiamo cercando. La lunghezza dell' $i$ -esimo segmento  $\tau^i$  è  $N_i$ . Per  $k = 0, 1, \dots, N_i$ , sia  $W_k$  la parola di lunghezza  $N_i$  così definita

$$W_k = \underbrace{0 \dots 0}_k \underbrace{1 \dots 1}_{N_i - k}.$$

Per ogni  $k = 0, 1, \dots, N_i$ , definiamo la  $r$ -colorazione  $\chi_k$  di tutte le parole in  $A^{L_{i-1} + n - i}$  come segue:

$$\chi_k(x_1x_2 \dots x_{L_{i-1}}y_{i+1} \dots y_n) := \chi(x_1x_2 \dots x_{L_{i-1}}W_k\tau^{i+1}(y_{i+1}) \dots \tau^n(y_n)).$$

Abbiamo in tutto  $N_i + 1$  colorazioni:  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N_i}$ , ma tali colorazioni devono essere in numero  $\leq r^h$ , dove  $h = |A^{L_{i-1}+n-i}| = t^{L_{i-1}+n-i}$ . Ora

$$r^{t^{L_{i-1}+n-i}} \leq r^{t^{L_{i-1}+n}} = N_i.$$

Per il principio dei cassetti, almeno due di queste colorazioni coincidono, cioè esistono  $s < r$  tali che  $\chi_s = \chi_r$ . Ora siamo in grado di definire la desiderata radice  $\tau^i$  come

$$\tau^i := \underbrace{0 \dots 0}_s * \underbrace{\dots *}_{r-s} \underbrace{1 \dots 1}_{N_i-r}.$$

È immediato constatare che le radici  $\tau^1, \dots, \tau^n$  definite tramite questa procedura soddisfano l'enunciato. Infatti, osserviamo che  $\tau^i(0) = W_r$  e  $\tau^i(1) = W_s$ , pertanto assegnate due parole  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  di  $A^n$  che siano vicine nella  $i$ -esima coordinata,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1 \dots a_{i-1} 0 a_{i+1} \dots a_n \\ \mathbf{b} &= a_1 \dots a_{i-1} 1 a_{i+1} \dots a_n \end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{a}) &= \tau^1(a_1) \dots \tau^{i-1}(a_{i-1}) \tau^i(0) \tau^{i+1}(a_{i+1}) \dots \tau^n(a_n) \\ \tau(\mathbf{b}) &= \tau^1(a_1) \dots \tau^{i-1}(a_{i-1}) \tau^i(1) \tau^{i+1}(a_{i+1}) \dots \tau^n(a_n) \end{aligned}$$

ed essendo  $\chi_s = \chi_r$ ,

$$\begin{aligned} \chi(\tau(\mathbf{a})) &= \chi\left(\tau^1(a_1) \dots \tau^{i-1}(a_{i-1}) W_r \tau^{i+1}(a_{i+1}) \dots \tau^n(a_n)\right) \\ &= \chi_r\left(\tau^1(a_1) \dots \tau^{i-1}(a_{i-1}) a_{i+1} \dots a_n\right) \\ &= \chi_s\left(\tau^1(a_1) \dots \tau^{i-1}(a_{i-1}) a_{i+1} \dots a_n\right) \\ &= \chi\left(\tau^1(a_1) \dots \tau^{i-1}(a_{i-1}) W_s \tau^{i+1}(a_{i+1}) \dots \tau^n(a_n)\right) = \chi(\tau(\mathbf{b})). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione del Teorema. ■

Il Teorema di Hales Jewett implica un celebre risultato di Van der Waerden sulle progressioni aritmetiche. La prima dimostrazione risale al 1927, ed è ovviamente stata ottenuta con altri metodi.

Col termine di *progressione aritmetica di passo  $d \geq 1$  e lunghezza  $t$*  si intende una successione di interi naturali della forma

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d.$$

**Teorema 6.16** (Van der Waerden). *Per ogni scelta di interi positivi  $r$  e  $t$ , esiste un intero  $N = W(r, t)$  tale che per ogni  $r$ -colorazione  $\chi$  di  $\{1, \dots, N\}$ , esiste almeno una progressione aritmetica di lunghezza  $t$ , monocromatica.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $N := n(t-1) + 1$  dove  $n = HJ(1, r, t)$  è dato dal Teorema 6.15. Definiamo la seguente applicazione

$$\begin{aligned} f : [t]^n &\longrightarrow \{1, \dots, N\} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1 + \dots + x_n) - n + 1 \end{aligned}$$

$f$  induce una  $r$ -colorazione  $\chi'$  del cubo  $n$ -dimensionale  $[t]^n$ , semplicemente ponendo  $\chi' = \chi \circ f$ , ovvero assegnando al punto  $x \in [t]^n$  il colore di  $f(x) \in \{1, \dots, N\}$ . Ora se

$$L_\tau = \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(t)\}$$

è una retta combinatoria, abbiamo per ogni  $i = 1, 2, \dots, t-1$

$$f(\tau(i+1)) - f(\tau(i)) = \text{numero degli } * \text{ in } \tau.$$

Pertanto l'immagine tramite  $f$  di ogni retta combinatoria è una progressione aritmetica di lunghezza  $t$ . Per il Teorema di Hales-Jewett esiste una retta monocromatica, quindi una progressione aritmetica monocromatica (di lunghezza  $t$ ) in  $\{1, \dots, N\}$ . ■

Una versione multidimensionale del Teorema di Van der Waerden è stata provata indipendentemente da Gallai e Witt.

Un sottoinsieme  $U \subseteq \mathbb{Z}^m$  è una *copia omotetica* di un  $V \subseteq \mathbb{Z}^m$  se esiste un vettore  $u \in \mathbb{Z}^m$  e una costante  $\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$  tale che

$$U = u + \lambda V := \{u + \lambda v \mid v \in V\}.$$

Si noti che una progressione aritmetica:  $a, a+d, a+2d, \dots, a+(t-1)d$  in  $\mathbb{Z}$  è una copia omotetica di  $V = \{0, 1, \dots, t-1\}$  con  $u = a$  e  $\lambda = d$ .

**Teorema 6.17** (Gallai-Witt). *Sia assegnata una colorazione con un numero finito di colori ai vettori di  $\mathbb{Z}^m$ . Allora ogni sottoinsieme finito di  $\mathbb{Z}^m$  possiede una copia omotetica che è monocromatica.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un numero di colori,  $r$ , ed un insieme finito di vettori  $V = \{v_1, \dots, v_t\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ . Prendiamo come alfabeto  $A = V$  e sia  $n = HJ(r, t)$  l'intero dato dal Teorema 6.15. I punti del cubo  $A^n$  sono pertanto vettori  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , dove ciascuna coordinata  $x_i$  varia in  $\{v_1, \dots, v_t\}$ . Come per il Teorema di Van der Waerden, consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} f : A^n &\longrightarrow \mathbb{Z}^m \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 + \dots + x_n \end{aligned}$$

Per il Teorema 6.15, esiste una retta combinatoria monocromatica

$$L_\tau = \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(t)\} \subseteq A^n.$$

Indichiamo con  $I = \{i \mid \tau_i = *\}$  l'insieme delle coordinate mobili di  $L_\tau$ . Allora  $f(L_\tau)$  è l'insieme di  $t$  vettori della forma

$$u + \lambda v_j,$$

dove  $j = 1, 2, \dots, t$ ,  $\lambda = |I| > 0$  e  $u = \sum_{i=1}^t a_i v_i$ , ed  $a_i \in \mathbb{N}$  è la somma delle coordinate fisse della retta  $L_\tau$ . Pertanto  $f(L_\tau)$  è una copia omotetica monocromatica di  $V$ . ■

**Il Teorema di Szemerédi.** Nel Teorema di Van der Waerden, una  $r$ -colorazione di  $\{1, \dots, N\}$  è una partizione di questo in  $r$  sottoinsiemi, almeno uno dei quali ha quindi cardinalità maggiore o uguale a  $N/r$  (in altri termini,  $A$  ha 'densità' almeno  $1/r$  in  $N$ ); la tesi è che almeno uno dei termini della partizione - e forse non il nostro  $A$  - contiene una progressione aritmetica di lunghezza  $t$ . Nel 1936, Erdős e Turán congettarono che la  $r$ -colorazione nell'enunciato di Van der Waerden fosse in realtà un diversivo, e che il punto decisivo fosse proprio la densità del sottoinsieme. Questa congettura fu infine provata da Szemerédi nel 1975, come punto di arrivo di una argomentazione estremamente complessa. Il Teorema è ritenuto uno degli apici della combinatoria (e non solo quella applicata agli interi).

**Teorema 6.18** (Szemerédi, 1975). *Per ogni intero  $t \geq 1$  ed ogni numero reale  $0 < \delta \leq 1$  esiste un intero  $N = N(t, \delta)$  tale che ogni sottoinsieme  $A$  di  $\{1, 2, \dots, N\}$  tale che  $|A|/N \geq \delta$ , contiene un progressione aritmetica di lunghezza  $t$ .*

Questo risultato è spesso espresso nella sua forma (equivalente) infinita, nella quale riesce anche più suggestivo. Per formularla, diamo la seguente definizione:

sia  $A$  un sottoinsieme dell'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali, la *densità* (superiore) di  $A$  è definita come il limite

$$\delta^\# = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{0, 1, \dots, n\}|}{n}$$

e si dice che  $A$  ha densità positiva se  $\delta(A) > 0$ .

**Teorema 6.19** (Szemerédi, versione infinita). *Un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  a densità positiva contiene progressioni aritmetiche di lunghezza arbitraria.*

Un insieme piuttosto rilevante di numeri naturali che ha densità zero è quello dei numeri primi; ad esso non si applica dunque direttamente il Teorema di Szemerédi. Tuttavia, nel 2004 Green e Tao hanno provato, utilizzando anche il teorema di Szemerédi, che *l'insieme dei numeri primi contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe*. Di fatto, è aperta un'altra congettura di Erdős che predice che se il sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{N}$  è tale che la somma degli inversi dei suoi elementi diverge (cioè  $\sum_{n \in A} 1/n = \infty$ , e questo è il caso per l'insieme dei numeri primi), allora  $A$  contiene progressioni aritmetiche di lunghezza arbitraria.

## 6.5 Esercizi.

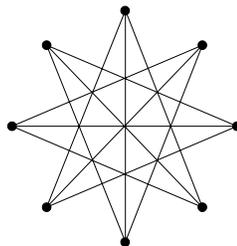
**Esercizio 6.1.** Provare che per ogni 2-colorazione dei lati di  $K_6$  esistono almeno due triangoli monocromatici (eventualmente di colori diversi).

**Esercizio 6.2.** Si provi che se i lati di  $K_7$  sono colorati mediante due colori allora esistono almeno quattro triangoli monocromatici (eventualmente di colori diversi) in  $K_7$ .

**Esercizio 6.3.** Si provi che data una qualsiasi colorazione con due colori dei lati del grafo completo bipartito  $K_{5,5}$  esiste un sottografo monocromatico isomorfo a  $K_{2,2}$ .

**Esercizio 6.4.** Sia  $C_4$  il ciclo di lunghezza 4; si provi che  $R(C_4, C_4) = 6$ . Si provi quindi che  $R(C_5, C_4) = 7$ . Si provi che, se  $n$  è dispari, allora  $R(C_n, C_n) > 2n - 2$ .

**Esercizio 6.5.** Aiutandosi anche con il grafo in figura, si provi che  $R(3, 4) = 9$ .



**Esercizio 6.6.** Si provi che  $R(3, 5) \leq 14$ .

**Esercizio 6.7.** Sia  $G$  il grafo il cui insieme dei vertici è  $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$  (l'insieme delle classi di resto modulo 17), e una coppia  $\{[n], [m]\}$  di classi è un lato se e solo se

$$n - m \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}.$$

Si provi che né  $G$  né il suo complementare contengono un sottografo isomorfo a  $K_4$ .

**Esercizio 6.8.** Usando l'esercizio precedente e l'esercizio 6.5 si provi che  $R(4, 4) = 18$ .

**Esercizio 6.9.** Dato  $t \geq 2$  siano  $n_1 = \dots = n_t = 3$ . Si dimostri (vedi Teorema 6.2)  $R(n_1, n_2, \dots, n_t) \leq 2^{2^t}$ .

**Esercizio 6.10.** Si dimostri il Teorema 6.2.

**Esercizio 6.11.** Sia  $G$  un gruppo infinito, tale che per ogni sottoinsieme infinito  $X$  di  $G$  esistono due elementi distinti  $x, y \in X$  tali che  $xy = yx$ . Si provi che  $G$  contiene un sottogruppo commutativo infinito [sugg.: si ricordi che un gruppo generato da elementi che a due a due commutano è commutativo].

**Esercizio 6.12.** Utilizzando il Teorema di Ramsey, provare il Lemma di Schur nella seguente versione.

Per  $n \geq 2$ , esiste un intero  $f(n)$ , tale che per ogni partizione di  $V = \{1, 2, \dots, f(n)\}$  in  $n$  classi, esistono due interi  $a$  e  $b$  tali che  $a$ ,  $b$  e  $a + b$  appartengono alla stessa classe. [Sugg.: se  $\{1, 2, \dots, N\}$  è ripartito in un insieme  $S$  di classi, si colorino i sottoinsiemi con 2 elementi di  $\{1, 2, \dots, N\}$ , assumendo l'insieme  $S$  come insieme dei colori, ed assegnando ad ogni  $\{a, b\}$  il colore corrispondente alla classe a cui appartiene  $|a - b|$ . . .]

**Esercizio 6.13.** Usando il fatto che  $R(3, 4) = 9$  (esercizio 6.5), si provi che  $r^3(2, 4) \leq 19$ , dove  $r^k(c, n)$  è definito col Teorema 6.6.

**Esercizio 6.14.** [Ramsey per grafi bipartiti] (1) Si provi che per ogni intero  $m \geq 1$  esiste  $s = s(m)$  tale che per ogni 2-colorazione degli archi del grafo completo bipartito  $K_{s,s}$  esiste un sottografo  $K_{m,m}$  monocromatico.

(2) Si provi che esiste una 2-colorazione degli archi di  $K_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}$  che non contiene sottografi completi monocromatici infiniti.

**Esercizio 6.15.** [Lemma di König] Diciamo che un grafo infinito  $G$  è localmente finito se ogni vertice ha grado finito. Si provi che un albero localmente finito ha un cammino semplice infinito.

**Esercizio 6.16.** [de Bruijn-Erdős per List-colorings] Sia  $G = (V, E)$  un grafo su un insieme numerabile di vertici,  $k \geq 1$ , e sia assegnata una lista  $L : V \rightarrow \mathbb{N}$  con  $|L(x)| = k$  per ogni  $x \in V$ . Si provi che  $G$  è  $L$ -colorabile (vedi sezione 5.3) se e solo se ogni suo sottografo finito è  $L$ -colorabile.

**Esercizio 6.17.** Si provi l'affermazione contenuta nella prima parte della dimostrazione del Teorema di Hales-Jewett: se  $A$  è un insieme di  $t$  elementi e  $B = A^m$ , allora ogni retta di  $B^n$  è un  $m$ -spazio dimensionale di  $A^{mn}$ .

**Esercizio 6.18.** Si mostri che per ogni  $r \geq 2$  vale  $HJ(1, r, 2) \leq r$ , cioè per ogni colorazione del cubo  $\{0, 1\}^r$  in  $r$  colori, esiste almeno una retta monocromatica. (Suggerimento. Si considerino le parole della forma  $0^i 1^{r-i}$ , per  $i = 0, 1, \dots, r$ .)

**Esercizio 6.19.** Sia  $N = W(2, t^2 + 1)$ , dove  $W(r, t)$  è la funzione di van der Waerden e  $\chi$  una colorazione di  $[N]$  in due colori. Si mostri che esiste una progressione aritmetica di  $t$  termini  $\{a + i \cdot d \mid i = 0, 1, \dots, t - 1\}$  tale che  $\chi(d) = \chi(a + i \cdot d)$ , per ogni  $i = 0, 1, \dots, t - 1$ .

**Esercizio 6.20.** (banale) SI deduca il Teorema di Van der Waerden da quello di Szemerédi.

**Esercizio 6.21.** Si trovi un sottoinsieme infinito di  $\mathbb{N}$  che non contiene alcuna progressione aritmetica di lunghezza maggiore di 3 (e si verifichi che la sua densità è zero).



# Capitolo 7

## Grafi e algebra

In questo capitolo considereremo alcuni aspetti di teoria dei grafi che si rifanno, sia nell'approccio concettuale che nelle tecniche, ad argomenti di natura più algebrica. Come si vedrà, il tipo di strumenti che introdurremo si adatta in modo particolare allo studio della classe dei grafi regolari, per cui in una prima sezione introduttiva riporteremo qualche semplice ma basilare osservazione riguardante questa classe di grafi. La seconda sezione è quella principale: in essa, mediante la nozione di matrice d'adiacenza, si stabilisce una prima, fondamentale, interpretazione dei grafi in termini di algebra lineare che è il punto di partenza di quella che è chiamata Teoria Algebrica dei Grafi.

### 7.1 Grafi regolari.

Ricordiamo che un grafo  $G$  si dice *regolare* se i suoi vertici hanno tutti lo stesso grado; se tale grado comune è uguale a  $d$  si dice che  $G$  è un grafo  $d$ -regolare.

È chiaro che un grafo è 1-regolare se e soltanto se ogni sua componente connessa è composta da due vertici ed un solo lato (il grafo è cioè un 1-fattore). Anche i grafi 2-regolari si descrivono facilmente: un grafo connesso è 2-regolare se e soltanto se è un ciclo (vedi esercizio 1.10, per dimostrarlo si provi ad esempio a considerare un cammino massimale in un grafo connesso 2-regolare e che cosa se ne può dire). Dunque un grafo è 2-regolare se e soltanto se ogni sua componente connessa è un ciclo.

Il primo caso davvero significativo è quello dei grafi 3-regolari, detti anche *grafi cubici*. Di fatto è molto più che un caso interessante: la complessità della classe dei grafi cubici è notevole, ed è frequente che un problema difficile in teoria dei grafi rimanga difficile anche se ci si limita a considerare i grafi cubici. Esempi di grafi cubici sono i grafi del tetraedro, del cubo, del dodecaedro, e il grafo di Petersen. Usando la formula del Teorema 1.1 si ottiene che se  $G = (V, E)$  è un grafo cubico allora  $3|V| = 2|E|$ ; in particolare il numero di vertici di un grafo cubico (o, più in generale, di un grafo regolare di valenza dispari) è pari. La figura 1.14 suggerisce come trovare, per ogni  $n \geq 3$ , un grafo cubico con  $2n$  vertici. È stato calcolato che il numero di grafi cubici (a meno di isomorfismo) rispettivamente con 10, 12, 14 e 16 vertici è 21, 94, 540, 4207.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Il numero di grafi cubici è stato determinato fino a 40 vertici; i grafi cubici con 40 vertici sono cir-

Ricordiamo che se  $v \in V$  è un vertice del grafo connesso  $G$ , e  $0 \leq q$  un numero intero, la palla  $B_G(v, q)$  di raggio  $q$  e centro  $v$  è l'insieme di tutti i vertici di  $G$  la cui distanza da  $v$  non supera  $q$ ; ovvero

$$B_G(v, q) = \{w \in V \mid d_G(v, w) \leq q\}.$$

Quindi,  $B_G(v, 0) = \{v\}$  e, se  $d$  è il grado di  $v$ ,  $B_G(v, 1)$  contiene esattamente  $d + 1$  elementi.

**Lemma 7.1.** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso  $d$ -regolare, con  $d \geq 3$ . Allora, per ogni  $v \in V$  ed ogni  $q \geq 1$*

$$|B_G(v, q)| \leq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}.$$

*In particolare, se  $G$  è cubico,  $|B_G(v, q)| \leq 1 + 3(2^q - 1)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Cominciamo con il porre, per  $q \geq 0$ ,  $\Sigma_G(v, q) = \{w \in V \mid d_G(v, w) = q\}$ , e provare per induzione su  $q$  che  $|\Sigma_G(v, q)| \leq d(d-1)^{q-1}$ . Per  $q = 1$  la cosa è ovvia, dato che  $v$  ha grado  $d = d(d-1)^0$ .

Sia  $q \geq 2$ ; osserviamo che ogni vertice la cui distanza da  $v$  è uguale a  $q$  è adiacente ad un vertice  $w \in \Sigma_G(v, q-1)$ ; inoltre tale vertice  $w$  è esso stesso adiacente ad almeno un vertice di distanza minore, e pertanto, avendo grado  $d$ ,  $w$  può essere adiacente ad al più  $(d-1)$  vertici di distanza  $q$  da  $v$ . Poiché, per ipotesi induttiva,  $|\Sigma_G(v, q-1)| \leq d(d-1)^{q-2}$ , si ricava  $|\Sigma_G(v, q)| \leq d(d-1)^{q-2}(d-1) = d(d-1)^{q-1}$ , come si voleva. Siccome la palla  $B_G(v, q)$  è l'unione disgiunta delle sfere  $\Sigma_G(v, s)$  con  $0 \leq s \leq q$ , si ha

$$|B_G(v, q)| \leq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \dots + d(d-1)^{q-1} = 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}$$

che è l'enunciato del Lemma. ■

Un'immediata conseguenza è la seguente limitazione.

**Corollario 7.2.** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso  $d$ -regolare (con  $d \geq 3$ ) di diametro  $q$ . Allora,*

$$|V| \leq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}.$$

*In particolare, un grafo  $d$ -regolare di diametro 2 ha al più  $d^2 + 1$  vertici; e un grafo cubico di diametro  $q$  ha al più  $1 + 3(2^q - 1)$  vertici.*

Analogamente a quanto provato per il diametro, anche il valore del calibro di un grafo regolare implica un limite al numero dei vertici.

**Proposizione 7.3.** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo  $d$ -regolare con calibro  $g \geq 3$ , e poniamo  $e = \lfloor (g-1)/2 \rfloor$  (la parte intera). Allora*

$$|V| \geq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^e - 1}{d-2}.$$

---

ca  $8 \times 10^{18}$ . Sono cubici anche i grafi di alcune interessantissime molecole composte da atomi di carbonio, come i fullereni: assomigliano ai vecchi palloni da calcio, e potete vederle, ad esempio, al sito <http://www.sussex.ac.uk/Users/kroto/FullereneCentre/main.html>

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione si svolge mediante una procedura analoga a quelle utilizzate per il Lemma 7.1, e si lascia al lettore di eventualmente riscriverla nei dettagli. Fissato un vertice  $v$  di  $G$ , si tratta di provare che due vertici  $u_1 \neq u_2$  tali che le loro distanze da  $v$  non superano il valore  $e-1$  (dove  $e$  è quello nell'enunciato) non possono essere adiacenti ad uno stesso vertice (che non sia eventualmente  $v$ ), perché in tal caso si troverebbe un ciclo la cui lunghezza viola il limite inferiore imposto dal calibro  $g$ . Tenendo conto della regolarità di  $G$ , con un semplice passo induttivo si prova quindi che, per  $1 \leq k \leq e$ , il numero di vertici di  $G$  la cui distanza da  $v$  è  $k$  è  $d(d-1)^{k-1}$ . Procedendo poi come nella dimostrazione del Lemma 7.1 si trova che  $|B_G(v, e)| = 1 + d \cdot \frac{(d-1)^e - 1}{d-2}$ , valore che ovviamente limita inferiormente il numero di vertici di  $G$ . ■

**Gabbie.** Una classe di grafi cubici che riveste un certo interesse, è quella delle cosiddette gabbie. Un grafo cubico con calibro  $g$  è detto una *gabbia cubica* se ha il minimo numero possibile di vertici tra tutti i grafi cubici di calibro  $g$ . Si dimostra facilmente che il grafo completo  $K_4$  è la sola gabbia cubica di calibro 3, e non è difficile, ma richiede un po' più di lavoro, provare che il grafo di Petersen è l'unica gabbia cubica di calibro 5. L'unica gabbia cubica di calibro 6 è il grafo di Heawood (1890):

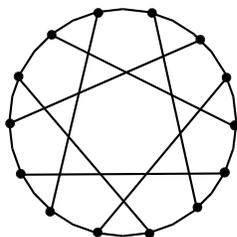


Figura 7.1: il grafo di Heawood

La Proposizione 7.3 fornisce un limite inferiore al numero di vertici di una gabbia cubica che, con qualche considerazione aggiuntiva non difficile, può essere leggermente migliorato, ottenendo la stima seguente:

*Il numero di vertici di un grafo cubico di calibro  $g$  è almeno*

$$n(3, g) = \begin{cases} 1 + 3(2^{(g-1)/2} - 1) & g \text{ dispari} \\ 2(2^{g/2} - 1) & g \text{ pari} \end{cases}$$

Tuttavia, tranne per i casi in cui  $g$  è piccola, questa stima inferiore non coincide con il valore minimo esatto del numero di vertici (cioè quello delle corrispondenti gabbie cubiche), che in genere è più grande. La tabella seguente riassume quanto sino ad oggi noto intorno alle gabbie cubiche. La prima colonna  $g$  è il valore del calibro, la colonna  $|V|$  il numero di vertici della gabbia (che il lettore può confrontare con il limite inferiore  $n(3, g)$ ), la colonna # indica il numero di gabbie distinte per un certo calibro, e l'ultima colonna fornisce l'indicazione del grafo oppure dei nomi degli scopritori (quando vi siano due date, la prima si riferisce alla costruzione della gabbia, la seconda alla dimostrazione della sua unicità, o alla determinazione del numero esatto di gabbie). Per valori di  $g$  maggiori di 12 non si conosce alcuna gabbia, anche se vi sono diverse costruzioni di grafi che forniscono un limite superiore per il numero di vertici di una gabbia.

$g$	$ V $	#	grafo
3	4	1	$K_4$
4	6	1	$K_{3,3}$
5	10	1	Petersen
6	14	1	Heawood
7	24	1	McGee
8	30	1	Tutte, Levi
9	58	18	Biggs/Hoare (1980), Brinkmann, McKay, Saager (1995)
10	70	3	O'Keefe, Wong (1980)
11	112	1	Balaban (1973), McKay, Myrvold (2003)
12	126	1	esagono generalizzato

## 7.2 Matrice d'adiacenza.

Sia  $\Gamma = (V, E, \phi)$  un multigrafo finito, e per ogni coppia di vertici  $u, v$  denotiamo con  $A_{uv}$  il numero di archi i cui estremi sono  $u$  e  $v$ ; quindi  $A_{uv} = |\phi^{-1}(\{u, v\})|$ . Fissato un ordinamento totale di  $V$ , la **matrice di adiacenza** di  $\Gamma$  è la matrice  $A(\Gamma)$  (che è conveniente considerare come una matrice a coefficienti nel campo complesso  $\mathbb{C}$ ) i cui elementi sono i numeri interi  $A_{uv}$ . Indipendentemente dalla scelta dell'ordine su  $V$ , se  $|V| = n$ ,  $A(\Gamma)$  è una matrice quadrata, simmetrica ed i cui termini diagonali  $A_{uu}$  sono tutti nulli. Inoltre, per ogni  $u \in V$ ,

$$\sum_{v \in V} A_{uv} = d_{\Gamma}(u). \quad (7.1)$$

Se  $\Gamma$  è un grafo (cioè, è semplice),  $A_{uv} \in \{0, 1\}$ , per ogni  $u, v \in V$ . Se, inoltre, il grafo è  $k$ -regolare, allora la somma degli elementi di una riga (o di una colonna) è  $k$ .

L'aspetto delle matrici di adiacenza che ci interessa maggiormente è lo studio degli autovalori. Prima di tutto, osserviamo che la matrice di adiacenza  $A$  di un multigrafo con  $n$  vertici è simmetrica ed a valori reali (di fatto interi) e quindi, per il Teorema Spettrale, tutti i suoi autovalori sono reali. Li denoteremo, contandone la molteplicità con

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$$

e chiameremo questo lo *spettro* di  $A$ .

**Esempi.** 1) Calcoliamo lo spettro della matrice di adiacenza  $A(K_n)$  del grafo completo su  $n$  vertici. Si ha, chiaramente,  $A(K_n) = J_n - I_n$ , dove  $J_n$  è la matrice  $n \times n$  in cui ogni elemento è 1, e  $I_n$  la matrice identica di ordine  $n$ . Ne segue che gli autovalori di  $A(K_n)$  sono tutti e soli del tipo  $\lambda - 1$ , dove  $\lambda$  è autovalore di  $J_n$ . Ora,  $J_n$  ha rango 1, quindi il suo nucleo ha dimensione  $n - 1$ , e pertanto 0 è autovalore di  $J_n$  con molteplicità  $n - 1$ . L'altro autovalore di  $J_n$  è  $n$  (che, necessariamente, ha molteplicità 1). Pertanto, gli autovalori di  $A(K_n)$  sono:  $n - 1$  con molteplicità 1, e  $-1$  con molteplicità  $n - 1$ .

2) Studiamo ora la matrice di adiacenza  $A = A(C_n)$  di un  $n$ -ciclo. Se  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  sono i vertici di  $C_n$  elencati in modo che vertici consecutivi siano adiacenti (e  $v_{n-1}$  adiacente a  $v_0$ ), allora

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = B + B^T \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che  $B^T = B^{-1}$ ; quindi  $B$  e  $B^T$  hanno gli stessi autospazi (relativi ad autovalori che sono l'uno l'inverso dell'altro). Ne segue che gli autovalori di  $A$  sono del tipo  $\lambda + \lambda^{-1}$  dove  $\lambda$  è un autovalore di  $B$ . Ora, come si calcola facilmente, il polinomio caratteristico di  $B$  è  $(-1)^n(x^n - 1)$ ; quindi gli autovalori di  $B$  sono le radici  $n$ -esime dell'unità, ovvero  $\lambda_t = \cos \frac{2\pi t}{n} + i \sin \frac{2\pi t}{n}$  con  $t = 0, 1, \dots, n-1$ . Ne segue che gli autovalori di  $A$  sono i numeri reali  $\lambda_t + \lambda_t^{-1} = \lambda_t + \bar{\lambda}_t = 2 \cos \frac{2\pi t}{n}$ , con  $t = 0, 1, \dots, n-1$ . Si osservi che  $\mu_0 = 2 \cos 0 = 2$ , che ha molteplicità 1 (come deve essere dato che  $C_n$  è connesso). Gli altri autovalori hanno molteplicità 2, tranne eventualmente  $-2$ , che occorre se e solo se  $n$  è pari ed, in tal caso, ha molteplicità 1.

Torniamo alla teoria generale. Per studiare gli autovalori di una matrice quadrata di ordine  $n$  è opportuno interpretare questa come la matrice di un endomorfismo di uno spazio  $n$ -dimensionale. Sia  $\Gamma$  un (multi)grafo,  $V$  l'insieme dei suoi vertici, con  $|V| = n$ , ed  $A$  la sua matrice di adiacenza; i cui termini denotiamo con  $A_{xy}$  (al variare di  $x, y \in V$ ). Il  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale che risulta conveniente considerare (essenzialmente dal punto di vista notazionale) è lo spazio  $\mathcal{C}(\Gamma) = \{f \mid f : V \rightarrow \mathbb{C}\}$  di tutte le applicazioni sull'insieme  $V$  a valori in  $\mathbb{C}$ . È uno spazio di dimensione  $n$ , una base del quale è costituita dalle applicazioni che assumono valore 1 in uno dei vertici e valore 0 sugli altri. L'azione della matrice  $A$  su  $\mathcal{C}(\Gamma)$  si descrive facilmente e direttamente: se  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ , allora per ogni  $x \in V$  si pone

$$(Af)(x) = \sum_{y \in V} A_{xy} f(y) = \sum_{x \sim y} A_{xy} f(y), \quad (7.2)$$

dove  $x \sim y$  indica che  $y$  varia nell'insieme dei vertici adiacenti a  $x$  (che sono tutti e soli i vertici  $y$  per cui  $A_{xy} \neq 0$ ). Se  $\Gamma$  è un grafo, la (7.2) diventa

$$(Af)(x) = \sum_{x \sim y} f(y). \quad (7.3)$$

Il caso di cui ci occuperemo principalmente è quello dei grafi regolari. Se  $\Gamma$  è  $k$ -regolare (con  $k \geq 2$ ) allora, per ogni vertice  $x$  si ha

$$\sum_{y \in V} A_{xy} = k.$$

Per la relazione (7.2), ciò comporta che la funzione che su  $V$  vale costantemente 1 è un autovettore per  $A$  relativo all'autovalore  $k$ , e quindi che  $k$  (il grado di regolarità di  $\Gamma$ ) è

un autovalore della matrice di adiacenza  $A$ . Questa prima osservazione sul legame tra gli autovalori della matrice di adiacenza e le proprietà del grafo è resa più specifica nel primo teorema che vediamo.

In quanto segue, manteniamo fissa la notazione:  $\Gamma$  è un multigrafo finito con  $n$  vertici,  $A(\Gamma)$  è la sua matrice di adiacenza, e  $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  è lo spettro di  $A(\Gamma)$ .

**Teorema 7.4.** *Sia  $\Gamma$  un grafo  $k$ -regolare. Allora*

- (i)  $k = \mu_0$ ;
- (ii)  $|\mu_i| \leq k$  per ogni  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;
- (iii)  $\Gamma$  è connesso se e solo se  $\mu_0 > \mu_1$  (ovvero  $k$  è autovalore di molteplicità 1).

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\Gamma$  un grafo  $k$ -regolare, e sia  $A = A(\Gamma)$  la sua matrice d'adiacenza. Abbiamo già osservato che  $k$  è un autovalore di  $A$ .

Sia  $\mu$  un autovalore di  $A$  e sia  $0 \neq f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  un autovettore relativo a  $\mu$ . Scegliamo  $x \in V$  tale che  $|f(x)|$  (modulo complesso) sia massimo. Osserviamo che, rimpiazzando eventualmente  $f$  con  $f(x)f$ , possiamo assumere  $0 < f(x) \in \mathbb{R}$ . Allora

$$|\mu|f(x) = |\mu f(x)| = |Af(x)| = \left| \sum_{y \in V} A_{xy}f(y) \right| \leq \sum_{y \in V} A_{xy}|f(y)| \leq f(x) \sum_{y \in V} A_{xy} = kf(x).$$

Quindi  $|\mu| \leq k$ , il che prova i punti (i) e (ii) dell'enunciato.

Sia ora  $0 \neq f$  un autovettore relativo a  $k$  e, come prima, sia  $x \in V$  tale che  $|f(x)|$  è massimo. Allora

$$kf(x) = Af(x) = \sum_{y \in V} A_{xy}f(y) = \sum_{y \sim x} A_{xy}f(y). \quad (7.4)$$

Dunque

$$f(x) = \sum_{y \sim x} \frac{A_{xy}}{k} f(y).$$

Poiché, per ogni  $y \sim x$ ,  $0 < A_{xy}/k \leq 1$  e  $\sum_{y \sim x} A_{xy}/k = 1$ , l'uguaglianza (7.4) ci dice che il numero complesso  $f(x)$  appartiene all'involuppo convesso dei punti  $f(y)$  con  $y \sim x$ . Poiché ognuno di questi punti è contenuto nel cerchio di raggio  $f(x)$ , la sola possibilità è che  $f(y) = f(x)$  per ogni  $y \sim x$ . Quindi,  $f$  è costante sulle componenti connesse di  $\Gamma$ . Pertanto, se  $\Gamma$  è connesso, l'autospazio di  $A$  relativo a  $k$  consiste in tutte e sole le applicazioni costanti su  $V$ , ed ha dunque dimensione 1. Ne segue che la molteplicità di  $k$  come autovalore di  $A$  è 1, ovvero che  $k = \mu_0 > \mu_1$ .

Se  $\Gamma$  non è connesso, sia  $U$  l'insieme dei vertici di una sua componente connessa e definiamo  $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$  ponendo, per ogni  $x \in V$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \in V \setminus U \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in U \\ 1 & \text{se } x \in V \setminus U \end{cases}$$

Allora,  $f$  e  $g$  sono elementi indipendenti di  $\mathcal{C}(\Gamma)$  e, come si verifica facilmente, autovettori di  $A$  relativi a  $k$ . Quindi la molteplicità di  $\mu_0 = k$  è almeno 2 e pertanto  $\mu_0 = \mu_1$  ■

Abbiamo visto che, per la matrice di adiacenza del ciclo  $C_n$ , l'autovalore  $-2$  (ovvero l'opposto della valenza  $k$ , che in questo caso, è 2) occorre se e solo se  $n$  è pari; ovvero nei casi in cui  $C_n$  è bipartito. Il prossimo Teorema descrive proprio questa situazione.

**Teorema 7.5.** *Sia  $\Gamma$  un grafo  $k$ -regolare e connesso. Allora sono equivalenti*

- (i)  $\Gamma$  è bipartito;
- (ii) lo spettro di  $A(\Gamma)$  è simmetrico rispetto a 0;
- (iii)  $\mu_{n-1} = -k$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sia  $\Gamma$  un grafo bipartito, e sia  $V = V_1 \cup V_2$  una bipartizione dell'insieme dei vertici di  $\Gamma$  (ciò significa che  $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , ed ogni arco di  $\Gamma$  ha uno degli estremi in  $V_1$  e l'altro in  $V_2$ ). Sia  $\mu$  un autovalore di  $A = A(\Gamma)$  e sia  $0 \neq f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  un autovettore relativo a  $\mu$ ; quindi  $Af = \mu f$ . Definiamo  $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$  ponendo, per ogni  $x \in V$ ,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V_1 \\ -f(x) & \text{se } x \in V_2 \end{cases}$$

Allora  $g \neq 0$ . Se  $x \in V_1$ , allora  $y \sim x \Rightarrow y \in V_2$ , e si ha

$$Ag(x) = \sum_{y \sim x} A_{xy}g(y) = \sum_{y \sim x} A_{xy}(-f(y)) = -Af(x) = -\mu f(x) = -\mu g(x).$$

Analogamente, si vede che se  $x \in V_2$  allora  $Ag(x) = Af(x) = \mu f(x) = -\mu g(x)$ . Pertanto,  $Ag = -\mu g$ , il che prova che  $-\mu$  è un autovalore di  $A$ , e dunque che (ii) è soddisfatta.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Poiché dal Teorema 7.4 segue che  $k = \mu_0$  è autovalore di  $A$  con il massimo modulo, da (ii) segue che  $-k$  è un autovalore di  $A$ , e quindi che  $\mu_{n-1} = -k$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Assumiamo che  $-k$  sia un autovalore di  $A$ ; sia  $0 \neq f$  un autovettore relativo a  $-k$  e sia  $x \in V$  tale che  $|f(x)|$  è massimo. Come nella dimostrazione del punto (i) del Teorema 7.4, possiamo assumere che  $0 < f(x) \in \mathbb{R}$ . Poniamo  $V_1 = \{y \in V \mid f(y) = f(x)\}$ ,  $V_2 = \{y \in V \mid f(y) = -f(x)\}$ , e proviamo che  $V_1 \cup V_2$  è una bipartizione di  $V$ . Chiaramente,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Poiché  $\Gamma$  è connesso, per ogni  $y \in V$  è definita la distanza  $d_\Gamma(x, y) = d_y$ . Procedendo per induzione su  $d_y$  proviamo che  $y \in V_1$  se  $d_y$  è pari, mentre  $y \in V_2$  se  $d_y$  è dispari. Infatti,

$$|f(x)| = f(x) = -\frac{1}{k}Af(x) = -\frac{1}{k} \sum_{y \sim x} A_{xy}f(y) = \sum_{y \sim x} \frac{A_{xy}}{k}(-f(y)),$$

e quindi, come nella dimostrazione del punto (ii) di 7.4,  $f(y) = -f(x) < 0$  per ogni  $V \ni y \sim x$ . Pertanto,  $\{y \in V \mid d_y = 1\} \subseteq V_2$ . Questo stesso argomento fornisce il metodo per provare il passo induttivo, e quindi la correttezza dell'affermazione fatta sopra. Ne segue che  $V_1 \cup V_2 = V$  è una bipartizione di  $V$ . ■

**L'operatore di Laplace.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un (multi)grafo con  $n$  vertici. Lo spazio  $\mathcal{C}(\Gamma)$  è dotato del prodotto scalare hermitiano standard

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in V} f(x)\overline{g(x)}.$$

per ogni  $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$ .

Sia  $A$  la matrice di adiacenza di  $\Gamma$ , e  $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  il suo spettro. Poiché  $A$  è reale e simmetrica, l'operatore lineare su  $\mathcal{C}(\Gamma)$  ad essa associato è hermitiano, ovvero

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

per ogni  $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$ . Ciò implica, in particolare, che esiste una base ortonormale di  $\mathcal{C}(\Gamma)$  composta da autovettori di  $A$ . Quindi, ogni  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  si scrive in modo unico come  $f = f_0 + \dots + f_{n-1}$ , dove, per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $f_i$  è un autovettore relativo all'autovalore  $\mu_i$  di  $A$ , e  $\langle f_i, f_j \rangle = 0$  se  $i \neq j$ . Dunque  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \|f_i\|^2$ , e

$$\langle Af, f \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle Af_i, f_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \langle f_i, f_i \rangle.$$

Da ciò segue immediatamente la seguente utile osservazione.

**Lemma 7.6.** *Per ogni  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ,*

$$Q_A(f) := \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle} \in [\mu_{n-1}, \mu_0].$$

*Orientazioni.* I grafi possono essere visti come spazi topologici 1-dimensionali. La nozione di orientazione è, nel caso dei grafi, particolarmente semplice. Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo; un'orientazione di  $\Gamma$  è un ordinamento totale sull'insieme dei suoi vertici. Questo fornisce ad ogni arco di  $\Gamma$  un verso, nel senso che possiamo descrivere ogni arco  $e \in E$  come una coppia ordinata di vertici  $e = \{e_-, e_+\}$ , dove  $e_- < e_+$  sono gli estremi di  $e$ .

Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo sul quale sia stata fissata un'orientazione. La *matrice d'incidenza*  $B = B(\Gamma)$  è la matrice indicizzata su  $V \times E$  (quindi, se  $|E| = m$ , è una matrice  $n \times m$ ) dove, per ogni  $x \in V$  e ogni  $e \in E$ ,

$$B_{xe} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = e_+ \\ -1 & \text{se } x = e_- \\ 0 & \text{se } x \notin e \end{cases} \quad (7.5)$$

Analogamente per quanto fatto con i vertici, sia  $\mathcal{E}(\Gamma)$  il  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale ( $m$ -dimensionale) di tutte le applicazioni  $u : E \rightarrow \mathbb{C}$ . Allora  $B$  è la matrice dell'applicazione lineare

$$\delta : \mathcal{E}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma),$$

dove per ogni  $u \in \mathcal{E}(\Gamma)$ , ed ogni  $x \in V$ ,

$$\delta u(x) = \sum_{e \in E} B_{xe} u(e) = \sum_{x=e_+} u(e) - \sum_{x=e_-} u(e).$$

L'operatore trasposto  $\delta^* : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{E}(\Gamma)$  è associato dalla matrice trasposta  $B^T$ , ed è dato da, per ogni  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ , ed  $e \in E$ ,

$$\delta^* f(e) = \sum_{x \in V} B_{xe} f(x) = f(e_+) - f(e_-). \quad (7.6)$$

E sia ha, per ogni  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  ed ogni  $u \in \mathcal{E}(\Gamma)$ ,  $\langle f, \delta u \rangle = \langle \delta^* f, u \rangle$  (dove, ovviamente, il termine a destra è lo stesso prodotto hermitiano definito su  $\mathcal{E}(\Gamma)$ ).

Definiamo a questo punto la matrice  $D = D(\Gamma)$  come la matrice diagonale  $n \times n$ , i cui elementi (indicizzati sulle coppie di vertici di  $\Gamma$ ) sono

$$D_{xy} = \begin{cases} d_\Gamma(x) & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Lasciamo per esercizio la semplice dimostrazione del seguente fatto.

**Lemma 7.7.** *Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo orientato,  $B$  la matrice d'incidenza, e  $A$  la matrice di adiacenza di  $\Gamma$ . Allora*

$$BB^T = D - A.$$

L'operatore di Laplace del grafo  $\Gamma$  è l'operatore  $\Delta$  sullo spazio  $\mathcal{C}(\Gamma)$  la cui matrice è  $\Delta(\Gamma) = D - A$ . Tale operatore<sup>2</sup>, non dipende dalla scelta dell'orientamento di  $\Gamma$  e, per il Lemma 7.7, coincide con  $\delta\delta^*$ ; è un operatore reale, simmetrico, quindi hermitiano, e per esso valgono le considerazioni fatte in precedenza per  $A$ .

Quando il grafo  $\Gamma$  è  $k$ -regolare, la cosa assume un aspetto particolarmente accattivante: in tal caso, si ha  $D = kI_n$  e quindi, dal Lemma 7.7,  $\Delta = kI_n - A$ . Ne segue che lo spettro di  $\Delta$  è dato da,

$$k - \mu_{n-1} \geq \dots \geq k - \mu_1 \geq k - \mu_0 = 0. \quad (7.7)$$

Supponiamo, inoltre, che  $\Gamma$  sia connesso; allora l'autovalore 0 di  $\Delta$  ha molteplicità 1 e l'autospazio corrispondente coincide con l'autospazio di  $A$  relativo all'autovalore  $k$ , che, come abbiamo visto è lo spazio  $\mathcal{Z}$  delle funzioni costanti  $V \rightarrow \mathbb{C}$ . Abbiamo cioè il seguente fatto

**Lemma 7.8.** *Sia  $k \geq 2$  e sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo connesso  $k$ -regolare. Allora il nucleo dell'operatore di Laplace di  $\Gamma$  è costituito dalle funzioni costanti in  $\mathcal{C}(\Gamma)$ .*

Poiché  $\Delta$  è hermitiano, gli autovettori relativi agli altri autovalori di  $\Delta$  appartengono (sempre nel caso in cui  $\Gamma$  sia regolare e connesso) allo spazio ortogonale  $\mathcal{Z}^\perp$  di  $\mathcal{Z}$ , che, come si verifica immediatamente, è

$$\mathcal{Z}^\perp = \left\{ f \in \mathcal{C}(\Gamma) \mid \sum_{x \in V} f(x) = 0 \right\}.$$

Applicando all'operatore  $\Delta$  (ed agli elementi  $f \in \mathcal{Z}^\perp$ ) lo stesso argomento del Lemma (7.6) si conclude con la seguente proposizione.

**Proposizione 7.9.** *Sia  $k \geq 2$ ,  $\Gamma = (V, E)$  un grafo connesso  $k$ -regolare, e  $k = \mu_0 \geq \dots \mu_{n-1}$  lo spettro di  $A(\Gamma)$ . Sia  $\Delta$  l'operatore di Laplace di  $\Gamma$ . Allora per ogni  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$*

$$Q_\Delta(f) := \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\langle f, f \rangle} \in [0, k - \mu_{n-1}].$$

<sup>2</sup>Fissato l'orientamento su  $\Gamma$ , una funzione  $u \in \mathcal{E}(\Gamma)$  si può vedere come un'assegnazione di "flusso" ad ogni arco del grafo. L'operatore  $\delta$  rappresenta allora una versione discreta della *divergenza* in geometria differenziale. Similmente, l'operatore  $\delta^*$  (che misura la variazione di  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  lungo gli archi), si può vedere con la versione discreta del *gradiente*. Quindi la composizione  $\delta\delta^*$  (la divergenza del gradiente), rappresenta la versione discreta dell'usuale operatore di Laplace.

Inoltre, se  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  è tale che  $\sum_{x \in V} f(x) = 0$ ,

$$Q_{\Delta}(f) \geq k - \mu_1.$$

L'operatore di Laplace risulta molto utile per ricavare relazioni tra i valori dello spettro della matrice di adiacenza e i parametri del grafo. Vediamone un'applicazione al numero cromatico.

**Proposizione 7.10.** *Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo connesso  $k$ -regolare, e  $k = \mu_0 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  lo spettro di  $A(\Gamma)$ . Allora*

$$\chi(\Gamma) \geq 1 - \frac{k}{\mu_{n-1}}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\alpha = \alpha(\Gamma)$  l'indice di stabilità di  $\Gamma$ , sia  $U$  un sottoinsieme stabile di vertici di ordine  $\alpha$ , e sia  $\partial(U)$  l'insieme degli archi che hanno un estremo in  $U$  e l'altro in  $V \setminus U$  ( $\partial U$  è detto la *frontiera* di  $U$ ). Allora  $|\partial U| = k\alpha$ . Sia  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} n - \alpha & \text{se } x \in U \\ -\alpha & \text{se } x \in V \setminus U \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\langle f, f \rangle = \sum_{x \in V} f(x)^2 = (n - \alpha)^2 \alpha + \alpha^2 (n - \alpha) = n\alpha(n - \alpha).$$

Fissiamo ora un orientamento di  $\Gamma$ , in modo che ogni vertice di  $V \setminus U$  preceda tutti i vertici di  $U$ . Sia  $\delta^* : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{E}(\Gamma)$  l'applicazione lineare definita in (7.6). Allora, per ogni  $e \in E$ ,

$$\delta^* f(e) = f(e_+) - f(e_-) = \begin{cases} n & \text{se } e \in \partial U \\ 0 & \text{se } e \notin \partial U \end{cases}$$

Sia  $\Delta = \delta\delta^*$  l'operatore di Laplace di  $\Gamma$ . Allora,

$$\langle \Delta f, f \rangle = \langle \delta^* f, \delta^* f \rangle = \sum_{e \in E} (\delta^* f(e))^2 = n^2 |\partial U| = n^2 k\alpha$$

Applicando ora la Proposizione 7.9, si ricava

$$k - \mu_{n-1} \geq \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{n^2 k\alpha}{n\alpha(n - \alpha)},$$

da cui

$$\alpha(k - \mu_{n-1}) \leq -n\mu_{n-1}. \quad (7.8)$$

La tesi segue ora da (7.8) e dalla Proposizione 1.10. ■

### 7.3 Grafi fortemente regolari.

La matrice di adiacenza, e in particolare il suo spettro, forniscono metodi di approccio ai grafi che risultano particolarmente utili quando i grafi in questione hanno un elevato livello di simmetria. In questa sezione vediamo una classica applicazione dello spettro della matrice di adiacenza in tal senso.

**Grafi fortemente regolari.** Siano  $k, a, b$  numeri interi con  $k \geq 2$ ,  $a \geq 0$  e  $b \geq 1$ . Un grafo finito  $\Gamma$  si dice un grafo *fortemente regolare* (in inglese: strongly regular) con parametri  $(k, a, b)$  se  $\Gamma$  è  $k$ -regolare e non completo, e per ogni coppia  $x, y$  di vertici distinti di  $\Gamma$  il numero di vertici adiacenti sia ad  $x$  che a  $y$  è  $a$  se  $x \sim y$ , mentre è  $b$  se  $x \not\sim y$ .

Ad esempio, un ciclo  $C_n$  è fortemente regolare se e solo se  $n = 4$  o  $n = 5$ ; i parametri sono, rispettivamente nei due casi,  $(2, 0, 2)$  e  $(2, 0, 1)$ . Il grafo di Petersen è fortemente regolare con parametri  $(3, 0, 1)$ . un'altra classe di esempi sono i grafi completi bipartiti: per  $n \geq 2$ ,  $K_{n,n}$  è fortemente regolare con parametri  $(n, 0, n)$  (si veda l'esercizio 7.18).

Non è difficile verificare che se  $\Gamma$  è fortemente regolare, allora lo è anche il suo grafo complementare  $\bar{\Gamma}$ ; infatti, se  $(k, a, b)$  sono i parametri di  $\Gamma$  e  $n$  il numero dei suoi vertici, allora i parametri di  $\bar{\Gamma}$  sono  $(n - 1 - k, n - 2 - 2k + b, n - 2k + a)$  (lo si dimostri per esercizio).

Osserviamo anche che se un grafo fortemente regolare di parametri  $(k, a, b)$  non è connesso, allora necessariamente  $b = 0$ , il che a sua volta implica che tutte le componenti connesse di  $\Gamma$  sono grafi completi con lo stesso numero di vertici (dimostrazione per esercizio).

Sia  $\Gamma$  un grafo fortemente regolare con parametri  $(k, a, b)$  e  $n$  vertici. Fissato un vertice  $x$ , denotiamo con  $N$  l'insieme dei vertici adiacenti a  $x$  e con  $L$  quello dei vertici diversi da  $x$  e non adiacenti ad esso; allora  $|N| = k$  e  $|L| = n - 1 - k$ . Contiamo il numero  $\alpha(N, L)$  degli archi di  $\Gamma$  i cui estremi stanno uno in  $N$  e l'altro in  $L$ . Se  $y \in L$  allora il numero di archi con un estremo in  $y$  e l'altro in  $N$  è uguale al parametro  $b$ , quindi  $\alpha(N, L) = b|L| = b(n - 1 - k)$ . Dall'altra parte, se  $z \in N$  allora il numero di vertici in  $L$  adiacenti a  $z$  è uguale a  $k - a - 1$ , quindi  $\alpha(N, L) = |N|(k - a - 1) = k(k - a - 1)$ . Pertanto abbiamo il seguente

**Lemma 7.11.** *Sia  $\Gamma$  un grafo fortemente regolare con parametri  $(k, a, b)$  e  $n$  vertici. Allora*

$$k(k - a - 1) = b(n - 1 - k).$$

**Lo spettro di un grafo fortemente regolare.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo connesso fortemente regolare, con parametri  $(k, a, b)$  e  $n$  vertici; e sia  $A = A(\Gamma)$  la sua matrice di adiacenza. Poniamo  $B = A^2$ ; allora, per ogni  $x, y \in V$ ,  $B_{xy}$  è il numero di percorsi tra  $x$  e  $y$  di lunghezza 2. Ricordando che, se  $x, y \in V$ ,  $x \sim y$  significa che  $x$  e  $y$  sono adiacenti, abbiamo quindi

$$B_{xy} = \begin{cases} k & \text{se } x = y \\ a & \text{se } x \sim y \\ b & \text{se } x \neq y \text{ e } x \not\sim y \end{cases} \quad (7.9)$$

Pertanto

$$B = kI_n + aA + b(J_n - I_n - A) = bJ_n + (k - b)I_n + (a - b)A \quad (7.10)$$

dove  $J_n$  è la matrice in cui ogni elemento è 1. Ovvero (scrivendo  $I = I_n$  e  $J = J_n$ )

$$A^2 + (b - a)A - (k - b)I = bJ. \quad (7.11)$$

Poiché gli autovalori di  $J$  (che abbiamo già trovato in precedenza - vedi esempio (1) nella sezione 5.1) sono 0 (con molteplicità  $n-1$ ) e  $n$  (con molteplicità 1), da (7.11) segue che ogni autovalore  $\mu$  di  $A$  soddisfa

$$\mu^2 + (b-a)\mu - (k-b) \in \{0, nb\}. \quad (7.12)$$

Per il Teorema 7.4 il massimo di tali autovalori è  $k$ , che (vedi Lemma 7.11) corrisponde alla soluzione di  $x^2 + (b-a)x - (k-b) = bn$ ; l'altra eventuale soluzione non è ammissibile dato che  $bn$ , come autovalore di  $bJ_n$ , ha molteplicità 1. Quindi, gli altri autovalori di  $A$  sono le soluzioni di  $x^2 + (b-a)x - (k-b) = 0$  (che sono reali). Abbiamo pertanto dimostrato parte del seguente risultato.

**Teorema 7.12.** *Sia  $\Gamma$  un grafo connesso con  $n$  vertici, fortemente regolare con parametri  $(k, a, b)$ , e sia  $A = A(\Gamma)$  la sua matrice di adiacenza. Allora*

(1) *Gli autovalori diversi da  $k$  di  $A$  sono radici del polinomio*

$$x^2 + (b-a)x - (k-b). \quad (7.13)$$

*in particolare,  $A$  ha al più tre autovalori distinti;*

(2) *i valori*

$$\frac{1}{2} \left( (n-1) \pm \frac{2k + (n-1)(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 4(k-b)}} \right) \quad (7.14)$$

*sono numeri interi positivi;*

(3) *Gli autovalori di  $A$  sono numeri interi, oppure*

$$k = \frac{n-1}{2}, \quad a = \frac{n-5}{4}, \quad b = \frac{n-1}{4}. \quad (7.15)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Il punto (1) è già stato provato sopra. Vediamo il resto.

Siano  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  le due radici del polinomio (7.13) (che sono reali), e fissiamo gli indici in modo che  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ; quindi

$$\lambda_1 = \frac{(a-b) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{(a-b) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

dove  $\Delta = (a-b)^2 + 4(k-b)$ . Osserviamo anche che, poiché il loro prodotto è uguale a  $-(k-b) < 0$ , le due radici sono distinte ed hanno segno opposto. Denotiamo con  $m_1$  e  $m_2$  le molteplicità di  $\lambda_1$  e di  $\lambda_2$  come autovalori della matrice  $A$  (potrebbe darsi che una sola sia un autovalore per  $A$ , in tal caso assegneremo all'altra molteplicità 0). Poiché  $\Gamma$  è connesso, la molteplicità dell'autovalore  $k$  è 1; ora, è un fatto elementare di algebra lineare che la somma degli autovalori di  $A$  (con le molteplicità) coincida con la traccia di  $A$ , che è 0; dunque

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = n - 1 \\ m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = -k \end{cases} \quad (7.16)$$

Risolviendo nelle indeterminate  $m_1$  e  $m_2$ , si trovano i due valori del punto (2) dell'enunciato, che pertanto sono numeri interi positivi.

Proviamo il punto (3). Questa volta consideriamo il sistema nelle indeterminate  $\lambda_1, \lambda_2$ ,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = n - 1 \\ m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = -k \end{cases} \quad (7.17)$$

Se  $m_1 \neq m_2$ , tale sistema ammette una sola coppia di soluzioni  $\lambda_1, \lambda_2$ , che sono razionali. Poiché sono zeri di un polinomio monico a coefficienti interi, si conclude che  $\lambda_1, \lambda_2$ , sono numeri interi (e dividono  $k - b$ ).

Rimane il caso in cui  $m = m_1 = m_2$ . Allora  $m = (n - 1)/2$ , e da (7.17) segue che

$$\frac{2k}{n - 1} = b - a$$

è un numero intero positivo. Poiché  $0 < k < n - 1$  (se  $k = n - 1$ ,  $\Gamma$  è un grafo completo), si ha  $2k/(n - 1) = 1 = b - a$ , da cui  $k = (n - 1)/2$ . Ponendo  $b - a = 1$  in (7.12), e sostituendo  $\mu$  con  $k$ , si ricava

$$k^2 + k - k + b = bn$$

quindi  $b(n - 1) = k^2 = (n - 1)^2/4$ , da cui  $b = (n - 1)/4$ . Infine,  $a = b - 1 = (n - 5)/4$ . ■

I grafi fortemente regolari con parametri come in (7.15) (e i cui autovalori sono  $k, (-1 \pm \sqrt{n})/2$ , e possono non essere interi) sono chiamati *conference graphs*, e ne vedremo degli esempi nel prossimo capitolo.

### Grafi di Moore.

Un grafo connesso  $\Gamma$ ,  $k$ -regolare di diametro  $d$ , si dice *grafo di Moore* (di diametro  $d$ ) se

$$g(\Gamma) = 2d + 1$$

ovvero,  $\Gamma$  ha il massimo calibro possibile per un grafo di diametro  $d$  (vedi l'esercizio 1.19).

Per  $k = 2$  i grafi di Moore sono i cicli dispari  $C_{2d+1}$ .

Se  $k \geq 3$ , dal Corollario 7.2 e la Proposizione 7.3 segue che il numero di vertici di un grafo di Moore di valenza  $k$  e diametro  $d$  è

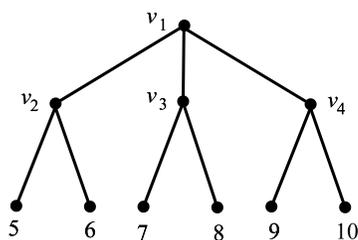
$$n = 1 + k \frac{(k - 1)^d - 1}{k - 2}.$$

Damerell, Bannai e Ito hanno provato che, per un diametro  $d \geq 3$ , l'unico grafo di Moore è il ciclo  $C_{2d+1}$ . Noi considereremo solo il caso (che è fondamentale) dei grafi di Moore di diametro 2; in tal caso, essendo il grafo  $k$ -regolare, il numero dei vertici è  $n = 1 + k^2$ . Chiaramente, il ciclo  $C_5$  è l'unico grafo di Moore con grado 2 e diametro 2. Il caso  $k = 3$  è meno banale, ma anch'esso non richiede strumenti particolarmente raffinati.

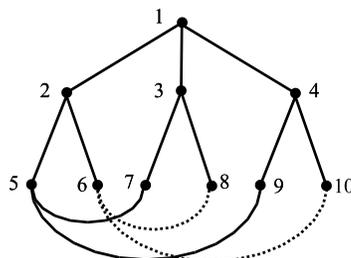
**Proposizione 7.13.** *Il grafo di Petersen è l'unico grafo di Moore cubico di diametro 2.*

**DIMOSTRAZIONE.** Il grafo di Petersen è un grafo cubico di diametro 2; e poiché ha  $10 = 3^2 + 1$  vertici, esso è un grafo di Moore.

Viceversa, sia  $\Gamma$  un grafo di Moore cubico di diametro 2; allora  $\Gamma$  ha 10 vertici, che denotiamo con  $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ , e ponendo che i vertici adiacenti al vertice  $v_1$  siano quelli denotati con  $v_2, v_3, v_4$ . Siccome  $\Gamma$  ha diametro 2, considerando anche tutti i vertici adiacenti a qualcuno dei vertici  $v_2, v_3, v_4$ , otteniamo tutti i vertici di  $\Gamma$ . Poiché ogni vertice  $v_2, v_3, v_4$  ha esattamente 2 vertici adiacenti diversi dal vertice  $v_1$ , e  $\Gamma$  ha 10 vertici si deduce che ogni vertice diverso da  $v_1, v_2, v_3, v_4$  è adiacente ad uno e uno solo dei vertici  $v_2, v_3, v_4$ . Abbiamo cioè la situazione illustrata dalla seguente figura.



Ora, poiché il vertice  $v_5$  ha distanza 2 sia da  $v_3$  che da  $v_4$ , si avrà che  $v_5$  è adiacente ad uno tra i vertici  $v_7, v_8$ , e ad uno tra  $v_9, v_{10}$ ; eventualmente cambiando gli indici, possiamo supporre che  $v_5$  sia adiacente a  $v_7$  e a  $v_9$ . Questo forza il vertice  $v_6$  ad essere adiacente a  $v_9$  e a  $v_{10}$ . Ora,  $v_7$  deve essere adiacente a  $v_9$  oppure a  $v_{10}$ ; siccome  $v_7$  deve avere distanza 2 da  $v_6$ , l'unica possibilità è che  $v_7$  sia adiacente a  $v_{10}$ ; conseguentemente,  $v_8$  è adiacente a  $v_9$ , e non vi siano altri lati in  $\Gamma$ .



A questo punto si verifica facilmente che  $\Gamma$  è isomorfo al grafo di Petersen. ■

Il risultato principale intorno ai grafi di Moore di diametro 2 è il seguente.

**Teorema 7.14.** *Se  $\Gamma$  è un grafo di Moore  $k$ -regolare di diametro 2, allora  $k = 2, 3, 7, 57$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Il ciclo  $C_5$  l'unico grafo di Moore 2-regolare con diametro 2. Sia quindi  $k \geq 3$ , e sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo di Moore  $k$ -regolare di diametro 2; allora  $\Gamma$  ha  $n = 1 + k^2$  vertici. Poiché  $\text{diam}(\Gamma) = 2$  e  $\Gamma$  non ha cicli di lunghezza  $\leq 4$ , si osserva che  $\Gamma$  è un grafo fortemente regolare con parametri  $(k, a, b) = (k, 0, 1)$ . Poniamo

$$d = \sqrt{(a-b)^2 + 4(k-b)} = \sqrt{4k-3},$$

la radice del discriminante del polinomio  $x^2 + x + (k - 1)$ , di cui sono radici gli autovalori  $\neq k$  della matrice di adiacenza di  $\Gamma$ . Per il punto (3) del Teorema 7.12,  $d$  è un intero positivo. Per il punto (2) del Teorema 7.12, tenendo conto che  $n - 1 = k^2$ ,

$$m = \frac{1}{2} \left( k^2 + \frac{2k - k^2}{d} \right) = \frac{k(kd - k + 2)}{2d}$$

è un numero intero. Sostituendo  $k = (d^2 + 3)/4$ , si ha

$$\frac{(d^2 + 3)(d^3 - d^2 + 3d + 5)}{16d} \in \mathbb{Z},$$

da cui segue che  $d$  divide 15, cioè  $d \in \{1, 3, 5, 15\}$ . Di conseguenza  $k = (d^2 + 3)/4 \geq 3$  appartiene a  $\{3, 7, 57\}$ . La dimostrazione è completa. ■

Come per  $k = 2, 3$ , si può provare che esiste un unico grafo di Moore, detto grafo di Hoffman–Singleton (dai nomi dei suoi scopritori), con valenza  $k = 7$  e diametro 2 (vedi esercizi 7.32, 7.33); mentre non è tuttora noto se esistano grafi di Moore di valenza  $k = 57$  e diametro 2 (un tale grafo, se esiste, ha 3250 vertici).

## 7.4 Expanders

In modo informale, con il termine *expander graphs* s'intendono grafi che siano al contempo "sparsi" e "altamente connessi". Proprio la congiunzione di questi requisiti, apparentemente poco compatibili, rende tali grafi (la cui semplice esistenza è forse già controintuitiva) interessanti e, soprattutto, estremamente utili in diversi campi di applicazione. I grafi expander sono stati introdotti da Bassalygo e Pinsker nei primi anni '70 e, da allora, oltre a rappresentare uno stimolante argomento di studio, hanno trovato impiego in diversi settori della matematica e dell'informatica teorica (combinatoria, analisi funzionale, meccanica statistica e probabilità, derandomizzazione, teoria dei codici, teoria della complessità, solo per citarne alcuni), oltre che, nella pratica, nel disegno esplicito di algoritmi e reti con elevato grado di efficienza.

Cercheremo di dare solo un'idea introduttiva della teoria astratta dei grafi expanders: per un quadro molto più ampio e approfondito, consiglio il sostanzioso articolo di Hoory, Linial e Wigderson (Bull. AMS, **43** (2006), 439–561).

**Parametro di espansione.** Il concetto di espansione (che è alla base della teoria dei grafi expanders) ha, come già detto, motivazioni e applicazioni in diversi ambiti; a me sembra però che il senso delle definizioni che stiamo per dare possa essere meglio intuito pensando ad un grafo come allo schema di una rete che distribuisca qualcosa, che sia al contempo economica (da qui la richiesta che il grafo sia sparso) ed efficiente, cioè capace di "diffondere" rapidamente (alta connettività). Un grafo è sparso se il numero di archi è piccolo rispetto a quello dei vertici. Naturalmente, si tratta di una definizione generica e non formale, il cui senso si comprende meglio pensando ad una famiglia  $(X_i)_{i \geq 0}$  di grafi di ordine crescente; diremo che tale famiglia è costituita da grafi sparsi se esiste una costante  $c$  tale che, per ogni  $X_i = (V_i, E_i)$ ,  $|E_i| \leq c|V_i|$ . Nella costruzione delle famiglie di expanders, questo requisito è ottenuto richiedendo che i grafi della famiglia siano  $k$ -regolari, per un fissato  $k \geq 2$ ).

Abbiamo già incontrato nozioni di “connettività” di un grafo: ad esempio (capitolo 3) come il minimo numero di archi che è necessario togliere dal grafo  $\Gamma$  per renderlo sconnesso. Questa misura è però ancora grossolana, può essere soggetta a perturbazioni locali, e non cattura compiutamente l’idea di capacità di diffusione. Infatti, più che assumere che occorra togliere un certo numero di archi per sconnettere il grafo in pezzi di cui non si ha alcun controllo, quello che sembra ragionevole richiedere è che per sconnettere il grafo in “pezzi grossi” occorra togliere molti più archi che per staccarne un pezzo piccolo.

Ora, se  $F$  è un sottoinsieme non vuoto dell’insieme  $V$  dei vertici del grafo  $\Gamma$ , gli archi che occorre togliere da  $\Gamma$  per staccare dal resto il sottografo indotto da  $F$ , sono chiaramente quelli che hanno un estremo in  $F$  e l’altro nel complementare  $V \setminus F$ . L’insieme di tali archi si chiama la *frontiera* di  $F$ , e si denota con  $\partial F$ ,

Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo (non necessariamente finito). Il *parametro di espansione* di  $\Gamma$  è definito da

$$h(\Gamma) = \inf \left\{ \frac{|\partial F|}{\min\{|F|, |V \setminus F|\}} \mid F \subseteq V, 0 < |F| < \infty \right\}. \quad (7.18)$$

Se  $V$  è finito (che è il caso che ci interessa) si ha chiaramente

$$h(\Gamma) = \inf \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} \mid F \subseteq V, 0 < |F| \leq |V|/2 \right\}. \quad (7.19)$$

**Esempi.** 1) Consideriamo il grafo completo  $K_n$  (con  $n \geq 3$ ). Se  $F \neq \emptyset$  è un sottoinsieme di  $m$  vertici (quindi  $1 \leq m \leq n$ ), allora  $|\partial F| = m(n - m)$  e quindi  $|\partial F|/|F| = n - m$ , da cui segue che

$$h(K_n) = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ (n+1)/2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

2) Esaminiamo ora il caso del ciclo  $C_n$  ( $n \geq 3$ ). Se  $F \neq \emptyset$  è un suo sottoinsieme di vertici con  $|F| \leq n/2$ , allora  $2 \leq |\partial F| \leq 2|F|$ , e il valore minimo di  $|\partial F|/|F|$  si ottiene prendendo come  $F$  un insieme di  $\lfloor n/2 \rfloor$  vertici consecutivi. Si ha dunque

$$h(C_n) = \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} = \begin{cases} 4/n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 4/(n-1) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

3) Un esempio un po’ più elaborato, ma sostanzialmente della stessa natura del precedente, è quello di una griglia quadrata. Fissato  $n \geq 2$ , sia  $V_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , l’insieme dei vertici, e ogni vertice  $(a, b)$  sia adiacente ai vertici  $(a \pm 1, b)$  e  $(a, b \pm 1)$  (ovviamente, la somma è modulo  $n$ ). Il grafo che si ottiene, che denotiamo con  $X_n$  è 4-regolare, e può essere rappresentato come l’insieme di punti e archi in un reticolo quadrato di lato  $n$ , con gli ovvi archi aggiuntivi sul perimetro. Supponiamo, per semplicità, che  $n$  sia pari, e consideriamo l’insieme  $F$  dei vertici delle prime  $n/2$  righe dal basso; quindi  $F = \{(a, b) \in V_n \mid 0 \leq b < n/2\}$ , e  $|F| = n^2/2$ . I soli vertici di  $F$  che sono adiacenti a qualche vertice del suo complementare sono quelli appartenenti alle due righe esterne di  $F$ , ed ognuno è incidente ad un solo arco che esce da  $F$ ; quindi  $|\partial F| = 2n$ . Dunque

$$h(X_n) \leq \frac{|\partial F|}{|F|} = \frac{2n}{n^2/2} = \frac{4}{n},$$

e, in particolare,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |h(X_n)| = 0$ .

**Teorema 7.15.** *Sia  $\Gamma$  un grafo connesso,  $k$ -regolare, con  $n$  vertici, e sia  $\mu_0 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  lo spettro della matrice di adiacenza di  $\Gamma$ . Allora*

$$h(\Gamma) \geq \frac{\mu_0 - \mu_1}{2} = \frac{k - \mu_1}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\Gamma = (V, E)$  come nelle ipotesi, e sia  $F$  un sottoinsieme non-vuoto di  $V$ . Definiamo  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  ponendo, per ogni  $x \in V$ ,

$$f(x) = \begin{cases} |V| - |F| & \text{se } x \in F \\ -|F| & \text{se } x \in V \setminus F \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\sum_{x \in V} f(x) = |F|(|V| - |F|) - |V \setminus F||F| = 0,$$

e dunque (con le notazioni della sezione 7.2),  $f \in \mathcal{Z}^\perp$ . Inoltre

$$\langle f, f \rangle = \sum_{x \in V} f(x)^2 = (|V| - |F|)^2|F| + |F|^2(|V| - |F|) = |V||F|(|V| - |F|). \quad (7.20)$$

Fissato un orientamento di  $\Gamma$ , sia  $\delta^* : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{E}(\Gamma)$  l'applicazione lineare definita in (7.6). Allora, per ogni  $e \in E$ ,

$$\delta^* f(e) = f(e_+) - f(e_-) = \begin{cases} \pm|V| & \text{se } e \in \partial F \\ 0 & \text{se } e \notin \partial F \end{cases} \quad (7.21)$$

Sia  $\Delta = \delta\delta^*$  l'operatore di Laplace di  $\Gamma$ . Allora, tenendo conto di (7.21)

$$\langle \Delta f, f \rangle = \langle \delta^* f, \delta^* f \rangle = \sum_{e \in E} (\delta^* f(e))^2 = |V|^2 |\partial F|.$$

Applicando ora la Proposizione 7.9, si ricava

$$k - \mu_1 \leq \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{|V|^2 |\partial F|}{|V||F|(|V| - |F|)} = \frac{|V| |\partial F|}{|F|(|V| - |F|)}. \quad (7.22)$$

Prendendo  $F$  tale che  $|F| \leq |V|/2$ , dalla (7.22) segue

$$\frac{|\partial F|}{|F|} \geq \frac{k - \mu_1}{2}.$$

da cui l'asserto. ■

Se  $\Gamma$  è un grafo connesso (e finito), il numero reale  $k - \mu_1$  (o, più in generale, senza assunzione di regolarità,  $\mu_0 - \mu_1$ ) è un parametro estremamente importante, e viene chiamato *intervallo spettrale principale* del grafo  $\Gamma$ . L'intervallo spettrale principale determina anche un limite superiore alla costante espansione di un grafo regolare. Si ha infatti il seguente risultato.

**Teorema 7.16.** *Sia  $\Gamma$  un grafo connesso e  $k$ -regolare. Allora*

$$h(\Gamma) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo finito, connesso,  $k$ -regolare con  $n$  vertici. Sia  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ; diciamo che  $f$  è non-negativa se  $0 \leq f(x) \in \mathbb{R}$  per ogni  $x \in V$ . La prima parte della dimostrazione consiste nel provare alcuni fatti relativi alle funzioni  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  non-negative. Fissiamo quindi  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ,  $f$  non-negativa. Siano  $b_0 < b_1 < \dots < b_r$  i valori distinti assunti da  $f$  su  $V$ , ordinati secondo l'ordine naturale. Scegliamo un'orientazione di  $\Gamma$  (cioè un ordinamento totale di  $V$ ) in modo che per ogni  $x, y \in V$  si abbia  $f(x) > f(y) \Rightarrow x \geq y$  (questo è certamente possibile farlo). Poniamo

$$R_f = \sum_{e \in E} [f(e_+)^2 - f(e_-)^2].$$

Per ogni  $i = 0, 1, \dots, r$  sia  $F_i = \{x \in V \mid f(x) \geq b_i\}$ . Il primo passo è provare la seguente uguaglianza.

$$R_f = \sum_{i=1}^r |\partial F_i| (b_i^2 - b_{i-1}^2) \quad (7.23)$$

(e  $R_f = 0$  se  $f$  è una costante). Denotiamo con  $E_f$  l'insieme degli archi che danno un effettivo contributo nella somma  $R_f$ , cioè (per come è stata scelta l'orientazione)

$$E_f = \{e \in E \mid f(e_+) > f(e_-)\}.$$

Quindi, per ogni  $i = 0, 1, \dots, r-1$ , si ha

$$\partial F_i \setminus \partial F_{i+1} = \{e \in E_f \mid f(e_+) = b_i\} \quad \text{e} \quad \partial F_{i+1} \setminus \partial F_i = \{e \in E_f \mid f(e_-) = b_i\}$$

Dunque

$$|\partial F_i| - |\partial F_{i+1}| = |\{e \in E_f \mid f(e_+) = b_i\}| - |\{e \in E_f \mid f(e_-) = b_i\}|.$$

Inoltre  $\partial F_1 = \{e \in E_f \mid f(e_-) = b_0\}$  e  $\partial F_r = \{e \in E_f \mid f(e_+) = b_r\}$ . Si ha pertanto

$$\begin{aligned} R_f &= \sum_{e \in E_f} [f(e_+)^2 - f(e_-)^2] = \sum_{e \in E_f} f(e_+)^2 - \sum_{e \in E_f} f(e_-)^2 = \\ &= |\partial F_r| b_r^2 - |\partial F_1| b_0^2 + \sum_{i=1}^{r-1} (|\partial F_i| - |\partial F_{i+1}|) b_i^2 = \sum_{i=1}^r |\partial F_i| b_i^2 - \sum_{i=0}^{r-1} |\partial F_{i+1}| b_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^r |\partial F_i| b_i^2 - \sum_{i=1}^r |\partial F_i| b_{i-1}^2 = \sum_{i=1}^r |\partial F_i| (b_i^2 - b_{i-1}^2) \end{aligned}$$

e l'uguaglianza (7.23) è provata.

Il secondo passo consiste nel provare (sempre assumendo  $f$  non-negativa) che

$$R_f^2 \leq 2k < \Delta f, f > < f, f >. \quad (7.24)$$

dove  $\Delta = kI_n - A(\Gamma)$  è l'operatore di Laplace di  $\Gamma$ . Infatti, applicando la formula di Cauchy-Schwartz e il fatto che per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  vale  $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ , si ha

$$R_f^2 = \left[ \sum_{e \in E} (f(e_+) - f(e_-))(f(e_+) + f(e_-)) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{e \in E} (f(e_+) - f(e_-))^2 \sum_{e \in E} (f(e_+) + f(e_-))^2 \\
&\leq 2 \langle \delta^* f, \delta^* f \rangle \sum_{e \in E} (f(e_+)^2 + f(e_-)^2) \\
&= 2 \langle \Delta f, f \rangle \cdot k \sum_{x \in V} f(x)^2 = 2k \langle \Delta f, f \rangle \langle f, f \rangle,
\end{aligned}$$

e anche la (7.24) è provata.

Sia  $\text{supp}(f) = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$ . Nel terzo passo proviamo che, se  $f$  è non-negativa,

$$|\text{supp}(f)| \leq |V|/2 \quad \Rightarrow \quad R_f \geq h(\Gamma) \langle f, f \rangle. \quad (7.25)$$

Se  $f$  è non-negativa e  $|\text{supp}(f)| \leq |V|/2$  allora, con le notazioni usate in precedenza,  $b_0 = 0$ , e per ogni  $i = 1, \dots, r$ ,  $|F_i| \leq |V|/2$ . Quindi, per  $i = 1, \dots, r$ ,  $|\partial F_i| \geq h(\Gamma)|F_i|$ . Dunque, applicando (7.23)

$$\begin{aligned}
R_f \geq h(\Gamma) \sum_{i=1}^r |F_i| (b_i^2 - b_{i-1}^2) &= h(\Gamma) \left\{ |F_r| b_r^2 - |F_1| b_0^2 + \sum_{i=1}^{r-1} |F_i \setminus F_{i-1}| b_i^2 \right\} \\
&= h(\Gamma) \sum_{x \in V} f(x)^2 = h(\Gamma) \langle f, f \rangle.
\end{aligned}$$

*Conclusion.* Sia  $0 \neq g \in \mathcal{C}(\Gamma)$  un autovettore per  $\Delta$  relativo all'autovalore  $k - \mu_1$ . Poiché  $\Delta$  e  $k - \mu_1$  sono reali, possiamo assumere che  $g$  sia a valori reali. Sia  $U = \{x \in V \mid g(x) > 0\}$ ; rimpiazzando eventualmente  $g$  con  $-g$ , possiamo supporre  $|U| \leq |V|/2$  (osserviamo che  $U \neq \emptyset$  perché - vedi il commento che segue il Lemma 7.8 -  $\sum_{x \in V} g(x) = 0$ ). Definiamo una funzione non-negativa  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  ponendo, per ogni  $x \in V$ ,  $f(x) = \max\{g(x), 0\}$ . Poiché  $g$  è negativa in  $V \setminus U$ , per ogni  $x \in U$  si ha

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= kf(x) - \sum_{x \sim y \in U} f(y) = kg(x) - \sum_{x \sim y \in U} g(y) \leq \\
&\leq kg(x) - \sum_{y \in V} g(y) = (kI_n - A)g(x) = \Delta g(x) = (k - \mu_1)g(x).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\langle \Delta f, f \rangle &= \sum_{x \in U} \Delta f(x) f(x) = \sum_{x \in U} \Delta f(x) g(x) \leq \\
&\leq (k - \mu_1) \sum_{x \in U} g(x)^2 = (k - \mu_1) \sum_{x \in U} f(x)^2 = (k - \mu_1) \langle f, f \rangle.
\end{aligned}$$

e pertanto  $\langle \Delta f, f \rangle \leq (k - \mu_1) \langle f, f \rangle$  .. Applicando (7.25) e (7.24) si ricava finalmente

$$h(\Gamma) \langle f, f \rangle \leq R_f \leq \sqrt{2k \langle \Delta f, f \rangle \langle f, f \rangle} \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)} \langle f, f \rangle$$

da cui (poiché  $\langle f, f \rangle \neq 0$ ) segue l'asserto del Teorema. ■

**Expanders.** Sia  $k \geq 3$ ; una famiglia infinita di grafi finiti  $\Gamma_n = (V_n, E_n)$ ,  $1 \leq n \in \mathbb{N}$  si dice una *famiglia di  $k$ -expanders* se

- $\Gamma_n$  è  $k$ -regolare per ogni  $n \geq 1$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$ ;
- esiste  $\epsilon > 0$  tale che  $h(\Gamma_n) \geq \epsilon$  per ogni  $n \geq 1$ .

Dato un grafo connesso e  $k$ -regolare  $\Gamma$ , denotiamo con  $\mu_1(\Gamma)$  il massimo autovalore di  $A(\Gamma)$  diverso da  $k$ . Dai Teoremi 7.15 e 7.16 segue immediatamente il seguente importante fatto.

**Corollario 7.17.** *Una famiglia di grafi connessi  $k$ -regolari  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$ , è una famiglia di  $k$ -expanders se e solo se esiste un numero reale  $\epsilon > 0$  tale che  $k - \mu_1(\Gamma_n) \geq \epsilon$  per ogni  $n \geq 1$ .*

La costruzione esplicita di famiglie di expanders, è una questione di grande interesse, anche in considerazione delle importanti applicazioni in vari settori dell'informatica. I primi esempi di famiglie infinite di 4-expanders sono dovuti a Margulis (1973); in seguito diversi altri metodi per costruire famiglie di expanders sono stati trovati.

Si capisce che una famiglia  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  di  $k$ -expanders sarà tanto più pregiata quanto maggiore è il limite inferiore delle costanti  $h(\Gamma_n)$ . Si può provare che questo, asintoticamente, non può essere molto grande. Sussiste infatti il seguente risultato (che non dimostriamo).

**Teorema 7.18.** *Sia  $k \geq 2$ , e sia  $\Gamma_n = (V_n, E_n)$ ,  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ , una famiglia di grafi connessi,  $k$ -regolari, tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$ . Allora*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_1(\Gamma_n) \geq 2\sqrt{k-1}.$$

Sia  $k \geq 3$ . Un grafo finito connesso e  $k$ -regolare  $\Gamma$  si dice un *grafo di Ramanujan* se ogni autovalore  $\mu \neq \pm k$  della sua matrice di adiacenza soddisfa  $\mu \leq 2\sqrt{k-1}$ . Il Teorema 7.18 ci dice che le famiglie di  $k$ -expanders teoricamente più efficienti sono quelle (se esistono) costituite da grafi di Ramanujan.

Negli ultimi anni, famiglie infinite di grafi  $k$ -regolari di Ramanujan sono state costruite per  $k = 3$  e  $k = q + 1$  dove  $q$  è una potenza di un numero primo dispari<sup>3</sup>. La costruzione esplicita di famiglie infinite di grafi di Ramanujan per un  $k \geq 3$  arbitrario è ancora una questione aperta. Alcuni anni fa, è stato provato da Friedman che, per ogni  $k \geq 3$  e  $\epsilon > 0$ , la probabilità che per un grafo connesso  $k$ -regolare  $\Gamma$ ,  $\mu_1(\Gamma) \leq 2\sqrt{k-1} + \epsilon$  (e quindi che  $\Gamma$  sia di Ramanujan) tende ad 1 quando il numero di vertici di  $\Gamma$  tende ad infinito. Ancora più di recente, è stato dimostrato, mediante lavori di diversi autori, che esistono  $k \geq 3$  e  $\epsilon > 0$  con la proprietà che per tutti i gruppi semplici finiti è possibile determinare un sistema di  $k$  generatori tale che per il grafo di Cayley corrispondente si ha  $k - \mu_1 \geq \epsilon$ .

## 7.5 Esercizi e complementi.

**Esercizio 7.1.** Avvalendosi di una opportuna variante del Lemma 7.1, si provi che il Corollario 7.2 sussiste sostituendo l'ipotesi che  $G$  sia regolare con quella che  $d$  sia il massimo fra i gradi dei vertici di  $G$ . Si osservi poi che l'eguaglianza nell'enunciato si può verificare solo nel caso di grafi regolari.

<sup>3</sup>Per una trattazione nel caso  $k = p + 1$  ( $p$  un primo dispari) si veda il testo: G. Davidoff, P. Sarnak, A. Valette, *Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs*, London Mathematical Society Student Texts 55, 2003

**Esercizio 7.2.** Sia  $G$  un grafo  $d$ -regolare, di diametro  $q$  e  $1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}$  vertici. Si provi che per ogni coppia di vertici  $x, y$  esiste in  $G$  uno ed un unico cammino che congiunge  $x$  a  $y$  la cui lunghezza è minore o uguale a  $q$ . Si provi quindi che  $g(G) = 2d + 1$  (grafi di questo tipo sono detti grafi di Moore, e torneremo diffusamente su di essi più avanti).

**Esercizio 7.3.** Si provi che  $K_{3,3}$  è l'unica gabbia cubica di calibro 4. Si provi che il grafo di Petersen è l'unica gabbia cubica di calibro 5.

**Esercizio 7.4.** Si provi che il grafo di Heawood è l'unica gabbia cubica di calibro 6.

**Esercizio 7.5.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo regolare su  $n$  vertici, e sia  $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$  lo spettro della sua matrice di adiacenza. Si descriva (in funzione di quello di  $\Gamma$ ) lo spettro della matrice di adiacenza del grafo complementare  $\bar{\Gamma}$ .

**Esercizio 7.6.** Si dimostri il Lemma 7.7.

**Esercizio 7.7.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo semplice con  $|V| = n$ , e sia  $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  lo spettro della matrice di adiacenza  $A(\Gamma)$ . Si provi che  $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i = 0$ , e che  $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i^2 = 2|E|$ .

**Esercizio 7.8.** Sia  $\Gamma$  un grafo  $k$ -regolare. Si provi che la molteplicità di  $k$  come autovalore di  $A(\Gamma)$  è uguale al numero di componenti connesse di  $\Gamma$ .

**Esercizio 7.9.** Si determini lo spettro della matrice di adiacenza del grafo del cubo.

**Esercizio 7.10.** Dato  $n \geq 2$ , si determini lo spettro della matrice di adiacenza del grafo completo bipartito  $K_{n,n}$ .

**Esercizio 7.11.** Sia  $\Gamma$  un grafo. Una passeggiata in  $\Gamma$  di lunghezza  $t \geq 0$ , è una successione  $x_0, x_1, \dots, x_t$  di vertici consecutivamente adiacenti. Sia  $A$  la matrice di adiacenza di  $\Gamma$ . Si provi che, per ogni  $t \geq 0$  e ogni coppia  $x, y$  di vertici,  $(A^t)_{xy}$  è uguale al numero di passeggiate di lunghezza  $t$  il cui primo e ultimo vertice sono, rispettivamente,  $x$  e  $y$ .

**Esercizio 7.12.** Sia  $\Gamma$  un grafo connesso finito e denotiamo con  $\Delta(\Gamma)$  il massimo tra i gradi dei suoi vertici. Sia  $A = A(\Gamma)$  la sua matrice di adiacenza. Si provi che per ogni autovalore  $\mu$  di  $A$  si ha  $|\mu| \leq \Delta(\Gamma)$ . Si provi quindi che  $\Delta(\Gamma)$  è un autovalore di  $A$  se e solo se  $\Gamma$  è regolare.

**Esercizio 7.13.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo, e sia  $\alpha : V \rightarrow V$  una permutazione dei vertici che induce un isomorfismo di  $\Gamma$ . Per ogni  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$  sia  $f^\alpha \in \mathcal{C}(\Gamma)$  definita da  $f^\alpha(x) = f(\alpha^{-1}(x))$ , per ogni  $x \in V$ . Si provi che se  $f$  è un autovettore di  $A(\Gamma)$  allora  $f^\alpha$  è autovettore relativo allo stesso autovalore.

**Esercizio 7.14.** Usando la tecnica della dimostrazione del Teorema 7.14 si determini lo spettro della matrice di adiacenza del grafo di Petersen.

**Esercizio 7.15.** Per  $n \geq 2$ , sia  $A_n = A(Q_n)$  la matrice di adiacenza del cubo  $Q_n$ . Si provi che, per ogni  $n \geq 2$ , e considerato un opportuno ordinamento dei vertici di  $Q_{n+1}$  si ha

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 7.16.** Procedendo per induzione su  $n \geq 2$ , si provi che gli autovalori di  $A(Q_n)$  sono tutti e soli del tipo  $n - 2t$ , con  $t \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq t \leq n$ ; e che la molteplicità dell'autovalore  $n - 2t$  è  $\binom{n}{t}$ . [Si osservi che se  $A, M, P$  sono matrici quadrate con  $P$  invertibile,  $M$  diagonale e  $PA = MP$ , allora

$$\begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M+I & 0 \\ I & M-I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$$

(dove  $I$  è la matrice identica), e si applichi l'esercizio precedente].

**Esercizio 7.17.** Sia  $\Gamma$  un grafo  $k$ -regolare e fortemente regolare. Si provi che se  $\Gamma$  non è connesso allora è isomorfo all'unione disgiunta di copie del grafo completo  $K_{k+1}$ .

**Esercizio 7.18.** Si descrivano i grafi fortemente regolari per i quali  $a = k - 1$ , e quelli per i quali  $b = k$ .

**Esercizio 7.19.** Quali sono i grafi bipartiti fortemente regolari?

**Esercizio 7.20.** Sia  $p$  un numero primo, e sia  $\Gamma$  un grafo fortemente regolare con  $p$  vertici. Si provi  $\Gamma$  è un conference graph (vedi la definizione al termine della dimostrazione del Teorema 7.12).

**Esercizio 7.21.** Sia  $\Gamma$  un grafo connesso, con diametro  $d$  e tale che  $g(\Gamma) = 2d + 1$ . Si provi che  $\Gamma$  è regolare.

**Esercizio 7.22.** Si provi che il grafo di Petersen è fortemente regolare e che in generale, i grafi di Kneser  $K(n, 2)$  sono fortemente regolari. In tali casi determinare gli autovalori della matrice di adiacenza.

**Esercizio 7.23.** Sia  $n \geq 2$ ; si provi che i line-graph dei grafi completi  $K_n$  e  $K_{n,n}$  sono fortemente regolari.

**Esercizio 7.24.** Si provi che un grafo regolare connesso e non completo  $\Gamma$  è fortemente regolare se e solo  $A(\Gamma)$  ha esattamente tre autovalori distinti.

**Esercizio 7.25.** Si provi che, per ogni  $n \geq 2$ ,  $h(Q_n) = 1$ .

**Esercizio 7.26.** Sia  $P$  il grafo di Petersen; si provi che  $h(P) = (k - \mu_1)/2$ . Si verifichi che lo stesso vale per il grafo bipartito completo  $K_{n,n}$  con  $n$  pari.

**Esercizio 7.27.** Per ogni  $n \geq 2$  si determini la costante di espansione del grafo bipartito completo  $K_{n,n}$ . [Si distinguano i casi  $n$  pari e  $n$  dispari]

**Esercizio 7.28.** Sia  $\Gamma$  un grafo connesso 3-regolare. Si provi che  $h(\Gamma) \leq 1$ .

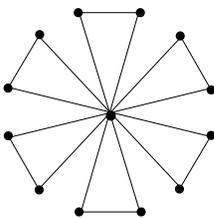
## Complementi.

1. *Mulini a vento.* In inglese lo chiamano "friendship theorem": in una società con un numero finito  $n \geq 4$  di persone ed in cui ogni coppia di membri ha un unico amico in comune esiste uno ed un solo membro che è amico di tutti.

**Esercizio 7.29.** Sia  $\Gamma$  un grafo finito con  $n$  vertici in cui per ogni coppia di vertici distinti  $x$  e  $y$  esiste un unico vertice che è adiacente sia ad  $x$  che a  $y$ . Si osservi che  $\Gamma$  non ha quadrati; si provi quindi che se  $x$  e  $y$  sono vertici non adiacenti allora  $d_\Gamma(x) = d_\Gamma(y)$ . Si provi poi che se non esiste alcun vertice di grado  $n - 1$  allora per ogni coppia di vertici esiste almeno un vertice che non è adiacente a nessuno dei due. Si concluda che  $\Gamma$  è regolare oppure ammette un vertice di grado  $n - 1$ .

**Esercizio 7.30.** Nelle stesse ipotesi su  $\Gamma$  provare, usando il metodo degli autovalori, che se  $\Gamma$  è regolare allora  $\Gamma$  è un triangolo. [Studiare il quadrato della matrice di adiacenza ...]

**Esercizio 7.31.** Nelle stesse ipotesi su  $\Gamma$  dell'esercizio 7.29, si provi che se  $\Gamma$  ammette un elemento di grado  $n - 1$ , allora  $\Gamma$  è un grafo del tipo "mulino a vento":



2. *Il grafo di Hoffman-Singleton.* A meno di isomorfismi, esiste un unico grafo di Moore di valenza 7 e diametro 2, detto grafo di Hoffman-Singleton; tale grafo ha 50 vertici e 175 archi. Ne esistono diverse costruzioni in letteratura; nei prossimi esercizi ne vediamo una classica.

**Esercizio 7.32.** Sia  $T$  l'insieme delle terne (sottoinsiemi di ordine 3) di  $\{1, 2, \dots, 7\}$ ; quindi  $|T| = 35$ . Si provi che se  $S \subseteq T$  è tale che  $|a \cap b| = 1$  per ogni  $a, b \in S$ , allora  $|S| \leq 7$ . Un sottoinsieme di ordine 7 di  $T$  con tale proprietà si chiama *settetto*; ad esempio

123 145 167 246 257 347 356.

Una *triade* in  $T$  è un insieme di tre elementi  $a, b, c$  di  $T$  tali che  $a \cap b = a \cap c = b \cap c$  ha ordine 1; ad esempio è una triade: 123, 145, 167. Si provi che il numero di triadi di  $T$  è 105; si provi quindi che ogni triade è contenuta in esattamente 2 settetti. Dedurre che il numero di settetti distinti di  $T$  è 30. L'azione su  $\{1, 2, \dots, 7\}$  del gruppo  $S_7$  si estende in modo naturale ad una azione di  $S_7$  su  $T$ , e di conseguenza sull'insieme dei settetti; si provi che tale ultima azione è transitiva.

**Esercizio 7.33.** Usiamo le notazioni dell'esercizio precedente. Si considera un'orbita del gruppo alterno  $A_7$  sull'insieme dei settetti di  $T$ . Tale orbita, che denotiamo con  $U$  contiene 15 settetti. Ad esempio, fissiamo l'orbita (dove i settetti sono le colonne):

123	123	123	124	127	125	125	124	124	125	127	127	126	126	126
145	157	147	135	136	136	134	137	136	137	135	134	137	135	134
167	146	156	167	145	147	167	156	157	146	146	156	145	147	157
247	245	246	236	246	234	246	235	237	236	234	236	234	237	235
256	267	257	257	235	267	237	267	256	247	256	245	257	245	247
357	356	345	347	347	357	356	346	345	345	367	357	356	346	367
346	347	367	456	567	456	457	457	467	567	457	467	467	567	456

Definiamo quindi il grafo  $\Gamma$  il cui insieme dei vertici è  $T \cup U$  e gli archi sono descritti dalle seguenti regole di adiacenza:

- se  $a, b \in T$ ,  $a \sim b \Leftrightarrow a \cap b = \emptyset$ ;
- se  $a \in T$  e  $\sigma \in U$ ,  $a \sim \sigma \Leftrightarrow a \in \sigma$ ;
- non ci sono archi tra gli elementi di  $U$ .

(si osservi quindi, che il sottografo di  $\Gamma$  indotto da  $T$  è il grafo di Kneser  $K(7, 3)$ ). Si dimostri che il grafo  $\Gamma$  così definito è un grafo di Moore di diametro 2 e valenza 7.

**Esercizio 7.34.** Si provi che il grafo di Kneser  $K(7, 3)$  ha numero cromatico 3. Si deduca che il grafo di Hoffman–Singleton ha numero cromatico 4.

**Esercizio 7.35.** (Un'altra costruzione, dovuta a Hafner a partire da una di Robertson) In questa costruzione, l'insieme dei vertici è l'insieme delle terne:  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . La relazione di adiacenza  $\sim$  è definita nel modo seguente:

- 1)  $(0, x, y) \sim (0, x', y')$  se e solo se  $x = x'$  e  $y - y' = \pm 1$
- 2)  $(1, m, c) \sim (1, m', c')$  se e solo se  $m = m'$  e  $c - c' = \pm 2$
- 3)  $(0, x, y) \sim (1, m, c)$  se e solo se  $y = mx + c$

dove i calcoli si intendono modulo 5. Si provi che il grafo così definito è 7-regolare con diametro 2, e che quindi è un grafo di Moore (per l'unicità è il grafo di Hoffman–Singleton).

## Capitolo 8

# Grafi e gruppi

In questo capitolo andiamo avanti assieme all'Algebra, introducendo alcune interazioni importanti tra grafi e gruppi. Anche se non andremo molto oltre le definizioni e semplici esempi, una certa familiarità con alcuni concetti di base di teoria dei gruppi è necessaria per la comprensione.

### 8.1 Automorfismi.

Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo. Ricordiamo che un *automorfismo* di  $\Gamma$  è una permutazione  $\beta$  dell'insieme  $V$  dei vertici di  $\Gamma$  tale che

$$\{x, y\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\beta(x), \beta(y)\} \in E.$$

L'insieme di tutti gli automorfismi di  $\Gamma$  forma un gruppo (rispetto all'operazione di composizione), detto il *gruppo degli automorfismi* di  $\Gamma$ , che denotiamo con  $Aut(\Gamma)$ .

Ad esempio, il gruppo degli automorfismi del grafo completo  $K_n$  è ovviamente isomorfo al gruppo simmetrico  $S_n$  di tutte le permutazioni dell'insieme dei vertici; mentre il gruppo degli automorfismi di un ciclo  $C_n$  è isomorfo al gruppo dei movimenti rigidi di un  $n$ -agone regolare, ed è pertanto isomorfo al gruppo diedrale con  $2n$  elementi. È chiaro che il gruppo degli automorfismi di un grafo induce un gruppo di permutazioni sull'insieme degli archi, e che se  $\beta$  è un automorfismo del grafo  $\Gamma$ , e  $u, v$  sono due vertici,  $d_\Gamma(u, v) = d_\Gamma(\beta(u), \beta(v))$ .

**Transitività.** Un grafo  $\Gamma = (V, E)$  si dice **vertex-transitivo** se  $Aut(\Gamma)$  è transitivo sull'insieme dei vertici di  $\Gamma$ , ovvero se per ogni  $x, y \in V$  esiste  $\beta \in Aut(\Gamma)$  tale che  $\beta(x) = y$ .

Un grafo  $\Gamma = (V, E)$  si dice **edge-transitivo** se  $Aut(\Gamma)$  induce un gruppo di permutazioni transitivo sull'insieme  $E$  degli archi di  $\Gamma$ , ovvero se per ogni  $e = \{x, y\}, e' = \{x', y'\} \in E$ , esiste  $\beta \in Aut(\Gamma)$  tale che  $\{x', y'\} = \{\beta(x), \beta(y)\}$ .

I grafi completi e i grafi ciclici sono sia vertex-transitivi che edge-transitivi; altri esempi che soddisfano entrambe le proprietà sono i grafi dei poliedri regolari ed il grafo di Petersen (vedi esercizio 8.1). Chiaramente, ogni grafo vertex-transitivo è regolare; cosa che non vale per grafi edge-transitivi: ad esempio la stella  $\Sigma_n$  è edge-transitiva (il suo gruppo degli automorfismi

coincide col gruppo delle permutazioni  $S_n$  dei raggi) ma non è un grafo regolare, e quindi nemmeno vertex-transitivo.

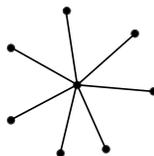


Figura 8.1: La stella  $\Sigma_7$

Altri esempi di grafi edge-transitivi ma non vertex-transitivi sono i grafi completi bipartiti  $K_{n,m}$  con  $n \neq m$  ( $K_{n,n}$  è sia edge- che vertex-transitivo); esistono anche esempi di grafi regolari edge- ma non vertex-transitivi, ma sono meno semplici da descrivere: il più piccolo è il grafo di Folkman (figura 8.2); si può dimostrare - vedi esercizio 8.2 - che un grafo edge-transitivo ma non vertex-transitivo è necessariamente bipartito. Il grafo della figura 1.15 è invece un esempio di grafo vertex-transitivo che non è edge-transitivo (lo si dimostri). Una fondamentale classe di grafi vertex-transitivi (i grafi di Cayley) saranno descritti nella prossima sezione.

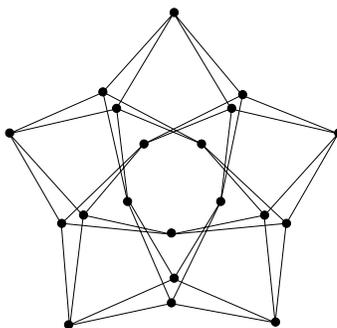


Figura 8.2: Il grafo di Folkman

Menzioniamo un'interessante (e difficile) questione tuttora aperta (Lovasz 1970): è vero che ogni grafo connesso vertex-transitivo ammette un cammino hamiltoniano? (in effetti, sono noti solo 5 grafi - tra cui il grafo di Petersen - che sono vertex-transitivi e privi di un ciclo hamiltoniano). Il seguente risultato è dovuto a Babai (il quale ha formulato la seguente congettura che implica una risposta fortemente negativa alla questione di Lovasz: esiste una costante assoluta  $c > 0$  tale che esistono infiniti grafi vertex-transitivi  $\Gamma$  privi di cicli di lunghezza superiore a  $(1 - c)|V(\Gamma)|$ ).

**Teorema 8.1.** *Un grafo connesso vertex-transitivo con  $n$  vertici ammette un ciclo di lunghezza almeno  $\sqrt{3n}$ .*

Per la dimostrazione, della quale ci limitiamo a dare una traccia (ricorrendo anche ad alcuni esercizi), è utile il seguente Lemma.

**Lemma 8.2.** *Sia  $G$  un gruppo di permutazioni transitivo dell'insieme  $X$ , con  $|X| = n$ ; sia  $U \subseteq X$  e  $c = \min\{|U \cap U^g| \mid g \in G\}$ . Allora  $|U| \geq \sqrt{cn}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$\Omega := \{(u, g) \in U \times G \mid u \in U \cap U^g\},$$

e calcoliamo la sua cardinalità col metodo del doppio conteggio.

Fissato  $g \in G$  e posto  $\Omega_g := \Omega \cap (U \times \{g\})$ , si ha subito che  $\Omega_g = (U \cap U^g) \times \{g\}$ , quindi  $|\Omega_g| = |U \cap U^g|$ ; pertanto

$$|\Omega| = \left| \bigsqcup_{g \in G} \Omega_g \right| = \sum_{g \in G} |U \cap U^g| \geq |G| \cdot c.$$

D'altro canto fissato  $u \in U$  e detto  $\Omega_u := \Omega \cap (\{u\} \times G)$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} |\Omega_u| &= |\{g \in G \mid (u, g) \in \Omega\}| \\ &= |\{g \in G \mid u \in U \cap U^g\}| \\ &= |\{g \in G \mid u^{g^{-1}} \in U\}|. \end{aligned}$$

Detto  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , osserviamo che

$$|\Omega_u| = \sum_{j=1}^k |\{g \in G \mid u^{g^{-1}} = u_j\}| = \sum_{j=1}^k |\{x^{-1} \in G \mid u^x = u_j\}|.$$

Lasciamo come facile esercizio mostrare che l'insieme degli elementi di  $G$  che mandano  $u$  in  $u_j$  coincide con la classe laterale  $G_u g_j$ , dove  $G_u$  è lo stabilizzatore di  $u$  in  $G$ , e  $g_j$  è un arbitrario elemento di  $G$  (la cui esistenza è garantita dal fatto che  $G$  è transitivo su  $X$ ) tale che  $u^{g_j} = u_j$ . Ne segue che

$$|\Omega_u| = \sum_{j=1}^k |G_u g_j| = \sum_{j=1}^k |G_u| = \sum_{j=1}^k |G|/n = k|G|/n = |U||G|/n,$$

poiché  $|G_u| = |G|/n$ , essendo  $G$  è transitivo su  $X$ .

Si deduce quindi che

$$\Omega = \sum_{u \in U} |\Omega_u| = \sum_{u \in U} |U||G|/n = |U|^2 |G|/n.$$

Dal confronto delle due formule si ricava

$$|U|^2 |G|/n \geq |G| \cdot c,$$

da cui la tesi. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 8.1. Sia  $\Gamma$  un grafo connesso e vertex-transitivo con  $n$  vertici. Se il grado  $k$  dei vertici di  $\Gamma$  è 2,  $\Gamma$  è un ciclo e non c'è nulla da provare. Supponiamo quindi  $k \geq 3$ ; allora  $\Gamma$  è 3-connesso (questo si può provare, ma lo diamo per buono). Sia  $\mathcal{C}$  l'insieme

dei vertici di un ciclo di lunghezza massima di  $\Gamma$ . Allora, per ogni  $\beta \in \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $|\mathcal{C} \cap \beta(\mathcal{C})| \geq 3$  (vedi l'esercizio 4.26). Quindi, per il Lemma 8.2 si conclude che  $|\mathcal{C}| \geq \sqrt{3n}$ , provando così il teorema. ■

**Grafi arc-transitivi.** Un'altra importante nozione è quella di grafo *arc-transitivo* (o *simmetrico*). Con ciò si intende un grafo  $\Gamma = (V, E)$  tale che  $\text{Aut}(\Gamma)$  opera transitivamente sull'insieme di tutte le coppie  $(x, e) \in V \times E$  con  $x$  estremo di  $e$ . Esempi di grafi arc-transitivi sono i grafi completi, il grafo di Petersen e il grafo di Heawood (figura 7.1). È chiaro che un grafo arc-transitivo è sia vertex- che edge-transitivo, ma il viceversa non vale: il più piccolo grafo vertex- e edge-transitivo ma non arc-transitivo è il cosiddetto grafo di Doyle (figura 8.3), che è 4-regolare con 27 vertici.

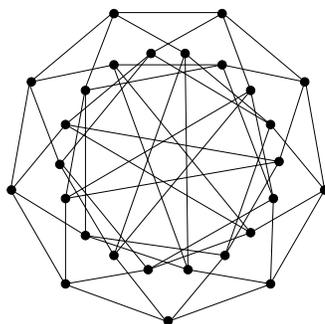


Figura 8.3: Il grafo di Doyle

**Grafi circolanti.** Un grafo  $\Gamma$  è detto *circolante* se  $\Gamma$  ha  $n$  vertici e  $\text{Aut}(\Gamma)$  contiene, visto come gruppo di permutazioni sull'insieme dei vertici  $\{1, 2, \dots, n\}$  di  $\Gamma$ , un ciclo di lunghezza  $n$ . Esempi di grafi circolanti sono, ovviamente, i cicli  $C_n$ , i grafi completi  $K_n$ , e i grafi completi bipartiti  $K_{n,n}$ ; un'altra importante classe di grafi circolanti (i grafi di Paley) la studieremo più avanti in questo capitolo. Dal fatto che, se  $p$  è un numero primo ogni sottogruppo transitivo del gruppo simmetrico  $S_p$  contiene un elemento la cui decomposizione in cicli è un ciclo di ordine  $p$ , segue la seguente osservazione.

**Proposizione 8.3.** *Un grafo con un numero primo di vertici è vertex-transitivo se e solo se è un grafo circolante.*

Per tali grafi è possibile descrivere in modo piuttosto chiaro l'intero gruppo degli automorfismi (cosa che in generale, anche per grafi vertex-transitivi, è piuttosto difficile): la tecnica la vedremo nell'esempio alla fine del capitolo. Menzioniamo anche il fatto che i grafi circolanti connessi sono hamiltoniani (vedi esercizi 8.10 e 8.11)

**Automorfismi di alberi.** Gli automorfismi degli alberi godono di alcune importanti proprietà, che dipendono in modo essenziale dalla mancanza di cicli, e che qui ci limitiamo a provare nel caso più semplice, quello di un albero finito.

**Teorema 8.4.** *Sia  $\Gamma$  un albero finito, e sia  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ . Allora  $G$  fissa almeno un vertice o un arco di  $\Gamma$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo per induzione sul numero  $n$  di vertici di  $\Gamma$ ; se  $n = 1, 2$  l'affermazione è ovvia (osservando che  $\Gamma$  è per ipotesi connesso, quindi se  $n = 2$ ,  $\Gamma$  è costituito da un solo arco). Sia dunque  $n \geq 3$ . Per il Lemma 1.4 esiste un vertice  $x$  di  $\Gamma$  di grado 1. Se  $x$  è fissato da  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  siamo a posto. Altrimenti, sia  $S$  l'orbita di  $x$  mediante  $G$  (cioè,  $S = \{\alpha(x) \mid \alpha \in G\}$ ),  $s = |S|$  e  $\Delta = \Gamma - S$ . Ogni vertice in  $S$  ha grado 1 in  $\Gamma$ , quindi, poiché  $n > 2$ , elementi di  $S$  non possono essere adiacenti in  $\Gamma$ ; ne segue che  $\Delta$  non è vuoto che il numero di archi di  $\Delta$  è  $(n-1) - s$  (dato che  $n-1$  è il numero di archi di  $\Gamma$ ). Poiché  $\Delta$  è chiaramente una foresta ed ha  $n-s$  vertici; dal Corollario 3.2 segue che  $\Delta$  è connesso e quindi è un albero. Ora ogni automorfismo  $\alpha$  di  $\Gamma$  induce, mediante restrizione, un automorfismo  $\alpha|_{\Delta}$  di  $\Delta$ . Quindi  $H = \{\alpha|_{\Delta} \mid \alpha \in G\} \subseteq \text{Aut}(\Delta)$ ; e dunque, per ipotesi induttiva, esiste almeno un vertice o un arco di  $\Delta$  che sono fissati da  $H$  e dunque da  $G$ . ■

Questo risultato è solo un caso particolare di teoremi di punto fisso più generali, rinvenibili soprattutto in topologia algebrica (un albero finito può essere inteso come un complesso 1-dimensionale connesso). Esso, tuttavia, non vale per alberi infiniti: sia, ad esempio,  $\Gamma$  l'albero il cui insieme dei vertici è l'insieme  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi e gli archi sono le coppie di interi consecutivi, allora la traslazione  $z \mapsto z+1$  induce un automorfismo di  $\Gamma$  che non fissa alcun vertice e alcun arco (si veda tuttavia l'esercizio 8.3).

## 8.2 Grafi di Cayley.

I grafi di Cayley costituiscono un'importante classe di grafi regolari (e anche, come vedremo, vertex-transitivi) la cui costruzione avviene a partire da un gruppo,

Sia  $G$  un gruppo, e sia  $S$  un sottoinsieme di  $G$  con le seguenti proprietà

(C1)  $1_G \notin S$ ;

(C2)  $S = S^{-1}$ .

Il **Grafo di Cayley**  $\Gamma[G, S]$  è il grafo il cui insieme dei vertici è  $G$ , e gli archi sono tutti i sottoinsiemi  $\{g, gs\}$ , al variare di  $g \in G$  ed  $s \in S$ .

Si osservi che la condizione (C1) su  $S$  serve a far sì che  $g \neq gs$ , per ogni  $g \in G$  ed  $s \in S$ , mentre la condizione (C2) serve a rendere simmetrica la relazione di adiacenza, poiché infatti  $\{g, gs\} = \{gs, (gs)s^{-1}\}$ .

Di fatto, se  $S$  è un sottoinsieme del gruppo  $G$  che non contiene  $1_G$ , daremo significato anche alla notazione  $\Gamma[G, S]$ , intendendo con ciò il grafo di Cayley definito da  $S \cup S^{-1}$ .

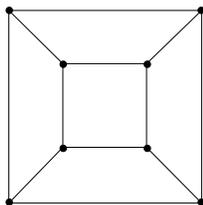
Prima di fare qualche esempio, ricordiamo che se  $X$  è un sottoinsieme di un gruppo  $G$ , il *sottogruppo generato* da  $X$ , che denotiamo con  $\langle X \rangle$ , è il minimo sottogruppo di  $G$  che contiene  $X$ . Si vede facilmente che, se  $X \neq \emptyset$ , allora  $\langle X \rangle$  consiste di tutti e soli i prodotti finiti del tipo  $x_1^{\epsilon_1} \cdots x_t^{\epsilon_t}$ , con  $x_i \in X$  e  $\epsilon_i \in \{+1, -1\}$ , per  $i = 1, \dots, t$  (con  $t$  che varia in  $\mathbb{N}$ ). Nel caso in cui  $X$  soddisfi la condizione (C2), allora non è necessario introdurre gli inversi mediante la scelta di  $i = -1$ , e si ha

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_t \mid t \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_t \in X\}.$$

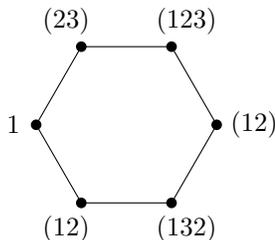
(dove diamo significato anche al prodotto di lunghezza  $t = 0$ , che è  $1_G$ ). In questa situazione è conveniente anche introdurre il concetto di lunghezza (o *peso*)  $\ell_X(g)$  di un elemento  $g \in \langle X \rangle$ ;

essa è il minimo  $t \geq 0$  tale che  $g$  si scrive come un prodotto di  $t$  elementi di  $X$ . In particolare,  $\ell_X(g) = 0 \Leftrightarrow g = 1_G$  e  $\ell_X(g) = 1 \Leftrightarrow g \in X$ .

**Esempi.** 1) Sia  $G$  il gruppo delle simmetrie di un quadrato; allora  $|G| = 8$  e  $G = \langle \rho, \tau \rangle$ , dove  $\rho$  è una rotazione di un angolo di  $\pi/2$  e  $\tau$  la una riflessione con asse una delle diagonali; si ha  $|\rho| = 4$ ,  $|\tau| = 2$  e, come si verifica subito,  $\tau\rho\tau = \rho^{-1}$  (di fatto,  $G$  è isomorfo al gruppo diedrale di ordine 8). Posto  $S = \{\rho, \rho^{-1}, \tau\}$ , si trova che il grafo di Cayley  $\Gamma[G, S]$  è isomorfo al grafo del cubo



2) Siano  $G = S_3$  il gruppo simmetrico su 3 punti, e  $S = \{(12), (23)\}$ ; il grafo di Cayley  $\Gamma[G, S]$  è un 6-ciclo (vedi figura).



Più in generale, si osserva facilmente che se  $x, y$  sono due involuzioni (cioè elementi di ordine 2) di un gruppo finito  $G$ , e  $G = \langle x, y \rangle$  (in questo caso un semplice argomento mostra che  $G$  è un gruppo diedrale), allora  $\Gamma[G, \{x, y\}]$  è un ciclo di lunghezza  $|G|$ .

3) Per  $n \geq 2$  sia  $G = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle$  il prodotto diretto di  $n$  gruppi ciclici di ordine 2 (in altri termini, è il gruppo additivo di uno spazio vettoriale  $n$ -dimensionale sul campo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). Posto  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ , il grafo di Cayley  $\Gamma[G, S]$  è isomorfo al  $n$ -ipercubo  $Q_n$  (esercizio 8.16).

**Proposizione 8.5.** *Sia  $G$  un gruppo finito ed  $S$  un sottoinsieme di  $G$  che soddisfa le condizioni (C1) e (C2); sia  $|S| = k$ . Allora*

- (1)  $\Gamma[G, S]$  è un grafo  $k$ -regolare;
- (2) il numero di componenti connesse di  $\Gamma[G, S]$  è uguale all'indice  $[G : \langle S \rangle]$ ; in particolare,  $\Gamma[G, S]$  è connesso se e solo se  $S$  è un sistema di generatori di  $G$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Che  $\Gamma = \Gamma[G, S]$  sia un grafo (semplice) risulta dalla costruzione. Inoltre è chiaramente  $k$ -regolare: infatti per ogni vertice  $g \in G$ , l'insieme dei vertici adiacenti a  $g$  è dato dai vertici  $gs$ , con  $s \in S$ , che, al variare di  $s \in S$ , sono tutti distinti (legge di cancellazione per i gruppi). Questo prova il punto (1).

Per il punto (2), poniamo  $H = \langle S \rangle$ . Siano  $x, y \in G$  e sia  $x e_1 g_1 e_2 g_2 \dots e_n y$  un cammino in  $\Gamma$  dal vertice  $x$  a  $y$ . Allora esistono  $s_1, \dots, s_n \in S$  tali che  $e_1 = \{x, xs_1\}$ ,  $e_2 = \{xs_1, xs_1s_2\}$ , e così via, sino a  $e_n = \{xs_1 \dots s_{n-1}, xs_1 \dots s_{n-1}s_n = y\}$ . Posto  $h = s_1 \dots s_n$ , si ha  $h \in H$  e  $y = xh$ , da cui  $xH = yH$ . Viceversa, siano  $x, y \in G$  tali che  $xH = yH$ . Allora  $y \in xH$ , e quindi, per le proprietà di  $S$ , esistono  $s_1, \dots, s_n \in S$  (con  $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$ ) tali che  $y = xs_1 \dots s_n$ . Ponendo  $e_1 = \{x, xs_1\}$  e, per ogni  $i = 2, \dots, n$ ,  $e_i = \{xs_1 \dots s_{i-1}, xs_1 \dots s_{i-1}s_i\}$ , si ricava un cammino  $x e_1 xs_1 \dots e_n y$  in  $\Gamma$ . Abbiamo quindi provato che due vertici  $x, y$  di  $\Gamma$  appartengono alla stessa componente connessa se e solo se  $xH = yH$ , il che prova il punto (2). In particolare, l'insieme dei vertici della componente connessa che contiene  $1_G$  è costituito dagli elementi di  $H$ , e  $\Gamma$  è connesso se e solo se  $H = G$ , ovvero  $S$  è un sistema di generatori di  $G$ . ■

Osserviamo come dalla dimostrazione del punto (2) segua che se  $x$  ed  $y$  appartengono alla stessa componente connessa di  $\Gamma = \Gamma[G, S]$ , allora la distanza  $d_\Gamma(x, y)$  coincide con la lunghezza minima  $\ell_S(h)$  di un elemento  $h \in \langle S \rangle$  tale che  $y = xh$ .

Sia  $G$  un gruppo,  $\Gamma = \Gamma[G, S]$  un grafo di Cayley, e sia  $g \in G$ . Allora la moltiplicazione a sinistra  $\lambda_g : G \rightarrow G$ , definita da  $x \mapsto gx$  (per ogni  $x \in G$ ), è una biezione dell'insieme dei vertici di  $\Gamma$  che conserva la relazione di adiacenza; infatti, per ogni  $x \in G$  e ogni  $s \in S$ , si ha  $\lambda_g(\{x, xs\}) = \{gx, (gx)s\}$ . Quindi  $\lambda_g$  induce un automorfismo del grafo  $\Gamma$  (infatti, lo si verifichi per esercizio, la posizione  $g \mapsto \lambda_g$  definisce un omomorfismo iniettivo del gruppo  $G$  nel gruppo  $\text{Aut}(\Gamma)$ ). Se  $x, y$  è una coppia di vertici del grafo di Cayley  $\Gamma[G, S]$ , ponendo  $g = yx^{-1}$ , si ha  $\lambda_g(x) = y$ . Dunque ogni grafo di Cayley è vertex-transitivo. Questa è una importante osservazione che fissiamo nella seguente proposizione.

**Proposizione 8.6.** *Sia  $G$  un gruppo finito ed  $S$  un sottoinsieme di  $G$  che soddisfa le condizioni (C 1) e (C 2). Allora, per ogni  $g \in G$ , la moltiplicazione a sinistra per  $g$  induce un automorfismo di  $\Gamma = \Gamma[G, S]$ , e  $G$  è isomorfo ad un sottogruppo di  $\text{Aut}(\Gamma)$  che è transitivo sull'insieme dei vertici di  $\Gamma$ . In particolare,  $\Gamma$  è vertex-transitivo.*

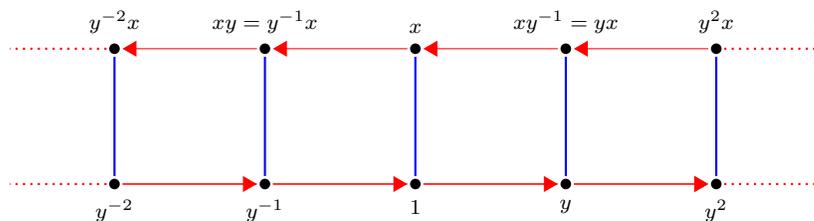
Questa proprietà dei grafi di Cayley è molto importante. Consente di valutare il comportamento locale del grafo a partire da qualsiasi vertice ci piaccia, in particolare a partire dal vertice  $1_G$ . Così, ad esempio, il diametro di un grafo di Cayley connesso  $\Gamma = \Gamma[G, S]$  coincide con  $\sup_{g \in G} d_\Gamma(1_G, g)$ ; per quanto osservato in precedenza, possiamo quindi affermare che, se  $S$  è un sistema di generatori di  $G$ , allora

$$\text{diam}(\Gamma[G, S]) = \sup_{g \in G} \ell_S(g). \quad (8.1)$$

Analoghe considerazioni valgono per il calibro: il calibro di un grafo di Cayley è la lunghezza minima di un ciclo non banale che inizia nel vertice  $1_G$ , e quindi è il minimo  $t \geq 3$  per cui è possibile scrivere  $1_G = s_1s_2 \dots s_t$ , con  $s_i \in S$  e  $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$ , per  $i = 1, \dots, t-1$ .

*Gruppi infiniti.* Abbiamo trattato i grafi di Cayley solo per gruppi finiti, ma non c'è nessuna ragione (se non quella di ottenere grafi finiti) per farlo. Fermo restando che il sistema  $S$  è comunque assunto *finito*, le definizioni e le Proposizioni 8.5 e 8.6 valgono anche per gruppi infiniti, con dimostrazioni sostanzialmente analoghe. Piuttosto che riprodurle, affidiamo a chi conosce un poco di Teoria dei Gruppi infiniti il seguente esempio.

**Esempio.** Sia  $D = \langle x, y \mid x^2 = 1, y^x = y^{-1} \rangle$ , il gruppo diedrale infinito; allora il grafo di Cayley  $\Gamma = \Gamma[D, \{x, y\}]$  ha il seguente aspetto:



dove gli archi in rosso corrispondono al generatore  $y$  (con la freccia nel verso  $g \mapsto gy$ ) e in blu gli archi corrispondenti al generatore  $x$ . Il gruppo  $D$  è identificabile, per moltiplicazione a sinistra, con un sottogruppo di  $\text{Aut}(\Gamma)$ : l'elemento  $y$  opera come l'automorfismo che trasla orizzontalmente tutto il diagramma di un passo (verso destra), mentre l'involuzione  $x$  opera come una rotazione del diagramma di  $180^\circ$  intorno al centro dell'arco  $\{1, x\}$ . Ci sono automorfismi di  $\Gamma$  che non sono indotti da elementi di  $D$ , come - ad esempio - la riflessione che scambia i due binari del diagramma.

### Esempio: i grafi di Paley.

La classe di grafi che approfondiamo come esempio in questo capitolo è un tipo molto particolare di grafi di Cayley.

Sia  $q$  una potenza di un numero primo, con  $q \equiv 1 \pmod{4}$ . Il *grafo di Paley*  $P_q$  è il grafo i cui vertici sono gli elementi del campo  $GF(q)$  di ordine  $q$ , e per  $x, y \in GF(q)$ ,  $\{x, y\}$  è un arco se  $x - y$  è un quadrato in  $GF(q) \setminus \{0\}$ . La condizione  $q \equiv 1 \pmod{4}$  assicura che  $-1$  è un quadrato in  $GF(q)$ , e quindi che la relazione d'adiacenza è (come deve essere) simmetrica. Naturalmente si possono dare definizioni analoghe per  $q \equiv 3 \pmod{4}$ , ed ottenere in tal caso grafi diretti. Qui ci limitiamo al caso semplice con  $q \equiv 1 \pmod{4}$ .

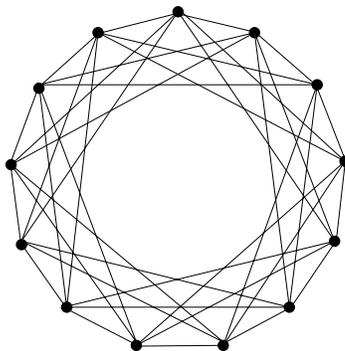


Figura 8.4: Il grafo di Paley  $P_{13}$

Per ogni tale  $q$ ,  $P_q$  è regolare ed il suo grado è il numero di quadrati non nulli nel campo  $GF(q)$ , che è  $(q-1)/2$ . Inoltre, per definizione, i grafi di Paley sono grafi di Cayley nel gruppo additivo  $GF(q)$ ; in particolare, sono quindi grafi connessi (dato che 1 è un quadrato e genera il gruppo additivo di  $GF(q)$ ) e vertex-transitivi. I grafi di Paley sono fortemente

regolari: i parametri di  $P_q$  sono

$$\left(\frac{q-1}{2}, \frac{q-5}{4}, \frac{q-1}{4}\right). \quad (8.2)$$

Per dimostrare questo, denotiamo con  $\mathcal{Q}$  l'insieme dei quadrati non-nulli di  $GF(q)$ , e consideriamo il carattere su  $GF(q)$  definito da, per ogni  $a \in GF(q)$

$$\chi(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = 0 \\ 1 & \text{se } a \in \mathcal{Q} \\ -1 & \text{se } 0 \neq a \notin \mathcal{Q} \end{cases}$$

Poiché  $|\mathcal{Q}| = (q-1)/2$ , si ha immediatamente

$$\sum_{x \in GF(q)} \chi(x) = 0. \quad (8.3)$$

Inoltre, per ogni  $a \in GF(q)$ ,

$$\sum_{x \in GF(q)} \chi(x)\chi(x+a) = \begin{cases} q-1 & \text{se } a = 0 \\ -1 & \text{se } a \neq 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Infatti, l'affermazione è chiara per  $a = 0$ ; se  $a \neq 0$ , si osserva che, per  $x \neq 0$ , si può scrivere  $\chi(x)\chi(x+a) = \chi(x)\chi(x(1+ax^{-1})) = \chi(x)\chi(x)\chi(1+ax^{-1}) = \chi(1+ax^{-1})$ ; quindi

$$\sum_{x \in GF(q)} \chi(x)\chi(x+a) = \sum_{x \neq 0} \chi(1+ax^{-1}) = \sum_{y \in GF(q)} \chi(y) - 1 = -1.$$

Sia  $A$  la matrice di adiacenza del grafo  $P_q$  e sia  $B$  la matrice definita da, per  $x, y \in GF(q)$ ,

$$b_{xy} = \chi(x-y).$$

Allora,

$$B = 2A + I - J \quad (8.5)$$

(dove  $I = I_q$  e  $J = J_q$ ). Ora, da (8.2) e (8.4) si deduce, rispettivamente, che  $BJ = 0 = JB$  e  $B^2 = qI - J$ . da (8.5), facendo i conti si ricava

$$4A^2 = (q+1)I + (q-3)J - 2B.$$

Poiché, per  $x, y \in GF(q)$ , il termine  $(A^2)_{xy}$  indica il numero di vertici adiacenti sia a  $x$  che a  $y$ , da quest'ultima identità si deducono i valori dei parametri (8.2).

Dalla discussione fatta nella sezione 7.3 (vedi in particolare il Teorema 7.12) risulta quindi che i grafi di Paley sono conference graphs, e che gli autovalori non banali di  $P - q$  sono

$$\mu_1 = \frac{-1 + \sqrt{q}}{2} \quad \mu_{q-1} = \frac{-1 - \sqrt{q}}{2} \quad (8.6)$$

ognuno con molteplicità  $(q-1)/2$ .

Se  $q = p$  è un numero primo,  $P_p$  è un grafo circolante, ed è hamiltoniano (questo è semplice: 1 è un quadrato e genera il gruppo additivo  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ). In effetti, meno banalmente, ogni grafo di Paley è hamiltoniano.

**Proposizione 8.7.** *Sia  $q \equiv 1 \pmod{4}$  potenza di un numero primo, e  $P_q$  il corrispondente grafo di Paley. Allora*

- $P_q$  è hamiltoniano;
- $P_q$  è autocomplementare.

DIMOSTRAZIONE. Vedi esercizi 8.19 e 8.20. ■

Questa ultima proprietà dei grafi di Paley è utile in diverse considerazioni. Ad esempio, il grafo dell'esercizio 6.7 è il grafo di Paley  $P_{17}$ , ed è il grafo  $\Gamma$  con il massimo numero di vertici tale che né  $\Gamma$  né il suo grafo complementare contengono un sottografo isomorfo a  $K_4$  (da ciò segue che il numero di Ramsey  $R(4, 4)$  è uguale a 18). A noi risulterà comoda nel valutare il numero cromatico di alcuni grafi di Paley. Per prima cosa osserviamo che, per la Proposizione 7.10,

$$\chi(P_q) \geq 1 - \frac{k}{\mu_{n-1}} = 1 - \frac{q-1}{-1-\sqrt{q}} = \sqrt{q}. \quad (8.7)$$

Non è nota una formula generale che dia il valore del numero cromatico  $\chi(P_q)$ , nemmeno nel caso in cui  $q$  è primo. Si ha, ad esempio,  $\chi(P_{17}) = 6$ , mentre  $\chi(P_{13}) = 5 = \chi(P_{25})$ . Tuttavia, se  $q$  è un quadrato, allora in (8.7) vale l'uguaglianza. Proviamo quindi che

$$\chi(P_{q^2}) = q = \alpha(P_{q^2}). \quad (8.8)$$

Infatti,  $U = GF(q)$  è costituito da quadrati nel campo  $GF(q^2)$ , quindi  $U$  induce un sottografo completo di  $P_{q^2}$ ; sia  $\{a_1 = 0, a_2, \dots, a_q\}$  un sistema di rappresentanti delle classi laterali  $GF(q) + a$  nel gruppo  $(GF(q^2), +)$ ; allora, i traslati  $U + a_1, \dots, U + a_q$  costituiscono una partizione dei vertici di  $P_{q^2}$  ed inducono ciascuno un sottografo completo. Da ciò segue che il grafo complementare ha indice di stabilità uguale a  $q$  ed ammette una  $q$ -colorazione. Poiché  $P_{q^2}$  è isomorfo al suo grafo complementare si deduce la (8.8).

Descriveremo ora, nel caso in cui  $q = p$  è un numero primo, il gruppo degli automorfismi di  $P_p$ . La chiave del ragionamento è un classico risultato di Burnside (Teorema 8.8). Prima di enunciarlo, ricordo che un gruppo di permutazioni  $H$  su un insieme  $V$  si dice *2-transitivo* se per ogni  $x, y, x_1, y_1 \in V$ , con  $x \neq y$  e  $x_1 \neq y_1$ , esiste  $h \in H$  tale che  $h(x) = x_1$ , e  $h(y) = y_1$ . È immediato osservare che, se  $\Gamma$  è un grafo: *Aut*( $\Gamma$ ) è *2-transitivo sull'insieme dei vertici se e soltanto se  $\Gamma$  è completo o composto unicamente da vertici isolati.*

**Teorema 8.8.** (Burnside, 1901) *Sia  $p$  un numero primo, e  $H$  un gruppo di permutazioni transitivo sull'insieme  $V$ , con  $|V| = p$ . Allora  $H$  è 2-transitivo oppure  $V = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  e  $H$  è un sottogruppo del gruppo delle affinità  $AG(1, p) = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, a \neq 0\}$ .*

Da questo Teorema, e dall'osservazione che lo precede, segue subito che, se  $p$  è un numero primo,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , *Aut*( $P_p$ ) è un sottogruppo di  $G = AG(1, p)$ . Ora,  $G$  è il prodotto semidiretto di un sottogruppo normale  $T$  di ordine  $p$  (costituito dalle traslazioni  $x \mapsto x + b$ ) per un sottogruppo isomorfo al gruppo moltiplicativo  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . Poiché *Aut*( $P_p$ ) è transitivo,  $p$  divide il suo ordine, e quindi  $T \leq \text{Aut}(P_p)$ . Se  $\sigma : x \mapsto ax + b$  è un automorfismo di  $P_p$ , allora  $a = \sigma(1) - \sigma(0)$  è un quadrato in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , e viceversa se  $a \neq 0$  è un quadrato,  $x \mapsto ax + b$  è un automorfismo di  $P_p$ . Dunque

$$\text{Aut}(P_p) = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, a \neq 0 \text{ è un quadrato}\}.$$

In particolare,  $|\text{Aut}(P_p)| = p(p-1)/2$ .

### 8.3 Grafi di Schreier

I grafi di Schreier sono una generalizzazione di quelli da Cayley. Sia  $X$  un insieme,  $G$  un gruppo di permutazioni su  $X$  (cioè  $G \leq \text{Sym}(X)$ ) e  $S = S^{-1}$  un sistema di generatori<sup>1</sup> di  $G$ . Per  $x \in X$  e  $g \in G$  scriviamo  $x \cdot g$  per  $g(x)$ .

Il grafo di Schreier  $\Sigma[G, S; X]$  è il grafo il cui insieme di vertici è  $X$  e due vertici  $x, x' \in X$  sono adiacenti se  $x \neq x'$  ed esiste  $g \in S$  tale che  $y = x \cdot g$ .

In effetti quella che abbiamo appena dato non è la definizione usuale, né la più naturale in questo contesto, perché di solito il grafi di Schreier è il *multigrafo* il cui insieme di vertici è  $X$ , l'insieme degli archi è  $X \times S$ , e la funzione estremi

$$\phi : X \times S \rightarrow X^{[2]}$$

è data da  $\phi(x, g) = \{x, x \cdot g\}$ .

**Esempio: il grafo di Petersen è un grafo di Schreier.** Poiché il grafo di Petersen ha 10 vertici, vogliamo realizzarlo come grafo di Schreier per un sottogruppo del gruppo simmetrico  $S_{10}$ . Cominciamo con considerare i cicli  $\sigma_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $\sigma_2 = (6\ 8\ 10\ 7\ 9)$ , che hanno ordine 5 e - essendo disgiunti - commutano; quindi il sottogruppo di  $S_{10}$  da loro generato,  $N = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ , è un gruppo abeliano di ordine 25. Sia  $b = (1\ 10)(2\ 9)(3\ 8)(4\ 7)(5\ 6)$ ; allora  $b$  ha ordine 2 e, come si verifica calcolando:

$$\sigma_1^b = b^{-1}\sigma_1b = \sigma_2^2, \quad \sigma_2^b = b^{-1}\sigma_2b = \sigma_1^3.$$

Quindi  $b$  normalizza  $N$ ; di conseguenza  $G = N\langle b \rangle$  è un sottogruppo di  $S_{10}$  (si osservi che  $G = N \cup Nb$ ). Sia  $a = \sigma_1\sigma_2$  e consideriamo  $S = \{a, a^{-1}, b\}$ . Dunque  $S = S^{-1}$  ed è facile constatare che  $S$  è un sistema di generatori per  $G$ . A questo punto consideriamo il grafo di Schreier  $\Sigma[G, S; X]$  dove  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ , lasciando per esercizio il provare che è isomorfo al grafo di Petersen.

Osserviamo che un grafo di Cayley è un caso particolare di grafo di Schreier in cui  $X = G$  e la rappresentazione di  $G$  su se stesso è quella per moltiplicazione a destra. Non è difficile provare, come abbiamo fatto per i grafi di Cayley, che un grafo di Schreier  $\Sigma[G, S; X]$  è connesso se e soltanto se  $G$  è transitivo su  $X$ . Ma quello che ci interessa in modo particolare dimostrare è il risultato seguente

**Teorema 8.9** (J. Gross). *Ogni grafo regolare con valenza pari è un grafo di Schreier.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo regolare di valenza  $k \geq 2$  pari. Osservato che non si richiede che  $\Gamma$  sia connesso, procediamo per induzione su  $k$ .

Se  $k = 2$ , allora ogni componente connessa  $\Gamma_i$  (per  $i = 1, \dots, t$ ) di  $\Gamma$  è un ciclo, la cui lunghezza denotiamo con  $n(i)$ . Ogni tal componente connessa è dunque un grafo di Cayley (quindi di Schreier),  $\Gamma[C_{n(i)}, \{\sigma_i, \sigma_i^{-1}\}]$  dove  $C_{n(i)} = \langle \sigma_i \rangle$  è un gruppo ciclico di ordine  $n(i)$ . Allora, ponendo  $G = C_{n(1)} \times \dots \times C_{n(t)}$ , nella sua azione sull'unione disgiunta  $X = C_{n(1)} \cup \dots \cup C_{n(t)}$

<sup>1</sup>Le definizioni funzionano più in generale con  $S$  un sottoinsieme di  $G$  (non necessariamente un sistema di generatori) e  $G$  che agisce su  $X$  (non necessariamente in modo fedele); tuttavia impone le ipotesi di fedeltà nell'azione di  $G$  su  $X$  e  $\langle S \rangle = G$  non riduce in modo sostanziale la teoria, e risulta più comodo da trattare.

(quella più o meno ovvia in cui ogni elemento di  $C_{n(i)}$  agisce su  $C_{n(i)}$  e fissa tutti gli altri elementi di  $X$ ), e  $S = \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_t, \sigma_t^{-1}\}$ , si vede facilmente che  $\Gamma$  è isomorfo al grafo di Schreier  $\Sigma[G, S; X]$ .

Sia ora  $k \geq 4$ . Per il Teorema di Petersen 4.12,  $\Gamma$  ammette un 2-fattore, ovvero un sottografo  $\Delta = (V, E^*)$  che è unione disgiunta di cicli  $\Gamma_i = (V_i, E_i)$  ( $i = 1, \dots, t$ ) e  $E^* = \bigcup_{i=1}^t E_i$  tale che  $\bigcup_{i=1}^t V_i = V$ .

Poniamo  $X = V$ . Per il caso  $k = 2$ ,  $\Delta$  è un grafo di Schreier  $\Sigma[H, T; X]$ , dove  $H \leq \text{Sym}(X)$  è un prodotto diretto di gruppi ciclici e  $T$  l'insieme dei loro generatori e degli inversi di essi. Consideriamo ora il grafo  $\Gamma_0 = (V, E \setminus E^*)$ , che è regolare di valenza  $k - 2$ . Per ipotesi induttiva esiste  $K \leq \text{Sym}(X)$  ed un sistema  $U = U^{-1}$  di  $K$  tale che  $\Gamma_0$  è il grafo di Schreier  $\Sigma[H, U; X]$ .

A questo punto è sufficiente porre  $G = \langle H, K \rangle \leq \text{Sym}(X)$ ,  $S = T \cup U$  per riconoscere (si completino i dettagli per esercizio) che  $\Gamma$  è il grafo di Schreier  $\Sigma[G, S; X]$ . ■

## 8.4 Esercizi

**Esercizio 8.1.** Si provi che i grafi di Kneser (sezione 1.4) sono vertex-transitivi. In particolare, il grafo di Petersen è vertex-transitivo. Quindi si costruisca un grafo cubico che non sia vertex-transitivo, e si cerchi di farlo con il minor numero possibile di vertici.

**Esercizio 8.2.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo edge-transitivo privo di vertici isolati. Si provi che se  $\Gamma$  non è vertex-transitivo, allora  $\text{Aut}(\Gamma)$  ha esattamente due orbite su  $V$ , e che tali orbite costituiscono una bipartizione per  $\Gamma$ .

**Esercizio 8.3.** Sia  $\Gamma$  un albero infinito. Si provi che ogni sottogruppo finito di  $\text{Aut}(\Gamma)$  ha almeno un vertice od un arco fisso.

**Esercizio 8.4.** Si costruisca un albero finito (con almeno un arco) il cui gruppo degli automorfismi è banale (cioè costituito dalla sola identità). Si dica se è possibile costruire alberi con tale proprietà con un numero arbitrariamente grande di vertici.

**Esercizio 8.5.** Si provi che un grafo vertex-transitivo con un numero primo di vertici è un grafo di Cayley [sugg.: usare il fatto che, se  $p$  è un primo, un sottogruppo transitivo di  $S_p$  contiene un ciclo di lunghezza  $p$ ].

**Esercizio 8.6.** Si provi che un grafo vertex- ed edge-transitivo ma non arc-transitivo è regolare di grado pari.

**Esercizio 8.7.** Si provi che per ogni  $n \geq 2$ , l'ipercubo  $Q_n$  è arc-transitivo.

**Esercizio 8.8.** Si provi che un grafo circolante connesso con almeno 2 vertici è 2-connesso.

**Esercizio 8.9.** Si provi che ogni grafo completo bipartito  $K_{n,n}$  è un grafo circolante.

**Esercizio 8.10.** Sia  $\Gamma$  un grafo circolante con  $n$  vertici. Si provi che  $\Gamma$  è isomorfo ad un grafo di Cayley sul gruppo ciclico  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Esercizio 8.11.** Si provi che un grafo circolante connesso su  $p^n$  vertici (con  $p$  un numero primo) è hamiltoniano. [sugg.: usare l'esercizio precedente]

**Esercizio 8.12.** Sia  $\Gamma$  un albero finito e sia  $n$  il numero di vertici di grado 1 di  $\Gamma$ . Si provi che  $\text{Aut}(\Gamma)$  è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo simmetrico  $S_n$ .

**Esercizio 8.13.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ . Per ogni vertice  $x \in V$  sia  $N(x) = \{y \in V \mid \{x, y\} \in E\}$  e  $G_x = \{\beta \in G \mid \beta(x) = x\}$  (è un fatto standard che  $G_x$  è un sottogruppo di  $G$ ). Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i)  $\Gamma$  è arc-transitivo;
- (ii)  $\Gamma$  è vertex-transitivo e, per ogni  $x \in V$ ,  $G_x$  opera transitivamente su  $N(x)$ .

**Esercizio 8.14.** Si provi che il grafo di Petersen non è un grafo di Cayley. [Si usi il fatto che, a meno di isomorfismo, esistono solo due gruppi di ordine 10: il gruppo ciclico e il gruppo diedrale  $D_{10}$ ]

**Esercizio 8.15.** Sia  $G$  un gruppo finito,  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un sistema *minimale* di generatori di  $G$ , e  $S = A \cup A^{-1}$ . Si provi che il grado di connessione del grafo di Cayley  $\Gamma[G, S]$  è uguale a  $n$ .

**Esercizio 8.16.** Sia  $n \geq 2$  e sia  $G = \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle$ , il prodotto diretto di  $n$  gruppi (ciclici) di ordine 2. Posto  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ , si provi che il grafo di Cayley  $\Gamma[G, S]$  è bipartito. Si calcoli quindi il suo diametro. Si provi infine che  $\Gamma[G, S]$  è isomorfo all'ipercubo  $Q_n$ .

**Esercizio 8.17.** Si provi che il grafo complementare di un grafo di Cayley è un grafo di Cayley.

**Esercizio 8.18.** Sia  $n \geq 2$ , e sia  $D_{2n} = \langle x, y \mid y^n = x^2 = 1, y^x = y^{-1} \rangle$  il gruppo diedrale di ordine  $2n$ . Posto  $S = \{y, y^{-1}, x\}$ , si descriva il grafo di Cayley  $\Gamma[D_{2n}, S]$

**Esercizio 8.19.** Si provi che per ogni  $q$ , il grafo di Paley  $P_q$  è hamiltoniano. [sugg.: sia  $q = p^n$  con  $p$  primo; l'insieme dei quadrati non-nulli di  $GF(q)$  contiene una base  $\{x_1, \dots, x_n\}$  per  $GF(q)$  come spazio vettoriale su  $GF(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ; posto  $S = \{\pm x_1, \dots, \pm x_n\}$ ,  $P_q$  contiene come sottografo spanning il grafo di Cayley  $\Gamma((GF(q), +), S)$ , che è hamiltoniano.]

**Esercizio 8.20.** Si provi che i grafi di Paley sono autocomplementari; ovvero isomorfi al loro grafo complementare. [sugg.: fissato  $0 \neq a$  un non-quadrato in  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  si consideri l'applicazione su  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  definita da  $x \mapsto ax$ ]

**Esercizio 8.21.** Sia  $p$  un numero primo con  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Si provi che il grafo di Paley  $P_p$  è arc-transitivo.