

Quasi-isometrie

Se uno degli obiettivi generali, inarrivabile certo ma, almeno, dicibile, della Teoria dei gruppi finiti è la loro classificazione a meno di isomorfismo, questa prospettiva, per gruppi infiniti (e finitamente generati) costituirebbe una ambizione assolutamente smodata. Si è quindi giunti a elaborare, per gruppi finitamente generati, una diversa nozione di equivalenza, la *quasi-isometria*, molto più debole dell'isomorfismo, e tuttavia in grado di discernere tra diverse tipologie (e di descriverne alcune) che, secondo un'espressione ricorrente, riguardano proprietà su "larga scala" di un gruppo. Questo capitolo è una prima introduzione a tale concetto, che è uno degli strumenti fondamentali della Teoria geometrica dei gruppi.

4.1. Isometrie e quasi-isometrie

Cominciamo ricordando la definizione di spazio metrico.

DEFINIZIONE. Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) consistente in un insieme X e una applicazione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ che soddisfa le proprietà seguenti:

- per ogni $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- per ogni $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- (diseguaglianza triangolare) per ogni $x, y, z \in X$,

$$d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z).$$

Diversi spazi metrici importanti sono certamente già noti a chi legge, alcuni dei quali saranno richiamati in esempi o esercizi a seguire. E certamente è familiare come ad uno spazio metrico (X, d) sia canonicamente associato un spazio topologico (X, τ_d) dove la topologia τ_d è quella una cui base di aperti è costituita dalla *palle aperte*

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$$

al variare di $x_0 \in X$ e $0 < r \in \mathbb{R}$.

Metrica di grafo. Ogni grafo connesso Γ ammette una distanza naturale d_Γ (sezione 2.1) definita, per ogni coppia (u, v) di vertici, come la lunghezza minima di un cammino da u a v , ed è quindi uno spazio metrico. In questo caso la topologia associata è quella discreta, ma più avanti tratteremo realizzazioni geometriche di grafi e la metrica sarà quella indotta da quella dello spazio che contiene la realizzazione.

Word metric. Se G è un gruppo ed S un suo sistema di generatori non contenente 1_G , la *word metric* di G rispetto a S è la distanza d_S nel grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$; quindi, per ogni $g, h \in G$,

$$d_S(g, h) = \ell_S(g^{-1}h)$$

dove $\ell_S(x)$ è la lunghezza di x in S (vedi sezione 2.4).

DEFINIZIONI. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici; una applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *inclusione isometrica* se, per ogni $x, x' \in X$,

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

Una *isometria* è un'inclusione isometrica invertibile. Se $f : X \rightarrow Y$ è un'isometria, allora evidentemente anche la funzione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è un'isometria. Gli spazi (X, d_X) e (Y, d_Y) si dicono *isometrici* se esiste un'isometria dall'uno nell'altro.

Si osservi che ogni inclusione isometrica è iniettiva. Ancora, se (X, d_X) , (Y, d_Y) , (Z, d_Z) sono spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ sono inclusioni isometriche (isometrie), allora la composizione $g \circ f : X \rightarrow Z$ è un'inclusione isometrica (isometria). In particolare, l'insieme delle isometrie di un spazio (X, d) in se stesso

$$\text{Isom}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ isometria}\},$$

è un gruppo rispetto alla composizione. Un'azione *per isometrie* di un gruppo G sullo spazio (X, d) è un omomorfismo $G \rightarrow \text{Isom}(X)$. Se G è un gruppo e S un suo sistema di generatori non contenente 1, l'azione per moltiplicazione a sinistra di G sullo spazio (G, d_S) è un'azione per isometrie.

Quando associata a gruppi (finitamente generati), la relazione di isometria è troppo restrittiva e inadatta: due diverse word-metrics sullo stesso gruppo G sono in genere non isometriche, dunque la nozione di isometria non può essere trasferita dai singoli spazi (G, d_S) ai gruppi in se stessi. Affidiamo ad un semplice esempio il compito di introdurre una prima nozione più lasca di equivalenza tra spazi metrici.

Esempio 4.1. Sull'insieme \mathbb{R}^2 denotiamo con d l'usuale metrica euclidea (o "standard") e con d_1 la metrica definita da, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$d_1((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|.$$

Gli spazi (\mathbb{R}^2, d) e (\mathbb{R}^2, d_1) non sono isometrici, tuttavia, per ogni $a = (x, y), b = (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{1}{2}d(a, b) \leq d_1(a, b) \leq 2d(a, b);$$

e questo basta a far sì, ad esempio, che d e d_1 definiscano la stessa topologia su \mathbb{R}^2 . \square

L'esempio che precede suggerisce la seguente

DEFINIZIONE. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *equivalenza bi-lipschitziana* se è biiettiva¹ ed esiste una costante $1 \leq C \in \mathbb{R}$ tale che

$$C^{-1}d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Cd_X(x, x'),$$

per ogni $x, x' \in X$.

È chiaro che inverse e composizioni di equivalenze bi-lipschitziane sono equivalenze bi-lipschitziane, e dunque questa relazione stabilisce un'equivalenza nella classe degli spazi metrici. Quello che poi ci interessa è la seguente facile osservazione.

¹Naturalmente, si definiscono anche le inclusioni bi-lipschitziane per le quali non è richiesta la biiettività; vedi esercizio 4.4.

Proposizione 4.1. *Sia G un gruppo finitamente generato, e siano X, Y insiemi finiti di generatori di G , non contenenti 1. Allora la funzione identica su G è una equivalenza bi-lipschitziana tra gli spazi (G, d_X) e (G, d_Y) .*

Dimostrazione. Poiché X e Y sono finiti esiste un intero $M \geq 1$ tale che $\ell_X(y) \leq M$ per ogni $y \in Y$ e $\ell_Y(x) \leq M$ per ogni $x \in X$. Ne segue che, per ogni $g, h \in G$,

$$d_Y(g, h) = \ell_Y(g^{-1}h) \leq M\ell_X(g^{-1}h) = Md_X(g, h)$$

e, simmetricamente, $d_X(g, h) \leq Md_Y(g, h)$. Dunque

$$M^{-1}d_X(g, h) \leq d_Y(g, h) \leq Md_X(g, h),$$

provando che l'identità è un'equivalenza bi-lipschitziana tra (G, d_X) e (G, d_Y) . \square

È dunque possibile trasferire ai gruppi la relazione: diciamo che due gruppi finitamente generati G e H sono bi-lipschitz equivalenti se per qualche (quindi, per qualsiasi) coppia S, T di sistemi finiti di generatori di G e H rispettivamente, esiste un'equivalenza bi-lipschitziana tra gli spazi (G, d_S) e (H, d_T) .

Sembra che ci siamo. Ma anche l'equivalenza bi-lipschitziana si rivela operativamente non del tutto funzionale, e concettualmente ancora un poco ristretta. Un tratto di questa rigidità è, mi pare, la biattività; ad esempio, spazi di cardinalità diversa non possono essere bi-lipschitz equivalenti, mentre, per utilizzare l'immagine normalmente evocata a questo punto, vorremo comprendere nella stessa tipologia spazi che tendono a confondersi se "visti da molto molto lontano", come ad esempio gli spazi standard \mathbb{Z} e \mathbb{R} (che tendono entrambi a sembrare una retta), oppure due spazi finiti qualsiasi.

Quasi-isometrie. La nozione, più debole, di quasi-isometria, oltre ad essere, come vedremo nelle dimostrazioni, uno strumento più duttile, è quella che meglio espleta il compito di accomunare spazi che non si distinguono quando "visti da lontano".

DEFINIZIONI. Siano $(X, d_X), (Y, d_Y)$ spazi metrici.

- (1) Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *inclusione quasi-isometrica* se esistono costanti $\lambda \geq 1, C \geq 0$ tali che

$$\lambda^{-1}d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + C, \quad (4.1)$$

per ogni $x, x' \in X$. Con maggiore precisione diremo che una tale f è un'inclusione (λ, C) -quasi-isometrica.

- (2) Un'applicazione $g : Y \rightarrow X$ si dice una *quasi-inversa* dell'inclusione (λ, C) -quasi-isometrica $f : X \rightarrow Y$ se g è un'inclusione (λ, C) -quasi-isometrica ed esiste una costante $K \geq 0$ tale che, per ogni $x \in X$ e $y \in Y$,

$$d_X(gf(x), x) \leq K \quad \text{e} \quad d_Y(fg(y), y) \leq K. \quad (4.2)$$

- (3) Un'inclusione (λ, C) -quasi-isometrica che ammette una quasi-inversa² si dice una *quasi-isometria* (se si desidera essere precisi sui parametri, si parlerà di (λ, C) -quasi-isometria). Due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) si diranno *quasi-isometrici* se esiste una quasi-isometria $f : X \rightarrow Y$. In tal caso, scriveremo $X \sim_{QI} Y$.

²Si veda l'esercizio 4.1 per un criterio di esistenza di una quasi-inversa.

Se $f : X_1 \rightarrow X_2$, $g : X_2 \rightarrow X_3$ sono, rispettivamente, inclusioni (λ, C) e (μ, D) quasi-isometriche tra gli spazi X_1, X_2, X_3 , allora l'applicazione composta $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$ è un'inclusione $(\lambda\mu, \mu C + D)$ -quasi-isometrica. In particolare, la relazione di quasi-isometria tra spazi metrici è transitiva (oltre che riflessiva e simmetrica).

ESEMPI E OSSERVAZIONI. 1) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ la "parte intera" di x (il massimo numero intero non superiore a x). Si verifica facilmente che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| - 1 < |\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor| < |x - y| + 1.$$

Dunque la funzione parte intera $\lfloor \cdot \rfloor$ è un'inclusione $(1, 1)$ -quasi-isometrica di \mathbb{R} in \mathbb{Z} , intesi con le usuali distanza sulla retta: $d(x, y) = |x - y|$. L'immersione identica $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ preserva la distanza, dunque è un'inclusione $(1, 0)$ -quasi-isometrica (a maggior ragione $(1, 1)$ -quasi-isometrica), ed è una quasi-inversa di $\lfloor \cdot \rfloor$ (la (4.2) è verificata con $K = 1$). Pertanto, la parte intera è una quasi isometria da \mathbb{R} in \mathbb{Z} ; questo esempio mostra, in particolare, che, diversamente dalle inclusioni isometriche, una quasi-isometria non è necessariamente iniettiva, né continua.

In generale, per ogni $n \geq 1$, gli spazi metrici $(\mathbb{Z}^n, d), (\mathbb{R}^n, d)$ (dove d è la distanza euclidea) sono quasi-isometrici; più precisamente, l'immersione identica $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una quasi-isometria.

2) Per ogni coppia di interi $n, m \geq 1$, $\mathbb{R}^n \sim_{QI} \mathbb{R}^m$ se e solo se $n = m$ (questo lo dimostreremo più avanti, vedi Proposizione 4.15).

3) Sia X uno spazio metrico di diametro finito D , e $Y = \{y\}$ lo spazio costituito da un unico punto; la sola funzione f da X in Y ($f(x) = y$ per ogni $x \in X$) è una $(1, D)$ -quasi-isometria (qualsiasi funzione $Y \rightarrow X$ è una sua quasi-inversa). Viceversa, sia (X, d) uno spazio metrico quasi-isometrico ad un punto, allora, in particolare esistono costanti $\lambda \geq 1, C \geq 0$ tali che, per ogni coppia $x, x' \in G$,

$$\lambda^{-1}d(x, x') - C \leq 0,$$

e dunque $d(x, x') \leq \lambda C$. Quindi, uno spazio metrico è quasi-isometrico ad un punto se e soltanto se ha diametro finito.

In particolare, la retta euclidea \mathbb{R} non è quasi-isometrica all'intervallo limitato $[0, 1]$; questo si può vedere anche direttamente, osservando che per ogni $\lambda \geq 1$ e $C \geq 0$ esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda^{-1}|x - y| - C > 1$; dunque non esiste alcuna inclusione quasi-isometrica da \mathbb{R} in $[0, 1]$.

Poiché le equivalenze bi-lipschitziane sono quasi-isometrie, dalla Proposizione 4.1, segue il seguente fatto fondamentale.

Proposizione 4.2. *Sia G un gruppo finitamente generato, e siano X, Y insiemi finiti di generatori di G , non contenenti 1. Allora la funzione identica su G è una quasi-isometria tra i grafi di Cayley $\Gamma[G, X]$ e $\Gamma[G, Y]$. Ovvero, gli spazi (G, d_X) e (G, d_Y) sono quasi-isometrici.*

DEFINIZIONE. Due gruppi finitamente generati G e H sono *quasi-isometrici*, e scriveremo $G \sim_{QI} H$, se per qualche (quindi, per qualsiasi) coppia S, T di sistemi finiti di generatori di G e H rispettivamente, gli spazi (G, d_S) e (G, d_T) sono quasi-isometrici³.

³In generale, se G è un gruppo e (X, d) uno spazio metrico, scriviamo $G \sim_{QI} X$ se X è quasi-isometrico ad un grafo di Cayley per un sistema finito di generatori di G .

Ad esempio, $\mathbb{Z} \sim_{QI} D_\infty$ (abbiamo visto che tali gruppi ammettono grafi di Cayley isomorfi); inoltre il grafo di Cayley di D_∞ nell'esempio 2.7 è anche un grafo di Cayley per il prodotto diretto $\mathbb{Z} \times C_2$. Sono quindi tra loro quasi isometrici i tre gruppi (non-isomorfi), \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times C_2$, D_∞ ; questa semplice osservazione sarà generalizzata più avanti, nel senso che tutti i gruppi che hanno un sottogruppo di indice finito isomorfo a \mathbb{Z} sono quasi-isometrici a \mathbb{Z} .

Per l'osservazione 3) di sopra, un gruppo finitamente generato è quasi-isometrico allo spazio costituito da un unico punto se e solo se, per ogni sistema finito S di generatori di G il diametro del grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$ è finito; ovvero se e solo se esiste $D \geq 0$ tale che $\ell_S(x) \leq D$ per ogni $x \in G$; il che, essendo S finito, equivale a dire che G è un gruppo finito.

Concludiamo la sezione con due osservazioni che ci saranno diverse volte utili. La prima è nell'ambito, appunto, dei gruppi finitamente generati: abbiamo detto fin da subito che una quasi-isometria f non è necessariamente iniettiva, tuttavia, se il dominio di f è uno spazio di tipo (G, d_S) allora f è quasi-iniettiva, nel senso dell'enunciato che segue.

Lemma 4.3. *Siano G un gruppo finitamente generato, S un sistema finito di generatori di G e $f : G \rightarrow X$ un'inclusione isometrica da (G, d_S) in uno spazio metrico (X, d) . Allora, per ogni sottoinsieme finito B di X , $f^{-1}(B)$ è finita.*

Dimostrazione. Sia $f : G \rightarrow X$ una (λ, C) -inclusione isometrica; è sufficiente provare che $f^{-1}(\{b\})$ è finito per ogni $b \in X$. Supponiamo $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$ e siano $x, x' \in f^{-1}(\{b\})$. Allora, $\lambda^{-1}d_S(x, x') \leq d(f(x), f(x')) + C = C$, quindi $x' \in B_S(x, \lambda C)$. Poiché S è finito, la palla chiusa $B_S(x, \lambda C)$ è finita, e questo finisce anche la dimostrazione. \square

La seconda osservazione è un criterio di quasi-invertibilità, la cui dimostrazione (che usa l'assioma della scelta) è lasciata per esercizio.

Lemma 4.4. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ un'inclusione quasi-isometrica; allora f è una quasi-isometria se e solo se esiste una costante $D > 0$ tale che per ogni $y \in Y$ esiste un punto $x \in X$ per cui $d_Y(f(x), y) \leq D$.*

ESERCIZIO 4.1. Si provi il Lemma 4.4.

ESERCIZIO 4.2. Sia \mathbb{R} la retta reale con la metrica standard, e siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si provi che f è una quasi-isometria, mentre g non lo è.

ESERCIZIO 4.3. Si dimostri nei dettagli che per ogni $n \geq 1$ gli spazi \mathbb{Z}^n e \mathbb{R}^n (con la metrica euclidea standard) sono quasi-isometrici. Si provi quindi che lo stesso vale se si dota \mathbb{Z}^n della metrica d_1 definita da

$$d_1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

per ogni $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ (in \mathbb{R}^n tale metrica si chiama di solito metrica ℓ^1).

ESERCIZIO 4.4. Se (X, d_X) e (Y, d_Y) sono spazi metrici, un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *inclusione bi-lipschitziana* se esiste una costante $1 \leq C \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x, x' \in X$,

$$C^{-1}d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Cd_X(x, x'),$$

(un'inclusione bi-lipschitziana è chiaramente una funzione iniettiva, se è suriettiva è un'equivalenza bi-lipschitziana). Siano G, H due gruppi finitamente generati quasi-isometrici ed S, T sistemi finiti di generatori di G e, rispettivamente, di H ; si provi che esistono inclusioni bi-lipschitziane $f : (G, d_S) \rightarrow (H, d_T)$ e $g : (H, d_T) \rightarrow (G, d_S)$ che sono quasi-inverse una dell'altra, ma che G non è necessariamente bi-lipschitz equivalente ad H .

ESERCIZIO 4.5. Sia (X, d) uno spazio metrico; si dice che due applicazioni $f, g : X \rightarrow X$ hanno *distanza finita* se

$$\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) < \infty.$$

- 1) Si provi che se $f, g : X \rightarrow X$ hanno distanza finita e f è una quasi-isometria allora g è una quasi-isometria.
- 2) Si provi che l'aver distanza finita definisce una relazione di equivalenza nell'insieme $\Omega = X^X$ di tutte le applicazioni da X in se stesso.
- 3) Denotando, per ogni $f \in \Omega$, con $[f]$ la classe di equivalenza di f si provi che porre $[f][g] = [f \circ g]$ definisce un'operazione nell'insieme

$$\mathcal{QI}(X) = \{[f] \mid f \in \Omega, f \text{ quasi-isometria}\},$$

rispetto alla quale $\mathcal{QI}(X)$ è un gruppo, detto *gruppo di quasi-isometria* di X .

ESERCIZIO 4.6. Si provi che se X e Y sono spazi quasi-isometrici allora $\mathcal{QI}(X) \simeq \mathcal{QI}(Y)$.

ESERCIZIO 4.7. Si provi che il gruppo moltiplicativo \mathbb{R}^* è un sottogruppo del gruppo $\mathcal{QI}(\mathbb{Z})$ delle quasi-isometrie dello spazio \mathbb{Z} . [sugg. per ogni $0 \neq r \in \mathbb{R}$ si consideri la quasi-isometria di \mathbb{Z} definita da $x \mapsto [rx]$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$]

4.2. Spazi geodesici e realizzazione geometrica

DEFINIZIONE. Sia (X, d) uno spazio metrico; un *segmento geodesico* in X è un'inclusione isometrica $\gamma : [0, r] \rightarrow X$, dove $0 \leq r \in \mathbb{R}$ e la metrica dell'intervallo reale $[0, r]$ è quella standard ereditata da \mathbb{R} . Il numero reale r è detto *lunghezza* del segmento geodesico γ , mentre i punti $\gamma(0)$ e $\gamma(r)$ di X si dicono *punto iniziale* e *punto terminale* del segmento. Una *retta geodesica* è un'immersione isometrica $\mathbb{R} \rightarrow X$.

OSSERVAZIONE. Sia γ un segmento geodesico nello spazio (X, d) , con punto iniziale x , punto terminale y , e lunghezza r ; allora, poiché γ è isometrica, $r = d_X(x, y)$.

DEFINIZIONE. Uno spazio metrico (X, d) è detto uno spazio *geodesico* se per ogni coppia $x, y \in X$ esiste un segmento geodesico in X con punto iniziale x e punto terminale y (in genere si tende a identificare un segmento geodesico Γ con la sua immagine in X).

Ad esempio, per ogni $n \geq 1$, lo spazio euclideo \mathbb{R}^n è geodesico, ed i segmenti geodesici non sono altro che i segmenti standard di retta; mentre lo stesso spazio privato di un punto non è geodesico (ad esempio, in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ non esiste alcun segmento geodesico tra un punto $P \neq 0$ e il punto $-P$).

Un altro esempio di spazio geodesico è il piano iperbolico \mathbb{H}^2 , al quale abbiamo accennato nella sezione 3.5; in tal caso i segmenti geodesici sono tratti di rette verticali o di semicirconferenze centrate sull'asse delle x .

Un grafo connesso localmente finito (e non banale) $\Gamma = (V, E)$ con la metrica di grafo non è uno spazio geodesico, ma può essere reso tale mediante la cosiddetta *realizzazione geometrica* $|\Gamma|$; si tratta essenzialmente dello spazio ottenuto dotando ogni arco di Γ della natura di intervallo reale $[0, 1]$, e definendo la metrica "sovrapponendo" alla metrica del grafo la metrica standard di $[0, 1]$ su ogni arco. Ad esempio, la realizzazione geometrica del grafo di Cayley $\Gamma[\mathbb{Z}, 1]$ è la retta reale \mathbb{R} .

La descrizione formale è abbastanza naturale anche se tecnicamente richiede qualche attenzione. Se Γ consiste di un solo punto isolato allora $|\Gamma| = \Gamma$. Assumiamo di qui in avanti che questo non sia il caso ovvero, essendo Γ connesso, $E \neq \emptyset$. Si comincia fissando un 'verso' per ogni arco di Γ ; una maniera per farlo è di fissare un ordinamento totale \leq su V (questo è sempre possibile farlo), quindi ad ogni arco $\{x, y\} \in E$ si associa la coppia ordinata (x, y) se $x \leq y$. Posto $\bar{E} = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E, x \leq y\}$, sull'insieme $\bar{E} \times [0, 1]$ si definisce la relazione \sim ponendo, per $(x, y), (x', y') \in \bar{E}$ e $t, t' \in [0, 1]$,

$$((x, y), t) \sim ((x', y'), t')$$

se $((x, y), t) = ((x', y'), t')$, oppure

- $x = x'$ e $t = t' = 0$;
- $y = y'$ e $t = t' = 1$;
- $x = y', t = 0$ e $t' = 1$;
- $y = x', t = 1$ e $t' = 0$.

(si verifica facilmente che si tratta di una equivalenza). Poniamo ora

$$|\Gamma| = (\bar{E} \times [0, 1]) / \sim$$

e su di esso definiamo la distanza $d_{|\Gamma|}$. Dati due punti $[(x, y), t], [(x', y'), t'] \in |\Gamma|$ (le parentesi quadre indicano che stiamo considerando classi di equivalenza), definiamo $D = d_{|\Gamma|}([(x, y), t], [(x', y'), t'])$ nel modo che segue:

$$D = |t' - t| \text{ se } (x, y) = (x', y'),$$

mentre, se $(x, y) \neq (x', y')$,

$$D = \min\{t + d_{\Gamma}(x, x') + t', t + d_{\Gamma}(x, y') + 1 - t', 1 - t + d_{\Gamma}(y, x') + t', 1 - t + d_{\Gamma}(y, y') + 1 - t'\}.$$

Calcoli magari un po' laboriosi ma semplici, mostrano che $d_{|\Gamma|}$ è ben definita ed è una metrica su $|\Gamma|$. Lo spazio $(|\Gamma|, d_{|\Gamma|})$ è la *realizzazione geometrica* del grafo Γ . Si prova anche che la realizzazione geometrica non dipende dalla scelta dell'orientazione scelta su Γ per definirla.

Si dimostra quindi che $(|\Gamma|, d_{|\Gamma|})$ è uno spazio geodesico. Anche questa è una dimostrazione tediosa ma non difficile. Siano $u = [(x, y), t], u' = [(x', y'), t']$ due punti di $|\Gamma|$ e supponiamo, ad esempio, che $R = d_{|\Gamma|}(u, u') = t + d_{\Gamma}(x, x') + t'$ (gli altri casi sono del tutto analoghi); allora esiste in Γ un cammino $x, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = x'$ di lunghezza minima $m = d_X(x, x')$ da x a x' , i cui vertici sono tutti diversi da y e y' ; si definisce allora il segmento geodesico $\gamma : [0, R] \rightarrow |\Gamma|$, da u a u' , ponendo

$$\gamma(r) = \begin{cases} [(x, y), t - r] & \text{per } r \in [0, t] \\ [(x', y'), r - R + t'] & \text{per } r \in [R - t', R], \end{cases}$$

e "stendendo" isometricamente l'intervallo $[t, R - t'] = [t, t + 1] \cup \dots \cup [t + m - 1, t + m]$ a tratti lungo gli archi del cammino dato.

Osserviamo che, se Γ non è un albero, allora, diversamente ad esempio dagli spazi euclidei \mathbb{R}^n , tra due punti distinti di $|\Gamma|$ può distendersi più di un segmento geodesico. Omettiamo ulteriori dettagli, che costituirebbero la dimostrazione del punto (1) della seguente Proposizione; la dimostrazione del punto (2), che consiste in una verifica, e quella del punto (3), poco più che una constatazione, sono lasciate per esercizio.

Proposizione 4.5. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. Allora*

- (1) *la realizzazione geometrica $(|\Gamma|, d_{|\Gamma|})$ è uno spazio metrico geodesico;*
- (2) *l'immersione identica $V \rightarrow |\Gamma|$ è un'immersione isometrica ed una quasi-isometria di (V, d_Γ) in $(|\Gamma|, d_{|\Gamma|})$;*
- (3) *ogni automorfismo del grafo Γ si estende canonicamente ad un'isometria dello spazio metrico $|\Gamma|$.*

Il caso che ci riguarda maggiormente è quello di un grafo di Cayley Γ per un gruppo finitamente generato G ; dove l'azione per moltiplicazione a sinistra di G su Γ , che è un'azione per isometrie, si estende canonicamente ad un'azione di G , sempre per isometrie (lineari a tratti), sulla spazio geodesico $|\Gamma|$ (e si osservi che, in tali casi, G agisce liberamente su $|\Gamma|$). Nel seguito, è possibile che non faremo troppe distinzioni fra le due cose.

ESERCIZIO 4.8. Si completi la dimostrazione della Proposizione 4.5.

ESERCIZIO 4.9. Posto $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$, si provi che la realizzazione geometrica di $\Gamma[\mathbb{Z}^2, S]$ è isometrica al sottospazio di \mathbb{R}^2 ,

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ o } y \in \mathbb{Z}\}$$

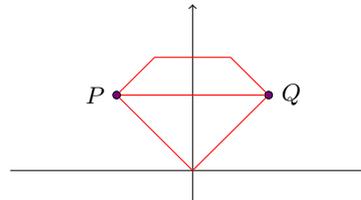
con la metrica indotta dalla metrica d_1 su \mathbb{R}^2 (vedi esercizio 4.3).

ESERCIZIO 4.10. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo e sia Γ° la sua suddivisione baricetrica. Si provi che le realizzazioni geometriche di Γ e Γ° sono quasi-isometriche.

ESERCIZIO 4.11. Sull'insieme \mathbb{R}^2 si consideri la metrica d_∞ definita da

$$d_\infty((x, y), (x', y')) = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}.$$

- 1) Si provi che (\mathbb{R}^2, d_∞) è uno spazio geodesico ma non *univocamente geodesico* (nel senso che non è necessariamente unico il segmento geodesico tra due diversi punti).



geodesiche in (\mathbb{R}^2, d_∞)

- 2) Si dica se lo spazio $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, d_\infty)$ è uno spazio geodesico.

4.3. Il Lemma di Milnor-Švarc

Il risultato principale dimostrato in questa sezione, il Lemma di Milnor-Švarc, è normalmente celebrato dagli intenditori come *l'osservazione fondamentale della Teoria Geometrica dei Gruppi*. Esso stabilisce una connessione diretta tra due delle prospettive principali di questa teoria: lo studio delle azioni (come isometrie) di gruppi su spazi metrici e l'indagine delle proprietà dei gruppi finitamente generati in quanto spazi metrici essi stessi; in soldoni, dice che se un gruppo opera con 'buone' proprietà su uno spazio metrico ben fatto, allora il gruppo è finitamente generato e quasi-isometrico allo spazio stesso; o, viceversa, che un gruppo finitamente generato G può agire con 'buone' proprietà su un unico spazio metrico ben fatto, a meno di quasi-isometria.

Per rendere pienamente intellegibile l'enunciato è necessario farlo precedere da alcune definizioni di natura topologica.

DEFINIZIONE. Uno spazio metrico (X, d) si dice *proprio* se per ogni $x \in X$ e $0 < R \in \mathbb{R}$ la palla chiusa $B(x, R) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq R\}$ è un insieme compatto nella topologia indotta dalla metrica d .

DEFINIZIONE. Un'azione $G \times X \rightarrow X$ di un gruppo G su uno spazio metrico X si dice

- *propriamente discontinua* se per ogni insieme compatto B di X l'insieme

$$\{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$$

è finito;

- *co-compatta* se per ogni $x_0 \in X$ esiste un raggio $R > 0$ tale X è contenuto nell'unione dei G -traslati della palla chiusa $B(x_0, R)$, ovvero

$$X \subseteq \bigcup_{g \in G} B(g \cdot x_0, R).$$

Esempio 4.2. Nella nostra prospettiva, l'esempio fondamentale di un'azione propriamente discontinua e co-compatta su uno spazio metrico proprio è quella di un gruppo finitamente generato G per moltiplicazione sinistra su un suo grafo di Cayley $\Gamma = \Gamma[G, S]$, ovvero sullo spazio (G, d_S) , con S un sistema di generatori finito di G (in questo caso, lo spazio è discreto, quindi i sottoinsiemi compatti sono i sottoinsiemi finiti).

Tale azione si estende ad un'azione di G sulla realizzazione geometrica $|\Gamma|$; in questo caso, lo spazio $|\Gamma|$ oltre che proprio è *geodesico*, e l'azione è ancora totalmente discontinua (ogni sottoinsieme compatto di $|\Gamma|$ contiene un numero finito di vertici di Γ) e co-compatta (i G -traslati di una palla chiusa di raggio 1 coprono $|\Gamma|$). \square

Esempio 4.3. L'azione del gruppo $G = \mathbb{Z}^2$ sullo spazio euclideo \mathbb{R}^2 per traslazione,

$$(z, z') \cdot (x, y) = (x + z, y + z') \quad \forall z, z' \in \mathbb{Z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è propriamente discontinua e co-compatta; mentre l'azione di \mathbb{Z} su \mathbb{R}^2 per traslazione orizzontale,

$$z \cdot (x, y) = (x + z, y) \quad \forall z \in \mathbb{Z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è propriamente discontinua ma non co-compatta. \square

Esempio 4.4. Sia R un numero reale non razionale e sia $\alpha \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ la rotazione di angolo $2\pi/R$ centrata nell'origine; allora $G = \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$. L'azione naturale di G sulla palla $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ è co-compatta ma non propriamente discontinua. \square

Possiamo ora enunciare e provare il Lemma di Milnor-Švarc; si osservi che nessuna ipotesi viene fatta sul gruppo G , ma solo sullo spazio X e sull'azione.

Teorema 4.6 (Lemma di Milnor-Švarc). *Sia G un gruppo che agisce per isometrie su uno spazio metrico non vuoto, proprio e geodesico (X, d) . Se tale azione è propriamente discontinua e co-compatta, allora G è finitamente generato e per ogni $x \in X$ l'applicazione*

$$\begin{aligned} G &\rightarrow X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

è una quasi-isometria (dove la metrica su G è la word-metric per un sistema finito di generatori).

Dimostrazione. Dato un punto $x_0 \in X$, sia $0 < R \in \mathbb{R}$ tale che X è contenuto nell'unione dei G -traslati della palla chiusa $B := B(x_0, R)$. Per ipotesi, B è un sottoinsieme compatto di X e l'insieme

$$S = \{g \in G \mid g \neq 1, B \cap g \cdot B \neq \emptyset\}$$

è finito (si osservi anche che $S = S^{-1}$). Poniamo

$$r := \inf\{d(B, g \cdot B) \mid g \in G \setminus (S \cup \{1\})\},$$

e mostriamo che $r > 0$. Per questo, si osservi che per ogni $0 < \rho \in \mathbb{R}$, $g \in G$ si ha

$$d(B, g \cdot B) \leq \rho \quad \Rightarrow \quad B(x_0, R + \rho) \cap g \cdot B(x_0, R + \rho) \neq \emptyset;$$

dunque, per la discontinuità propria dell'azione, esiste al più un numero finito di elementi $g \in G$ per cui $d(B, g \cdot B) \leq \rho$. Preso un qualsiasi $g_0 \in G \setminus (S \cup \{1\})$, ed osservato che, per la compattezza di B , $d(B, g_0 \cdot B) = \inf\{d(x, g_0 \cdot y) \mid x, y \in B\} > 0$, si conclude che solo un numero finito di traslati $g \cdot B$, disgiunti da B , hanno distanza minore (e positiva) da B . Quindi, banalmente, r esiste ed è positivo.

Proviamo ora che S è un sistema di generatori di G , e che per ogni $g \in G$,

$$\ell_S(g) \leq d(x_0, g \cdot x_0)/r + 1. \tag{4.3}$$

Se $g \in S \cup \{1\}$ la cosa è ovvia. Sia $1 \neq g \in G \setminus S$ e sia $L = d(x_0, g \cdot x_0)$; allora $L \geq 2R + r \geq R + r$, quindi esiste un minimo intero $m \geq 2$ tale che

$$R + (m - 1)r \leq L < R + mr. \tag{4.4}$$

Sia $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ un segmento geodesico da x_0 a $g \cdot x_0$. Posto $\varepsilon = \frac{R+mr-L}{m}$, siano

$$x_1 = \gamma(R), \quad x_{m+1} = g \cdot x_0$$

e, per per $k = 1, \dots, m - 1$,

$$x_{k+1} = \gamma(R + k(r - \varepsilon))$$

Abbiamo quindi $m+1$ punti, $x_1, x_2, \dots, x_{m+1} = g \cdot x_0$, distribuiti lungo (l'immagine di) γ tali che

$$d(x_0, x_1) = R \quad \text{e} \quad d(x_i, x_{i+1}) < r \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Esistono quindi elementi $1 = g_0, g_1, \dots, g_m = g$ tali che $x_{i+1} \in g_i \cdot B$, per $i = 0, \dots, m$. Per $1 \leq i \leq k$ poniamo $s_i = g_{i-1}^{-1}g_i$; allora

$$d(B, s_i \cdot B) = d(g_{i-1} \cdot B, g_i \cdot B) \leq d(x_i, x_{i+1}) < c,$$

quindi $s_i \in S$. Ora, tenendo conto che $g_0 = 1$,

$$g = g_m = (g_0^{-1}g_1)(g_1^{-1}g_2) \cdots (g_{m-1}^{-1}g_m) = s_1 s_2 \cdots s_m \in \langle S \rangle,$$

e, dalla (4.4), $\ell_S(g) \leq m \leq d(x_0, g \cdot x_0)/r + 1$, che è quello che si voleva dimostrare.

Sia ora d_S la metrica su G associata a S , e sia $f : G \rightarrow X$ la funzione definita da $f(g) = g \cdot x_0$, per ogni $g \in G$. Per ogni $h, g \in G$, poiché G agisce per isometrie su X ,

$$d(f(g), f(h)) = d(g \cdot x_0, h \cdot x_0) = d(x_0, (g^{-1}h) \cdot x_0);$$

quindi, per quanto provato sopra:

$$d(f(g), f(h)) \geq r \ell_S(g^{-1}h) - r = r d_S(g, h) - r. \quad (4.5)$$

Ora, per definizione di S , $d(x_0, s \cdot x_0) \leq 2R$ per ogni $s \in S$. Se $g \in G$, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_0, sg \cdot x_0) \leq d(x_0, s \cdot x_0) + d(s \cdot x_0, sg \cdot x_0) \leq 2R + d(x_0, g \cdot x_0).$$

Un'ovvia induzione conduce a $d(x_0, g \cdot x_0) \leq 2R \ell_S(g)$, per ogni $g \in G$. Quindi

$$d(f(g), f(h)) = d(x_0, (g^{-1}h) \cdot x_0) \leq 2R \ell_S(g^{-1}h) = 2R \cdot d_S(g, h),$$

per ogni $g, h \in G$. In congiunzione con (4.5) questo prova che f è un'inclusione quasi-isometrica. Che infine f sia quasi-invertibile, e quindi una quasi-isometria, deriva, per il Lemma 4.4, dal fatto che per ogni $x \in X$ esiste un $g \in G$ tale che $d(x, g \cdot x_0) \leq R$. Questo completa la dimostrazione. \square

Esempio 4.5. L'azione del gruppo $SL(2, \mathbb{Z})$ sulla realizzazione geometrica $|T\mathcal{F}|$ dell'albero di Farey è totalente discontinua e co-compatta, quindi $SL(2, \mathbb{Z})$ è quasi-isometrico a $|T\mathcal{F}|$ (e $T\mathcal{F}$). \square

Commensurabilità. Come prima applicazione del Lemma di Milnor-Švarc vediamo un criterio generale, ancora relativamente semplice ma molto utile, di quasi-isometria.

DEFINIZIONE. Due gruppi G e G' si dicono *commensurabili* se esistono sottogruppi $H \leq G$ e $H' \leq G'$ di indice finito e tali che $H \simeq H'$. I gruppi G e G' si dicono *quasi-commensurabili* se esistono sottogruppi $N \trianglelefteq H \leq G$, $N' \trianglelefteq H' \leq G'$, con N, N' finiti, $|G : H|, |G' : H'|$ finiti e $H/N \simeq H'/N'$.

Proposizione 4.7. Se G e G' sono gruppi finitamente generati e quasi-commensurabili allora $G \sim_{QI} G'$.

Dimostrazione. Sarà sufficiente provare le seguenti due affermazioni, per un gruppo finitamente generato G :

- (i) se H è un sottogruppo di indice finito di G , allora $H \sim_{QI} G$;
- (ii) se N è un sottogruppo normale e finito di G , allora $G/N \sim_{QI} G$.

Nel caso (i), sia S un sistema finito di generatori di G e sia X la realizzazione geometrica del grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$. X è uno spazio proprio e geodesico, e l'azione di G su X soddisfa le ipotesi del Lemma di Milnor–Švarc. In particolare anche l'azione di H su X ereditata da quella di G è propriamente discontinua. Inoltre, se T è un sistema di rappresentati delle classi laterali destre di G modulo H , allora T è finito ed esiste $R > 0$ tale che $T \subseteq B(1, R)$, e poichè $HT = G$ si ha

$$\bigcup_{h \in H} h \cdot B(1, R) = X,$$

dunque l'azione di H su X è co-compatta. Per Milnor–Švarc, $H \sim_{QI} X \sim_{QI} G$.

Nel caso (ii) si considera la realizzazione geometrica X di un grafo di Cayley $\Gamma = \Gamma[G/N, S]$. Mediante la proiezione $G \rightarrow G/N$ è definita una azione di G per moltiplicazione a sinistra su Γ , il cui nucleo è N , e quindi una azione su X che è chiaramente co-compatta. Tale azione è anche completamente discontinua perché tale è quella di G/N e N è finito. Per Milnor–Švarc, $G \sim_{QI} X \sim_{QI} G/N$. \square

Esempio 4.6. Il gruppo modulare $M = PSL(2, \mathbb{Z}) \simeq C_2 * C_3$ è il quoziente, modulo un sottogruppo di ordine 2, del gruppo $SL(2, \mathbb{Z})$ che, a sua volta, contiene un sottogruppo di indice finito isomorfo al gruppo libero F_2 . Quindi, M è quasi-commensurabile, e dunque quasi-isometrico, a F_2 . \square

Esempio 4.7. È piuttosto ben noto che, poiché \mathbb{Q} è un campo di ordine almeno 4, i sottogruppi normali propri del gruppo $G = SL(2, \mathbb{Q})$ sono $\{1\}$ e $Z = \{1, -1\}$; in particolare, G non ammette sottogruppi di indice finito. Ne segue che G e $PSL(2, \mathbb{Q}) = G/Z$ sono quasi-commensurabili ma non commensurabili. \square

Nell'esempio di sopra, il gruppo $G = SL(2, \mathbb{Q})$ non è finitamente generato; esempi di gruppi finitamente generati che sono quasi-commensurabili ma non commensurabili esistono, ma sono più complicati.

Esistono poi molte coppie di gruppi quasi-isometrici ma non quasi-commensurabili; un metodo per trovarne è descritto nell'esercizio 4.17.

ESERCIZIO 4.12. Si provi che non è possibile, nelle conclusioni del Lemma di Milnor–Švarc, rimpiazzare "quasi-isometria" con "equivalenza bi-lipschitziana". [sugg.: considerare l'azione del gruppo \mathbb{Z} sullo spazio \mathbb{R} .]

ESERCIZIO 4.13. Si provi che \mathbb{R} (con la metrica standard) non è quasi isometrico a $[0, +\infty)$.

ESERCIZIO 4.14. Siano A, B gruppi finiti non-banali. Si provi che il prodotto libero $A * B$ è quasi-isometrico a \mathbb{Z} oppure a F_2 . [sugg.: ricordarsi dell'esercizio 3.39.]

ESERCIZIO 4.15. Siano $2 \leq m, n \in \mathbb{N}$. Si provi che i gruppi di Baumslag-Solitar $BS(1, m)$ e $BS(1, n)$ (vedi sezione 3.8) sono quasi-isometrici.

ESERCIZIO 4.16. Sia H il gruppo di isometrie dello spazio euclideo \mathbb{R}^2 generato da tre riflessioni lungo i lati di un triangolo equilatero. Si provi che H agisce in modo totalmente discontinuo e co-compatto su \mathbb{R}^2 . Si deduca che H contiene un sottogruppo finito isomorfo a \mathbb{Z}^2 .

4.4. Invarianti per quasi-isometria

Questa breve sezione, in cui citeremo senza dimostrazioni una serie di risultati di natura omogenea, serve principalmente da motivazione per il seguito del corso. Se un'ipotetica classificazione dei gruppi finitamente generati a meno di quasi-isometria è, come si può indovinare, assolutamente fuori portata, sussistono importanti e forse inaspettati legami tra la geometria del tipo di quasi-isometria di un gruppo finitamente generato e alcune proprietà che definiremo piuttosto come algebriche.

Al fine di evidenziare questi legami, diciamo che una classe (o una proprietà⁴) di gruppi \mathfrak{X} è *geometrica* se per ogni coppia di gruppi finitamente generati G, H , se G è in \mathfrak{X} e $H \sim_{QI} G$ allora anche H è in \mathfrak{X} .

Teorema 4.8. *Sono geometriche le seguenti classi di gruppi:*

- 1) *Finiti;*
- 2) *Virtualmente ciclici infiniti;*
- 3) *Virtualmente abeliani;*
- 4) *Virtualmente nilpotenti;*
- 5) *Virtualmente liberi;*
- 6) *Finitamente presentati;*
- 7) *Iperbolici;*
- 8) *Amenabili.*

Ricordo (sezione 1.4) che un gruppo G è virtualmente- \mathfrak{X} se G ha un sottogruppo di indice finito appartenente a \mathfrak{X} . A parte per la 1), che abbiamo già osservato verso la fine della sezione 4.1, le dimostrazioni delle affermazioni in questo enunciato sono tutt'altro che ovvie⁵; nella sezione 4.6 dimostreremo la 2) che è relativamente accessibile. Le classi ai punti 7) e 8), che non sono ancora state definite, costituiranno l'argomento della prossima parte del corso.

Ancora, supponiamo che ad ogni gruppo finitamente generato G in una data classe \mathfrak{X} sia associato un elemento $\nu(G)$ di un certo insieme V (spesso $V = \mathbb{N}$) in modo che $\nu(G) = \nu(H)$ se $G \simeq H$; si dice allora che $\nu(G)$ è un invariante di G nella classe⁶ \mathfrak{X} (ad esempio, la cardinalità minima $d(G)$ di un sistema di generatori di G è un invariante nella classe di tutti i gruppi finitamente generati); un invariante si dice quindi *invariante geometrico* se per ogni coppia G, H di gruppi finitamente generati nella classe \mathfrak{X} ,

$$G \sim_{QI} H \Rightarrow \nu(G) = \nu(H).$$

Esempio 4.8. Sia \mathfrak{F} la classe dei gruppi liberi di rango finito. Vediamo che il rango non è un invariante geometrico nella classe \mathfrak{F} . Sia F_2 il gruppo libero di rango 2 e, dato $m \geq 2$ sia H un sottogruppo di indice m in F_2 (esiste: perché?); allora, per il Teorema 3.8, H è un gruppo libero di rango $2m - m + 1 = m + 1$. Questo mostra che per ogni

⁴Una classe, o proprietà, di gruppi è una famiglia di gruppi chiusa per isomorfismo.

⁵A complemento di questa affermazione, e da confrontare con il punto 4) del Teorema, si veda, più avanti, il Teorema 4.10.

⁶Una classe è essa stessa un invariante a valori 0,1 nella famiglia di tutti i gruppi finitamente generati.

$n \geq 3$, F_2 ammette un sottogruppo di indice finito isomorfo a F_n . Per la Proposizione 4.7, F_2 e F_n sono quasi-isometrici; di conseguenza, per ogni coppia di interi $n, m \geq 2$, $F_n \sim_{QI} F_m$, mostrando che il rango non è un invariante geometrico nella classe \mathfrak{F} . Questa osservazione ha come corollario che per ogni coppia di interi $n, m \geq 2$, l'albero n -regolare T_n è quasi isometrico (con la metrica di grafo) all'albero regolare T_m . \square

Esempi di invarianti geometrici sono individuati nel seguente enunciato (e definiti subito dopo)⁷.

Proposizione 4.9. *Il numero di ends $e(G)$ e il tipo di crescita $\gamma(G)$ sono invarianti geometrici nella classe di tutti i gruppi finitamente generati.*

Per quanto riguarda il numero di ends, vedremo la dimostrazione nella sezione ???. Il concetto di *tipo di crescita* di un gruppo finitamente generato è invece uno di quelli fondamentali; prendiamo l'occasione di definirlo nella prossima sezione, con l'intenzione, anche in questo caso, di riprenderlo più avanti per studiarlo in modo un po' approfondito.

Concludiamo questa sezione dimostrando un risultato di A. Dyubina, che va in direzione contraria rispetto all'enunciato in 4.8.

Teorema 4.10. *La classe dei gruppi virtualmente risolubili non è geometrica.*

La dimostrazione discende abbastanza agevolmente dalla seguente osservazione.

Proposizione 4.11. *Siano A e B gruppi finiti. Se $|A| = |B|$ allora il prodotto intrecciato $A \wr \mathbb{Z}$ è quasi-isometrico a $B \wr \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Sia $A^\omega = \{f \mid a : \mathbb{Z} \rightarrow A, |\text{supp}(f)| < \infty\}$ la base del prodotto $A \wr \mathbb{Z}$ e, similmente, B^ω quella di $B \wr \mathbb{Z}$. Quindi, $A \wr \mathbb{Z} = A^\omega \rtimes \mathbb{Z}$ dove l'azione di \mathbb{Z} su A^ω è quella di "shift", ovvero, per ogni $f \in A^\omega, z, t \in \mathbb{Z}$,

$$f^z(t) = f(z - t)$$

e similmente per $B \wr \mathbb{Z}$. Sia quindi $\phi : A \rightarrow B$ una biezione tale che $\phi(1_A) = 1_B$, e consideriamo poi la funzione $\bar{\phi} : A \wr \mathbb{Z} \rightarrow B \wr \mathbb{Z}$, definita da

$$\bar{\phi}(f, t) = (\phi \circ f, t),$$

per ogni $(f, t) \in A \wr \mathbb{Z}$. $\bar{\phi}$ è abbastanza chiaramente una biezione.

Per ogni $a \in A$ e $b \in B$ definiamo $\bar{a} \in A^\omega, \bar{b} \in B^\omega$ nel modo solito,

$$\bar{a}(z) = \begin{cases} a & \text{se } z = 0, \\ 1_A & \text{se } z \neq 0 \end{cases} \quad \bar{b}(z) = \begin{cases} b & \text{se } z = 0, \\ 1_B & \text{se } z \neq 0 \end{cases}$$

Si ha quindi che $S_A = \{\bar{a}, 0 \mid 1 \neq a \in A\} \cup \{(\bar{1}, 1)\}$ e $S_B = \{\bar{b}, 0 \mid 1 \neq b \in B\} \cup \{(\bar{1}, 1)\}$ sono sistemi di generatori, rispettivamente, di $A \wr \mathbb{Z}$ e $B \wr \mathbb{Z}$ (si osservi anche che $|S_A| = |S_B|$).

Proviamo che $\bar{\phi}$ è un isomorfismo tra i grafi di Cayley $\Gamma_A = \Gamma[A \wr \mathbb{Z}, S_A]$ e $\Gamma_B = \Gamma[B \wr \mathbb{Z}, S_B]$; da questo l'asserzione di quasi-isometria segue ovviamente.

Abbiamo già osservato che $\bar{\phi}$ è una biezione; verifichiamo che conserva la relazione di adiacenza. Siano $(f, t), (g, t')$ adiacenti in Γ_A ; si verificano due casi:

- (1) $(g, t') = (f, t)(\bar{1}, \pm 1) = (f, t \pm 1)$,
- (2) $(g, t') = (f, t)(\bar{a}, 0) = (f\bar{a}^t, t)$, per qualche $a \in A \setminus \{1_A\}$.

⁷Per un altro esempio si veda più avanti la Proposizione 4.15.

Nel caso (1) si ha

$$\bar{\phi}(g, t') = (\phi \circ f, t \pm 1) = (\phi \circ f, t)(\bar{1}, \pm 1) = \bar{\phi}(f, t)(\bar{1}, \pm 1),$$

che è adiacente a $\bar{\phi}(f, t)$ in Γ_B .

Nel caso (2) si ha

$$\bar{\phi}(g, t') = (\phi \circ (f\bar{a}^t), t).$$

Poniamo $b = \phi(f(t))^{-1}\phi(f(t)a)$, osservando che, poiché $a \neq 1_A$ e ϕ è un biezione, risulta $b \neq 1_B$. Allora, per ogni $z \in \mathbb{Z}$,

$$(\phi \circ (f\bar{a}^t))(z) = \phi(f\bar{a}^t(z)) = \begin{cases} \phi(f(z)) & \text{se } z \neq t, \\ \phi(f(t)a) = \phi(f(t))b & \text{se } z = t \end{cases}$$

quindi, $\phi \circ (f\bar{a}^t) = (\phi \circ f)\bar{b}^t$, e dunque

$$\bar{\phi}(g, t') = ((\phi \circ f)\bar{b}^t, t) = (\phi \circ f, t)(\bar{b}, 0) = \bar{\phi}(f, t)(\bar{b}, 0),$$

che è adiacente a $\bar{\phi}(f, t)$ in Γ_B . Poiché $\bar{\phi}$ è una biezione tra gli insiemi dei vertici di Γ_A e Γ_B , e questi sono grafi regolari con lo stesso grado, si conclude che ϕ è un isomorfismo di grafi. \square

Dimostrazione del Teorema 4.10. Sia A un gruppo abeliano di ordine 60 (ad esempio il gruppo ciclico) e sia $B = A_5$ (il gruppo alterno su 5 oggetti; si ricordi che A_5 è semplice e $|A_5| = 60$). Per la Proposizione 4.11, $A \wr \mathbb{Z}$ e $B \wr \mathbb{Z}$ sono quasi-isometrici. Tuttavia, $A \wr \mathbb{Z}$ è risolubile (con le notazioni della dimostrazione precedente, A^ω e $(A \wr \mathbb{Z})/A^\omega \simeq \mathbb{Z}$ sono abeliani), mentre $B \wr \mathbb{Z}$ non è virtualmente risolubile. Sia, infatti, H un sottogruppo di indice finito di $B \wr \mathbb{Z}$, che possiamo assumere essere un sottogruppo normale; allora (ancora con le notazioni della dimostrazione precedente) $N = H \cap B^\omega$ è un sottogruppo normale di indice finito in $B^\omega = \text{Dir}_{z \in \mathbb{Z}} B_z$ (con $B_z \simeq A_5$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$), in particolare $N \neq \{1\}$. Poiché, chiaramente, $Z(B^\omega) = \{1\}$, esiste $z \in \mathbb{Z}$ con $[B_z, N] \neq \{1\}$, e siccome anche B_z è normale in B^ω , $[B_z, N] \leq B_z$, dunque, per la semplicità di B_z ,

$$B_z = [B_z, N] \leq N,$$

quindi N , e di conseguenza H , non può essere risolubile. \square

ESERCIZIO 4.17. Sia A un gruppo non-banale; si provi che il prodotto intrecciato $W = A \wr \mathbb{Z}$ non ammette sottogruppi normali finiti diversi da $\{1\}$. Applicando il Teorema 4.10 si trovino due gruppi finitamente generati quasi-isometrici ma non quasi-commensurabili.

4.5. Crescita (definizioni ed esempi)

Sia G un gruppo finitamente generato, S un suo sistema finito di generatori e, per $g \in G$, $\ell_S(g)$ la lunghezza di g in S (ricordo che $\ell_S(g)$ è la distanza del vertice g dal vertice 1 nel grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ è definita la palla chiusa di raggio n centrata in 1,

$$B_G^S(n) = \mathcal{B}_S(1, n+1) = \{g \in G \mid \ell_S(g) \leq n\}. \quad (4.6)$$

Poiché S è finito, per ogni $n \geq 0$,

$$\gamma_G^S(n) = |B_G^S(n)| \quad (4.7)$$

è un intero positivo. La funzione $\gamma_G^S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ si chiama *funzione di crescita* del gruppo G rispetto al sistema di generatori S .

È chiaro che, fissato il gruppo G , la funzione di crescita dipende dal sistema di generatori scelto; ad esempio, nel gruppo \mathbb{Z} la funzione di crescita rispetto al sistema di generatori

$\{1\}$ è data da $\gamma_{\mathbb{Z}}^{\{1\}}(n) = 2n + 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre la funzione di crescita rispetto al sistema $\{2, 3\}$ vale: $\gamma_{\mathbb{Z}}^{\{2,3\}}(0) = 1$, $\gamma_{\mathbb{Z}}^{\{2,3\}}(1) = 5$ e

$$\gamma_{\mathbb{Z}}^{\{2,3\}}(n) = 6n + 1 \quad (4.8)$$

per ogni $n \geq 2$. Tuttavia, funzioni di crescita in uno stesso gruppo definite da sistemi diversi (finiti) di generatori, sono strettamente correlate nel senso che ora descriviamo.

Date due funzioni crescenti $\gamma, \mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, scriviamo $\gamma \preceq \mu$, se esistono due costanti positive C, D ed un $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\gamma(n) \leq D\mu(Cn)$$

per ogni $n \geq n_0$. Diciamo quindi che γ e μ sono (*asintoticamente*) *equivalenti*, scrivendo $\gamma \sim \mu$, se $\gamma \preceq \mu$ e $\mu \preceq \gamma$.

È immediato verificare che la relazione \preceq definisce un pre-ordine sull'insieme delle funzioni $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; quindi, \sim è un'equivalenza e \preceq induce una relazione d'ordine sulle classi, ovvero

$$[\gamma]_{\sim} \leq [\mu]_{\sim} \text{ se } \gamma \preceq \mu.$$

Proposizione 4.12. *Siano G, H gruppi finitamente generati quasi-isometrici. Allora per ogni coppia di sistemi finiti di generatori S di G e T di H , si ha $\gamma_G^S \sim \gamma_H^T$.*

Dimostrazione. Poniamo $X = \Gamma[G, S]$ e $Y = \Gamma[H, T]$. Sia $f : X \rightarrow Y$ una (λ, C) -quasi-isometria, e sia $d = d_Y(f(1), 1)$.

Sia $n \geq C + d$, allora per ogni $g \in B_G^S(n)$,

$$d_Y(f(g), 1) \leq d_Y(f(g), f(1)) + d_Y(f(1), 1) \leq \lambda d_X(g, 1) + C + d \leq (\lambda + 1)n;$$

quindi

$$f(B_G^S(n)) \subseteq B_H^T((\lambda + 1)n). \quad (4.9)$$

Inoltre, se $x, x' \in G$ sono tali che $f(x) = f(x')$, allora $\lambda^{-1}d_X(x, x') - C \leq 0$ e dunque $d_X(x^{-1}x', 1) = d_X(x, x') \leq \lambda C$; in particolare, se $D = \gamma_G^S([\lambda C])$, allora il numero di elementi di G la cui immagine coincide con $f(x)$ non supera D . In congiunzione con (4.9) si ottiene, per ogni $n \geq C + d$,

$$\gamma_G^S(n) = |B_G^S(n)| \leq D|f(B_G^S(n))| \leq D|B_H^T((\lambda + 1)n)| = D\gamma_H^T((\lambda + 1)n);$$

dunque $\gamma_G^S \preceq \gamma_H^T$. La relazione inversa si ottiene per simmetria, e pertanto $\gamma_G^S \sim \gamma_H^T$. \square

Corollario 4.13. *Siano S e U sistemi finiti di generatori del gruppo G ; allora le funzioni di crescita γ_G^S e γ_G^U sono equivalenti.*

DEFINIZIONE. Se S è un sistema finito di generatori del gruppo G , la classe d'equivalenza $\gamma_G := [\gamma_G^S]_{\sim}$ è detto *tipo di crescita* di G .

La Proposizione 4.12 può essere dunque riformulata nel modo seguente.

Proposizione 4.14. *Il tipo di crescita è un invariante geometrico nella classe di tutti i gruppi finitamente generati.*

Crescita polinomiale. Osserviamo ora che se f e g sono polinomi reali, allora le funzioni $f(n)$ e $g(n)$ sono equivalenti se e soltanto se $\deg f = \deg g$; quindi, al variare di $1 \leq d \in \mathbb{N}$, le funzioni $n \mapsto n^d$ costituiscono un sistema di rappresentanti modulo \sim per le funzioni polinomiali. Più in generale, per ogni $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n^\alpha \sim n^\beta$ se e solo se $\alpha = \beta$.

DEFINIZIONE. Si dice che un gruppo finitamente generato G ha *crescita polinomiale* se esiste un intero $d > 0$ tale che $\gamma_G = [n^d]$.

Esempio 4.9. Sia $A \simeq \mathbb{Z}^r$ e $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un suo sistema indipendente di generatori. Allora ogni elemento $a \in A$ si scrive in modo unico come $a = x_1^{\beta_1(g)} \dots x_r^{\beta_r(g)}$ con $(\beta_1(g), \dots, \beta_r(g)) \in \mathbb{Z}^r$. Quindi $\ell_{\mathcal{X}}(a) = \sum_{i=1}^r |\beta_i(g)|$ e, per ogni $n \geq 1$,

$$\gamma_A^{\mathcal{X}}(n) = |\{(\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{Z}^r \mid |\beta_1| + \dots + |\beta_r| \leq n\}|.$$

Mediante una minorazione ed una maggiorazione abbastanza immediate, ma sufficienti ai nostri fini, si può affermare che, per ogni $n \geq 1$,

$$\left(\frac{n}{r} - 1\right)^r \leq \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor^r \leq \gamma_A^{\mathcal{X}}(n) \leq (2n + 1)^r$$

(per $r = 2$, facendo i conti esatti, si trova $\gamma_{\mathbb{Z}^2}(n) = n^2 + (n + 1)^2$, mentre per il valore esatto in generale si veda l'esercizio 4.19). Quindi il tipo di crescita di $A = \mathbb{Z}^r$ è $[n^r]$. \square

Dal Teorema di struttura dei gruppi abeliani finitamente generati (Teorema 1.8), segue che per ogni tal gruppo G è univocamente determinato il numero $r = r_0(G)$ di fattori infiniti in una decomposizione come prodotto diretto di gruppi ciclici (quindi $r = 0$ se e solo se G è finito). Ora, a partire dalle considerazioni nell'esempio 4.9, tenendo presente le Proposizioni 4.7 e 4.12, possiamo quindi ricavare le seguenti osservazioni.

Proposizione 4.15. 1) *Ogni gruppo abeliano finitamente generato ha crescita polinomiale.*

2) *Il rango r_0 è un invariante geometrico nella classe dei gruppi abeliani finitamente generati; ancor meglio, due gruppi abeliani A e B sono quasi-isometrici se e solo se $r_0(A) = r_0(B)$.*

Il punto 2) rende anche conto dell'affermazione fatta nella sezione 4.1, che per ogni coppia di interi $n, m \geq 1$, gli spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m sono quasi-isometrici se e solo se $n = m$.

Crescita esponenziale. All'altra estremità dei possibili tipi di crescita si colloca la *crescita esponenziale*. Partiamo dalla constatazione che tutte le funzioni esponenziali, cioè del tipo a^n , con $1 < a \in \mathbb{R}$, sono equivalenti; dunque equivalenti alla funzione 2^n . Si dice che un gruppo finitamente generato G ha *crescita esponenziale* se $\gamma_G = [2^n]$. L'esempio principale di gruppi a crescita esponenziale è costituito dai gruppi liberi (di rango finito).

Esempio 4.10. Sia $r \geq 1$ e sia X un sistema libero di generatori del gruppo libero F_r . Denotiamo con $\sigma_r(n)$ il numero di elementi di F_r la cui X -lunghezza è esattamente n ; poiché il grafo di Cayley di F_n rispetto a X è un albero regolare di grado $2r$ (Proposizione 3.5), si vede che $\sigma_r(0) = 1$, $\sigma_r(1) = 2r$ e, per $n \geq 2$,

$$\sigma_r(n) = (2r - 1)\sigma_r(n - 1) = 2r(2r - 1)^{n-1},$$

quindi per $n \geq 1$,

$$\gamma_{F_r}^X(n) = \sum_{i=0}^n \sigma_r(i) = 1 + 2r \sum_{j=0}^{n-1} (2r-1)^j = 1 + 2r \frac{(2r-1)^n - 1}{(2r-1) - 1} \geq (2r-1)^n.$$

In particolare, per $r = 2$ si ha $\gamma_{F_2}(n) = 2 \cdot 3^n - 1$. A questo punto, non è difficile provare (lo si faccia per esercizio) che, per ogni r , $\gamma_{F_r}(n) \sim 2^n$. \square

L'esempio di sopra mostra quindi che ogni gruppo libero di rango finito $r \geq 2$ ha crescita esponenziale. È chiaro che, rispetto alla relazione d'ordine definita prima, quella esponenziale è la massima crescita possibile per gruppi finitamente generati. La crescita esponenziale non implica tuttavia, come forse si sarebbe portati a credere, che il sistema di generatori in questione sia prossimo ad essere libero. Ad esempio, vediamo come il gruppo del Lampionario, che è abeliano per ciclico, abbia crescita esponenziale.

Esempio 4.11. Il gruppo del lampionario L_2 è il prodotto intrecciato $C_2 \wr \mathbb{Z}$; che a sua volta vediamo come il prodotto demidiretto $L_2 = B \rtimes \langle x \rangle$ dove B è l'insieme delle funzioni $\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ a supporto finito e x la traslazione $z \mapsto z + 1$. Seguendo le notazioni introdotte nella sezione 2.7, posto $\mathbf{a} = (\delta_{0z})_{z \in \mathbb{Z}}$ (δ_{ij} il delta di Kronecker) allora $X = \{\mathbf{a}, x\}$ è un sistema di generatori di L_2 . Per ogni $\mathbf{b} \in B$, come osservato nella sezione 2.7, formula (2.6), se il supporto di \mathbf{b} è contenuto in $[-n, n]$, allora

$$\ell_X(\mathbf{b}) \leq 6n + 1. \quad (4.10)$$

Ora, il numero di funzioni $\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ il cui supporto è contenuto in $[-n, n]$ è chiaramente 2^{2n+1} . Da (2.6) segue pertanto, per $m \geq 4$,

$$\gamma_{L_2}^X(m) \geq 2^{\frac{m-1}{3}+1} = 2 \cdot 2^{\frac{m}{3}};$$

quindi $2^n \preceq \gamma_{L_2}^X$, e dunque $\gamma_{L_2} = [2^n]$. \square

Come detto, lo studio della crescita di gruppi finitamente generati è un argomento centrale in teoria geometrica dei gruppi, ricco di problemi e risultati di grande interesse, e ci torneremo più avanti.

ESERCIZIO 4.18. Si dimostri la correttezza della formula (4.8).

ESERCIZIO 4.19. Dato $r \geq 1$, sia $A = Z^r$, e $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ un suo sistema di generatori indipendenti. Si provi che, per ogni $n \geq 1$,

$$\gamma_A^X(n) = \sum_{i=0}^r 2^i \binom{r}{i} \binom{n}{i}.$$

ESERCIZIO 4.20. Siano G, H gruppi finitamente generati e X, Y sistemi di generatori finiti, rispettivamente, di G e di H . Posto $D = (X \cup \{1\}) \times (Y \cup \{1\})$, si provi che

$$\gamma_{G \times H}^D \sim \gamma_G^X \cdot \gamma_H^Y.$$

ESERCIZIO 4.21. Il gruppo di Heisenberg discreto è il gruppo:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

In H , siano

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Si provi che $H = \langle a, b \rangle$, che $\langle c \rangle = Z(H)$ e che $H/Z(H) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Questo, in particolare, dice che H è un gruppo nilpotente.
- 2) Si provi che ogni $g \in H$ si scrive in modo unico nella forma $g = a^m b^n c^t$ con $m, n, t \in \mathbb{Z}$.
- 3) Utilizzando il sistema di generatori $S = \{a, b, c\}$ si provi che H ha crescita polinomiale.

4.6. Ends e gruppi virtualmente ciclici

In questa sezione dimostriamo un paio di risultati enunciati nelle sezioni precedenti. Il primo è che il numero di ends $e(G)$ di un gruppo finitamente generato è un invariante geometrico.

Teorema 4.16. *Siano G, H gruppi finitamente generati; se G e H sono quasi-isometrici allora $e(G) = e(H)$.*

Dimostrazione. Siano G e H gruppi finitamente generati. Proviamo che se esiste una quasi-isometria $G \rightarrow H$ allora $e(H) \leq e(G)$. Da questo discende chiaramente il Teorema. Siano dunque S e T sistemi finiti di generatori, rispettivamente, di G e H , e sia

$$f : (G, d_S) \rightarrow (H, d_T)$$

una (λ, C) -quasi isometria, con $\lambda \geq 1, C \geq 0$. A meno di traslazione per un elemento di H possiamo supporre $f(1_G) = 1_H$. Per ogni $n \geq 1$, poniamo $M = M(n) = \lambda(n + \lambda + 2C)$. Sia X l'insieme dei vertici di una componente connessa infinita di $G \setminus B_S(1, M)$. Quindi, per ogni $g \in X$, $\ell_S(g) > M$ e

$$\ell_T(f(g)) = d_T(1, f(g)) \geq \lambda^{-1}d_S(1, g) - C = \lambda^{-1}\ell_S(g) - C > \lambda^{-1}M + C,$$

e quindi $f(X) \subseteq H \setminus B_T(1, \lambda^{-1}M - C) = H \setminus B_T(1, n + \lambda - C)$. Inoltre, se $g, g' \in X$ sono adiacenti (cioè $d_S(g, g') = 1$) allora

$$d_T(f(g), f(g')) \leq \lambda d_S(g, g') + C = \lambda + C;$$

ed esiste quindi in H un cammino da $f(g)$ a $f(g')$ di lunghezza al più $\lambda + C$, cui vertici hanno quindi, per la disuguaglianza triangolare, lunghezza maggiore di

$$\min\{\ell_T(f(g)), \ell_T(f(g'))\} - (\lambda + C) > n + \lambda + C - (\lambda + C) = n;$$

dunque $f(g), f(g')$ sono connessi da un cammino in H che giace interamente fuori dalla palla $B_T(1, n)$. Questo prova che $f(X)$ è contenuta in una unica componente connessa $f(X)^\circ$ di $H \setminus B_T(1, n)$. Poiché X è infinito, dal Lemma 4.3, segue che $f(X)^\circ$ è infinita. Dal Lemma 4.4 segue poi piuttosto facilmente che questa associazione è suriettiva. Quindi, se indichiamo con \mathfrak{c} il numero di componenti connesse infinite di un grafo:

$$\mathfrak{c}(H \setminus B_T(1, n)) \leq \mathfrak{c}(G \setminus B_S(1, M(n))).$$

Da ciò segue $e(H) \leq e(G)$ e dunque il Teorema. \square

* * *

Il secondo risultato che proviamo è la caratterizzazione dei gruppi quasi-isometrici a \mathbb{Z} .

Teorema 4.17. *Un gruppo finitamente generato G è quasi-isometrico al gruppo ciclico \mathbb{Z} se e solo se G ammette un sottogruppo di indice finito che è isomorfo a \mathbb{Z} .*

Dimostrazione. Se G ha un sottogruppo di indice finito isomorfo a \mathbb{Z} allora $G \sim_{QI} \mathbb{Z}$ per la Proposizione 4.7. Il grosso del Teorema è il viceversa.

Sia dunque G un gruppo finitamente generato e quasi-isometrico a \mathbb{Z} . Fissato un sistema finito S di generatori di G , sia $d = d_S$ la corrispondente word metric su G , e sia $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$ una quasi-isometria con costanti (λ, C) ; quindi

$$\lambda^{-1}d(x, y) - C \leq |f(x) - f(y)| \leq \lambda d(x, y) + C, \quad (4.11)$$

per ogni $x, y \in G$. Senza perdere in generalità possiamo inoltre assumere $f(1) = 0$. Ricordiamo che, per il Lemma 4.3, la controimmagine di ogni sottoinsieme finito di \mathbb{Z} è un sottoinsieme finito di G .

1) G possiede un elemento a di ordine infinito.

Per il teorema 4.16, il numero di ends di G è uguale a quello di \mathbb{Z} , cioè $e(G) = 2$ (vedi sezione 2.6). Ciò significa che possiamo trovare $L \geq \lambda + C$, tale che, posto $B = f^{-1}([-L/2, L/2])$, il grafo $\Gamma \setminus B$, ottenuto da $\Gamma = \Gamma[G, S]$ rimuovendo tutti i vertici in B e gli archi ad essi incidenti, ha esattamente due componenti connesse infinite. Osserviamo che, siccome B è finito, $\Gamma \setminus B$ ha un numero finito di componenti connesse, e dunque un numero finito di componenti connesse finite; possiamo quindi espandere il nostro insieme finito B in modo da contenere anche i vertici di tali componenti. Fatto questo, $\Gamma \setminus B$ ha esattamente due componenti connesse, entrambe infinite. Mostriamo che queste componenti sono

$$A_- = \{x \in G \setminus B \mid f(x) < -L/2\} \quad \text{e} \quad A_+ = \{x \in G \setminus B \mid f(x) > L/2\}.$$

Osservato che A_- e A_+ sono entrambe non vuote, siano $x \in A_-$, $y \in A_+$, e siano $x = g_0, g_1, \dots, g_n = y$ i vertici di un cammino che congiunge x a y nel grafo Γ ; dalla (4.11) segue che, per ogni $i = 0, \dots, n-1$,

$$|f(g_{i+1}) - f(g_i)| \leq \lambda \cdot 1 + C \leq L.$$

Poiché $f(g_0) = f(x) < -L/2$ e $f(g_n) = f(y) > -L/2$, da ciò segue che per almeno un indice i si deve avere $-L/2 \leq f(g_i) \leq L/2$, e dunque $g_i \in B$. Quindi elementi di A_- ed elementi di A_+ appartengono a componenti connesse distinte di $\Gamma \setminus B$; siccome $\Gamma \setminus B$ ha due componenti connesse, si conclude che queste devono essere A_- ed A_+ .

Proviamo ora che G contiene un elemento di ordine infinito. Siano $g \in A_+$ e $h \in A_-$ tali che $d(1, g) > 2\text{diam}(B)$ e $d(1, h) > 2\text{diam}(B)$; mostriamo che esiste $a \in \{g, h, gh\}$ tale che aA_+ è un sottoinsieme proprio di A_+ , oppure aA_- è un sottoinsieme proprio di A_- . Questo implica $|a| = \infty$ (se $a^n = 1$ allora $A_+ = a^n A_+ \subseteq aA_+ \subset A_+$, che è assurdo).

Sia $x \in B$; allora $d(gx, g) = d(x, 1)$, e dunque, per la scelta di g , $gx \in A_+$ (se $y \in B \cup A_-$ ogni cammino da g a y passa per un punto di B , quindi $d(y, g) > \text{diam}(B)$). Pertanto, $gB \subseteq A_+$, e similmente $hB \subseteq A_-$. Se $gA_+ \subseteq A_+$ allora $gA_+ \subseteq A_+ \setminus gB$ che è un sottoinsieme proprio di A_+ ed abbiamo finito. Possiamo quindi assumere $gA_+ \not\subseteq A_+$ e, simmetricamente, $hA_- \not\subseteq A_-$. Poiché gA_+ e gA_- sono le componenti connesse di $\Gamma \setminus gB$, abbiamo allora $gA_- \subseteq A_+$ e, dall'altra parte, $hA_+ \subseteq A_-$. Ma allora,

$$ghA_+ = g(hA_+) \subseteq g(A_- \setminus hB)$$

è un sottoinsieme proprio di A_+ . Questo completa la dimostrazione che esiste $a \in G$ di ordine infinito.

2) $\langle a \rangle$ ha indice finito in G .

Poiché le potenze intere a^z di a sono tutte distinte mentre l'insieme S è finito, si ha che $d(1, a^n)$ tende a infinito quando $n \rightarrow \infty$. Poiché f è una quasi-isometria, si conclude che, eventualmente sostituendo a con a^{-1} , la successione $\{f(a^n)\}_{n \geq 0}$ tende a $+\infty$ e la successione $\{f(a^n)\}_{n \leq 0}$ tende a $-\infty$. Ora, per ogni $z \in \mathbb{Z}$,

$$|f(a^{z+1}) - f(a^z)| \leq \lambda d(a^{z+1}, a^z) + C = \lambda d(a, 1) + C = M,$$

con M una costante che non dipende da z . Questo significa che per ogni $w \in \mathbb{Z}$ esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che

$$|f(a^n) - w| \leq M/2.$$

In particolare, posto $K = \lambda(M/2 + C)$, si ha che per ogni $x \in G$ esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che

$$d(1, ga^n) = d(g^{-1}, a^n) \leq \lambda(|f(g) - f(a^n)| + C) \leq \lambda(M/2 + C) = K.$$

Quindi $G = B_S(1, K)\langle a \rangle$; poiché la palla $B_S(1, K)$ è finita, si conclude che $\langle a \rangle$ ha indice finito in G . \square

ESERCIZIO 4.22. Un conseguenza della Proposizione 4.17 è che un gruppo quasi-commensurabile al gruppo ciclico \mathbb{Z} ammette un sottogruppo di indice finito isomorfo a \mathbb{Z} . Si dia una dimostrazione di questo fatto che non faccia ricorso a tale Proposizione.

ESERCIZIO 4.23. Si provi che i gruppi \mathbb{Z} e D_∞ sono bi-lipschitz equivalenti (si ricordi che una corrispondenza bi-lipschitziana è una biezione).

ESERCIZIO 4.24. (A. Dyubina) Siano A e B gruppi finitamente generati e bi-lipschitz equivalenti; si provi che $A \wr \mathbb{Z}$ e $B \wr \mathbb{Z}$ sono bi-lipschitz equivalenti (questo esercizio generalizza, in modo non proprio immediato, il Teorema 4.10).

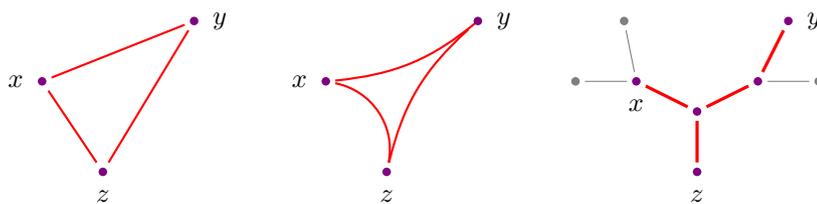
ESERCIZIO 4.25. (A. Dyubina) Utilizzando i due esercizi precedenti si provi che la classe dei gruppi (finitamente generati) virtualmente torsion-free non è geometrica.

Gruppi iperbolici

Per ragioni di tempo, rinunciamo ad un'introduzione, che sarebbe comunque stata di carattere descrittivo, all'idea geometrica di varietà iperbolica, ed alla correlata nozione di curvatura sezionale negativa, lasciando all'eventuale interesse di chi legge il facile compito di trovare valide esposizioni di queste cose (anche la breve sezione 5.2 sul piano iperbolico è intesa come referenza veloce e non serve ad insegnare alcunché). Partiamo quindi con un approccio agli spazi metrici iperbolici (a iniziare dalla loro definizione) che è stato ideato (da Rips, Gromov ed altri) proprio per essere più funzionale allo studio dei gruppi, e che non richiede strumenti quali, ad esempio, la differenziazione, né la conoscenza della geometria riemanniana. Ciò toglierà un poco di motivazione e, forse, anche di orizzonte a quanto vedremo; tuttavia anche la sola teoria dei 'gruppi iperbolici' racchiude in sé sufficienti (e, vorrei dire, appaganti) motivi di interesse.

5.1. Spazi iperbolici

Sia (X, d) uno spazio metrico geodesico; per $x, y \in X$ con la scrittura $[x-y]$ intendiamo l'immagine di un segmento geodesico da x a y (se ce n'è più d'uno, la notazione ne indica uno qualsiasi). Un *triangolo geodesico* $\Delta = \Delta(x, y, z)$ è una terna $([x-y], [y-z], [z-x])$, con $x, y, z \in X$; i segmenti geodesici della terna si dicono i lati del triangolo Δ .



triangoli geodesici: euclideo, iperbolico, nell'albero $[T_3]$.

Sia (X, d) uno spazio metrico; per $\emptyset \neq A \subseteq X$ e $r \geq 0$ scriviamo

$$B_X(A, r) = \bigcup_{a \in A} B_X(a, r) = \{x \in X \mid \exists a \in A : d(a, x) \leq r\}.$$

DEFINIZIONE. Sia $0 \leq \delta \in \mathbb{R}$. Uno spazio metrico geodesico (X, d) si dice δ -iperbolico se, per ogni $x, y, z \in X$,

$$[x-y] \subseteq B_X([x-z], \delta) \cup B_X([z-y], \delta).$$

Questo significa che ogni lato di un triangolo geodesico in X è contenuto nell'unione dei cilindri di raggio δ definiti intorno agli altri due lati. Un singolo triangolo geodesico in cui ciò si verifica si dice un triangolo δ -*slim*. Lo spazio X è dunque δ -iperbolico se e solo se ogni suo triangolo geodesico è δ -slim.

Uno spazio metrico geodesico si dice *iperbolico*¹ se è δ -iperbolico per qualche $\delta \geq 0$.

Esempi. 1) Per $n \geq 2$ lo spazio euclideo \mathbb{R}^n non è iperbolico.

2) Si può dimostrare che il piano iperbolico \mathbb{H} è $(1 + \sqrt{2})$ -iperbolico.

3) Un albero metrico² è uno spazio 0-iperbolico.

4) Ogni spazio metrico geodesico di diametro finito è iperbolico.

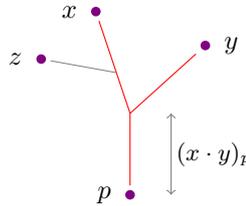
Descriviamo ora una diversa caratterizzazione degli spazi iperbolici, dovuta a Gromov, che conduce ad una definizione di iperbolicità che non si applica solo a spazi geodesici, ed è basata sulla seguente idea.

DEFINIZIONE. Sia (X, d) uno spazio metrico (non necessariamente geodesico) e $p \in X$ un punto fissato. Sia definita il *prodotto di Gromov* (associato a p)

$$(x \cdot y)_p = \frac{1}{2}(d(x, p) + d(p, y) - d(x, y)), \quad (5.1)$$

per ogni $x, y \in X$. Si osservi che, per la disuguaglianza triangolare, per ogni $p \in X$ il prodotto di Gromov associato a p è una funzione simmetrica $X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esempio 5.1. Se X è un albero (metrico o no) $(x \cdot y)_p$ coincide con la distanza di p dal vertice a partire dal quale i due (unici) cammini da p a x e da p a y divergono (a meno che uno di tali cammini contenga entrambi x e y , nel qual caso $(x \cdot y)_p$ è la distanza di p dal più vicino dei due):



Ci si rende quindi facilmente conto che, se X è un albero, allora per ogni $z \in X$ si ha

$$(x \cdot y)_p \geq \min\{(x \cdot z)_p, (y \cdot z)_p\}$$

(la figura mostra una delle situazioni possibili: qui $(x \cdot y)_p = (y \cdot z)_p < (x \cdot z)_p$). \square

Lemma 5.1. Sia (X, d) un spazio metrico, siano $p, x, y \in X$ e supponiamo esista una geodesica $[x-y]$ in X .

- 1) $(p \cdot x)_z + (p \cdot y)_z = d(p, z) - (x \cdot y)_p$, per ogni $z \in [x-y]$;
- 2) $d(p, [x-y]) \geq (x \cdot y)_p$;

¹In molti testi, con questa definizione si parla di spazi *iperbolici alla Rips* (dal matematico israeliano, di origine lettone, Eliyahu Rips). In queste note, useremo semplicemente la dicitura *spazio iperbolico* (o δ -iperbolico) intendendo comunque uno spazio metrico geodesico iperbolico (o δ -iperbolico) alla Rips.

²D'ora in avanti, useremo il termine *grafo* (albero) metrico per intendere la realizzazione geometrica di un grafo (albero) discreto.

3) se, inoltre, X è δ -iperbolico, si ha $d(p, [x-y]) \leq (x \cdot y)_p + 2\delta$.

Dimostrazione. Poiché $[x-y]$ è un segmento geodesico si ha $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$, per ogni $z \in [x-y]$. La 1) si prova allora semplicemente facendo i calcoli:

$$\begin{aligned} 2(p \cdot x)_z + 2(p \cdot y)_z &= d(p, z) + d(z, x) - d(p, x) + d(p, z) + d(z, y) - d(p, y) = \\ &= 2d(p, z) - d(p, x) - d(p, y) + d(x, y) = 2d(p, z) - 2(x \cdot y)_p. \end{aligned}$$

La 2) segue immediatamente: $d(p, z) - (x \cdot y)_p \geq 0$ per ogni $z \in [x-y]$.

Supponiamo ora che X sia δ -iperbolico (quindi geodesico), per $\delta \geq 0$; allora

$$[x-y] \subseteq B_X([p-x], \delta) \cup B_X([p-y], \delta).$$

Ora, $[x-y] \cap B_X([p-x], \delta)$ e $[x-y] \cap B_X([p-y], \delta)$ sono sottoinsiemi chiusi di $[x-y]$, che è omeomorfo ad un intervallo reale; quindi esiste $z \in [x-y]$ tale che

$$z \in B_X([p-x], \delta) \cap B_X([p-y], \delta).$$

Dal punto 2) segue allora $(x \cdot p)_z \leq d(z, [p-x]) \leq \delta$ e $(y \cdot p)_z \leq d(z, [p-y]) \leq \delta$. Quindi, per il punto 1),

$$d(p, z) - (x \cdot y)_p = (p \cdot x)_z + (p \cdot y)_z \leq 2\delta,$$

e dunque $d(p, [x-y]) \leq d(p, z) \leq (x \cdot y)_p + 2\delta$. \square

DEFINIZIONE. Sia $\delta \geq 0$. Uno spazio metrico X (non necessariamente geodesico) si dice *Gromov δ -iperbolico* se

$$(x \cdot y)_p \geq \min\{(x \cdot z)_p, (y \cdot z)_p\} - \delta,$$

per ogni $p, x, y, z \in X$.

Esempio 5.2. Ogni albero è uno spazio Gromov 0-iperbolico (vedi esempio 5.1). \square

Esempio 5.3. Nel gruppo \mathbb{Z}^2 , siano $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$, e sia $S = \{a, b\}$; mostriamo che il grafo di Cayley $\Gamma[\mathbb{Z}^2, S]$ non è uno spazio Gromov iperbolico.

Dato $\delta \geq 0$, sia $\delta < m \in \mathbb{N}$ e poniamo $x = ma$, $y = mb$, $z = x + y$. Allora,

$$(x \cdot y)_0 = \frac{1}{2}(\ell_S(x) + \ell_S(y) - \ell_S(y - x)) = \frac{1}{2}(m + m - 2m) = 0,$$

mentre $(x \cdot z)_0 = \frac{1}{2}(\ell_S(x) + \ell_S(z) - \ell_S(z - x)) = \frac{1}{2}(m + 2m - m) = m$ e, analogamente, $(y \cdot z)_0 = m$; quindi

$$\min\{(x \cdot z)_0, (y \cdot z)_0\} - \delta = m - \delta > 0 = (x \cdot y)_0.$$

Pertanto, $\Gamma[\mathbb{Z}^2, S]$ non è Gromov δ -iperbolico. \square

Lemma 5.2. Uno spazio metrico δ -iperbolico è Gromov 3δ -iperbolico.

Dimostrazione. Sia (X, d) spazio metrico geodesico δ -iperbolico, e siano $p, x, y, z \in X$. Considerato un triangolo geodesico $\Delta = \Delta(x, y, z)$ in X , sia $u \in [x-y]$ a distanza minima da p . Poiché Δ è δ -slim, esiste $u' \in [x-z] \cup [y-z]$ con $d(u, u') \leq \delta$. Assumiamo $u' \in [x-z]$; allora per il Lemma 5.1 e la disuguaglianza triangolare,

$$(x \cdot z)_p \leq d(p, [x-z]) \leq d(p, u') \leq d(p, u) + \delta = d(p, [x-y]) + \delta \leq (x \cdot y)_p + 3\delta.$$

Pertanto

$$(x \cdot y)_p \geq (x \cdot z)_p - 3\delta \geq \min\{(x \cdot z)_p, (y \cdot z)_p\} - 3\delta,$$

il che prova che X è Gromov 3δ -iperbolico. \square

Lemma 5.3. *Sia X uno spazio metrico Gromov δ -iperbolico; se X è geodesico allora è 3δ -iperbolico.*

Dimostrazione. Sia (X, d) spazio metrico geodesico Gromov δ -iperbolico. Considerato un triangolo geodesico $\Delta(x, y, z)$ in X , sia $p \in [x-y]$. Poiché $[x-y]$ è geodesico,

$$2(x \cdot y)_p = d(x, p) + d(p, y) - d(x, y) = 0,$$

quindi, per ipotesi

$$\min\{(x \cdot z)_p, (y \cdot z)_p\} \leq \delta. \quad (5.2)$$

Supponiamo $(x \cdot z)_p \leq \delta$. La funzione $[x-z] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $u \in [x-z]$,

$$\phi(u) = (p \cdot x)_u - (p \cdot z)_u = \frac{1}{2}(d(x, u) - d(z, u) + d(p, z) - d(p, x)),$$

è continua (questo discende dal fatto che sulla geodesica $[x-z]$ la funzione distanza è continua); inoltre, $\phi(x) = -(p \cdot z)_x \leq 0$ e $\phi(u) = (p \cdot x)_u \geq 0$, quindi esiste $u \in [x-z]$ tale che $\phi(u) = 0$, ovvero $(p \cdot x)_u = (p \cdot z)_u$. Ora, per la Gromov δ -iperbolicità,

$$(p \cdot x)_u = (p \cdot z)_u \leq (x \cdot z)_u + \delta = \delta,$$

e, per il punto 1) del Lemma 5.1,

$$d(p, u) = (p \cdot x)_u + (p \cdot z)_u + (x \cdot z)_p \leq 3\delta.$$

Poiché $u \in [x-z]$, questo implica $p \in B_X([x-z], 3\delta)$. Allo stesso modo, se dalla (5.2) segue $(x \cdot z)_p \leq \delta$, si ricava $p \in B_X([y-z], 3\delta)$. Quindi

$$[x-y] \subseteq B_X([x-z], 3\delta) \cup B_X([y-z], 3\delta),$$

ovvero $\Delta(x, y, z)$ è 3δ -slim, e lo spazio X è 3δ -iperbolico. \square

Dai due Lemmi di sopra si ricava il seguente corollario.

Proposizione 5.4. *Uno spazio geodesico è iperbolico se e solo se è Gromov iperbolico.*

Esempio 5.4. Non è difficile (volendo, si veda l'esercizio 5.4) convincersi che se Γ è un grafo, allora lo spazio (Γ, d_Γ) è Gromov iperbolico se e solo se la sua realizzazione geometrica $(|\Gamma|, d_{|\Gamma|})$ è (Gromov) iperbolica. \square

ESERCIZIO 5.1. Si provi che lo spazio (\mathbb{R}^2, d_∞) (vedi esercizio 4.11) non è iperbolico.

ESERCIZIO 5.2. In uno spazio metrico (X, d) , si ponga per ogni $p \in X$,

$$\delta_p = \sup_{x, y \in X} \{\min_{z \in X} \{(x \cdot z)_p, (y \cdot z)_p\} - (x \cdot y)_p\}$$

(quindi $\delta_p \in [0, \infty]$). Si provi che, per ogni $p, q \in X$, si ha $\delta_q \leq 2\delta_p$. Si deduca che lo spazio (X, d) è Gromov iperbolico se e solo se esiste $p \in X$ tale che $\delta_p < \infty$.

ESERCIZIO 5.3. 1) Sia (X, d) uno spazio metrico geodesico, e supponiamo che esistano due costanti $M > 0, \delta \geq 0$ tali che, per ogni $p, x, y, z \in X$,

$$\min\{(x \cdot z)_p, (y \cdot z)_p\} \leq M(x \cdot y)_p + \delta.$$

Si provi che X è iperbolico.

2) Siano $(X, d_X), (Y, d_Y)$ spazi metrici geodesici. Sia $f : X \rightarrow Y$ tale che esistono costanti $M \geq 1, C \geq 0$ per cui

$$M^{-1}(x \cdot y)_p - C \leq (f(x) \cdot f(y))_{f(p)} \leq M(x \cdot y)_p + C$$

per ogni $p, x, y \in X$. Si provi che se (Y, d_Y) è (Gromov) iperbolico allora (X, d_X) è (Gromov) iperbolico (si osservi anche che f è un'inclusione quasi-isometrica).

ESERCIZIO 5.4. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'inclusione $(1, C)$ -quasi-isometrica tra spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) ; si provi che se Y è Gromov iperbolico allora anche X è Gromov iperbolico. Si deduca che un grafo connesso Γ è Gromov iperbolico se e solo se la sua realizzazione geometrica è (Gromov) iperbolica.

ESERCIZIO 5.5. Uno spazio metrico (X, d) è detto un \mathbb{R} -albero se sono soddisfatte le seguenti condizioni

- Per ogni $x, y \in X$ esiste un unico segmento geodesico da x a y , la cui immagine denotiamo con $[x-y]$;
- per ogni $x, y, z \in X$, se $[x-y] \cap [x-z] = \{x\}$, allora $[x-y] \cup [x-z] = [y-z]$.

Si provi che la realizzazione geometrica di un albero è un \mathbb{R} -albero. Si dimostri poi che uno spazio metrico geodesico è 0-iperbolico se e solo se è un \mathbb{R} -albero.

5.2. Il piano iperbolico

Di solito (cioè *more geometrico differenziale*) il piano iperbolico viene descritto mediante il *modello del semipiano* (o semipiano di Poincaré), cioè come la varietà riemanniana definita sul semipiano superiore aperto di \mathbb{R}^2 , che è conveniente vedere anche come l'insieme dei numeri complessi con parte immaginaria positiva,

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\},$$

dotato della metrica riemanniana

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Questo significa in particolare che la lunghezza di una curva differenziabile $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ (con $a \leq b \in \mathbb{R}$), dove $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ è data da

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{y} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt. \quad (5.3)$$

A partire da questa espressione per le lunghezze si ricavano le diverse proprietà metriche di \mathbb{H} ; in particolare l'espressione per la distanza tra due punti $z, w \in \mathbb{H}$ (come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve differenziabili che congiungono z a w); questa si può scrivere in diversi modi, uno dei quali è il seguente:

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \quad (5.4)$$

Ad esempio, se $z = a + ib$, $w = a + ib'$ hanno la stessa parte reale e $b' \geq b$, e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ è una curva da z a w , allora da (5.3) segue

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) \geq \int_0^1 \frac{dy}{y} = \log \frac{b'}{b},$$

che è il valore che si ottiene da (5.4). Ne segue che il segmento geodesico tra due punti con la stessa parte reale, $a + ib$ e $a + ib'$, è realizzato dalla curva $\gamma : [0, \log \frac{b'}{b}] \rightarrow \mathbb{H}$ con $\gamma(t) = a + ibe^t$, che è un segmento verticale (in \mathbb{R}^2).

In generale, si trova che le *rette* di \mathbb{H} , cioè le linee geodesiche $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, risultano quelle che abbiamo dato in termini di geometria descrittiva nella sezione 3.5, ovvero (viste dal punto di vista euclideo nel semipiano superiore di \mathbb{R}^2) le semirette aperte verticali e le semicirconferenze aperte centrate lungo l'asse delle x .

Si arriva poi a verificare che (per chi sa di queste cose) il piano iperbolico \mathbb{H} è una varietà di Riemann a curvatura costante e uguale a -1 .

Infine, si prova che $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ è effettivamente uno spazio metrico δ -iperbolico (nel senso di Rips) con $\delta = 1 + \sqrt{2}$.

Trasformazioni di Möbius. Ad ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ si associa la funzione $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ (dove $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) definita da, per ogni $z \in \hat{\mathbb{C}}$,

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

detta *trasformazione di Möbius*. La trasformazione è individuata dalla matrice a meno del segno; inoltre la composizione delle trasformazioni associate alle matrici A, A' è la trasformazione associata a AA' . Quindi, detto \mathfrak{M} l'insieme di tutte le trasformazioni di Möbius su $\hat{\mathbb{C}}$, si ha che \mathfrak{M} è un gruppo e

$$\mathfrak{M} \simeq SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\} = PSL(2, \mathbb{C}),$$

per cui chiameremo $PSL(2, \mathbb{C})$ il gruppo delle trasformazioni di Möbius di $\hat{\mathbb{C}}$.

Calcoli piuttosto semplici mostrano che se $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ allora $\hat{\mathbb{C}}$ si decompone in tre sottospazi A -invarianti: \mathbb{H} , $-\mathbb{H}$ e $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Calcoli un poco meno immediati mostrano quindi che (la trasformazione di Möbius associata ad) A è un'isometria di $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ che conserva l'orientamento. Infine, si dimostra che ogni isometria di $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ che conserva l'orientamento è una trasformazione di Möbius associata ad una matrice reale. Quindi

$$PGL(2, \mathbb{R}) \simeq \text{Isom}^+(\mathbb{H}),$$

dove $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ denota il gruppo delle isometrie di \mathbb{H} che conservano l'orientamento.

Poiché il prodotto di due isometrie che invertono l'orientamento lo conserva, si deduce che $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ ha indice 2 in $\text{Isom}(\mathbb{H})$. Ora, la funzione definita da $\eta(z) = -\bar{z}$ è un'isometria di \mathbb{H} che non conserva l'orientamento che ha ordine 2; dunque si vede che

$$\text{Isom}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R}) \rtimes \langle \eta \rangle.$$

ESERCIZIO 5.6. Siano z, w punti di \mathbb{H} con ascissa diversa. Si provi che $d_{\mathbb{H}}(z, w) = \log(z', z, w, w')$ dove z', w' sono i punti di intersezione della circonferenza (euclidea) con centro sull'asse reale passante per u, w e l'asse reale stesso, e

$$(z', z, w, w') = \frac{(z' - z)(w' - w)}{(z' - w)(w' - z)}$$

(che è detto il *birapporto* dei quattro punti z', z, w, w').

ESERCIZIO 5.7. Si provi che $G = PGL(2, \mathbb{R})$ è transitivo sull'insieme dei punti di \mathbb{H} ; si determini quindi lo stabilizzatore in G dei punti i . Più in generale, se γ, γ' sono due geodesiche in \mathbb{H} allora, per ogni coppia di punti $z \in \gamma, z' \in \gamma'$, esiste $g \in G$ tale che $g(\gamma) = \gamma'$ e $g(z) = z'$.

5.3. Spazi iperbolici e quasi-isometrie

In questa sezione proviamo che l'iperbolicità è invariante per quasi-isometria nella classe degli spazi metrici geodesici; esistono diversi modi per dimostrare questo importante fatto; noi seguiremo molto da vicino la trattazione in Matucci [6].

DEFINIZIONE. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $c : [a, b] \rightarrow X$ una funzione continua, con $a \leq b \in \mathbb{R}$, si dice *rettificabile* se la sua *lunghezza*, ovvero

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(c(t_i), d(c(t_{i-1}))) \mid a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, n \in \mathbb{N} \right\}$$

è un numero reale finito.

Nel nostro contesto, esempi principali di funzioni rettificabili sono le funzioni geodesiche a tratti.

Lemma 5.5. *Siano (X, d) uno spazio δ -iperbolico, con $\delta \geq 0$, e $c : [a, b] \rightarrow X$ continua e rettificabile, con $a \leq b \in \mathbb{R}$. Se $p = c(a)$ e $q = c(b)$, sia $[p-q]$ un segmento geodesico da p a q ; allora, per ogni $x \in [p-q]$,*

$$d(x, Im(c)) \leq \delta |\log_2 L(c)| + 1.$$

Dimostrazione. A meno di riscalarare la funzione c , possiamo assumere $a = 0$, $b = 1$. Se $L(c) < 1$, allora $L([p-q]) \leq L(c) < 1$, quindi, per ogni $x \in [p-q]$,

$$d(x, Im(c)) \leq d(x, p) \leq d(p, q) < 1$$

e l'asserzione segue subito.

Sia quindi $L(c) \geq 1$ e procediamo per induzione su $N = \lfloor \log_2 L(c) \rfloor + 1$.

Consideriamo un triangolo geodesico $\Delta(p, c(1/2), q)$ in cui $[p-q]$ sia uno dei lati, e sia $x \in [p-q]$. Poiché X è δ -iperbolico esiste $x' \in [p-c(1/2)] \cup [c(1/2)-q]$ con $d(x, x') \leq \delta$; ed assumiamo, senza perdere in generalità, $x' \in [p-c(1/2)]$. Considerando la restrizione $c' = c|_{[p, 1/2]}$ si ha, per ipotesi induttiva,

$$d(x', Im(c)) \leq d(x', Im(c')) \leq \delta(N - 1) + 1,$$

e quindi, per la diseuguaglianza triangolare,

$$d(x, Im(c)) \leq d(x, x') + d(x', Im(c)) \leq \delta + \delta(N - 1) + 1 = \delta N + 1,$$

come si voleva. □

DEFINIZIONE. Siano A, B sottoinsiemi compatti di uno spazio metrico X ; si definisce la *distanza di Hausdorff* di A da B come

$$d_{Haus}(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d_X(a, B), \sup_{b \in B} d_X(b, A) \right\}.$$

DEFINIZIONE. Siano (X, d) uno spazio metrico, $\lambda \geq 1$ e $C \geq 0$. Una (λ, C) -quasi-geodesica in X è un'inclusione (λ, C) -quasi-isometrica $c : I \rightarrow X$, dove I è un intervallo della retta reale. Quindi, per ogni $x, y \in I$,

$$\lambda^{-1}|x - y| - C \leq d(c(x), c(y)) \leq \lambda|x - y| + C.$$

Se $I = [a, b]$, $c(a)$ e $c(b)$ sono detti gli estremi di c .

In quanto inclusioni quasi-isometriche, le mappe quasi-geodesiche non hanno alcuna propensione naturale alla continuità; il prossimo Lemma mostra che possono comunque essere, per così dire, “interpolate” da una quasi-geodesica continua, rettificabile e con altre buone proprietà.

Lemma 5.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico geodesico, e sia $c : [a, b] \rightarrow X$ una (λ, C) -quasi-geodesica in X (con $[a, b]$ intervallo reale). Allora esiste una (λ, C') -quasi-geodesica continua e rettificabile $c' : [a, b] \rightarrow X$ tale che*

- 1) $c(a) = c'(a)$, $c(b) = c'(b)$;
- 2) $C' = 2(\lambda + C)$;
- 3) $L_X(c'_{|[t,u]}) \leq K_1 d(c'(t), c'(u)) + K_2$ per ogni $a \leq t \leq u \leq b$, con $K_1 = \lambda \frac{C'}{2}$ e $K_2 = (\lambda C' + 3) \frac{C'}{2}$;
- 4) $d_{Haus}(Im(c), Im(c')) \leq \lambda + C$.

Dimostrazione. Siano $a = z_0 < z_1 < \dots < z_k = b$ gli elementi di $\Sigma = \{a, b\} \cup ([a, b] \cap \mathbb{Z})$. Definiamo $c' : [a, b] \rightarrow X$, ponendo $c'(z_i) = c(z_i)$ per $i = 0, \dots, k$, e quindi riscaldando un segmento geodesico su ogni tratto $[z_i, z_{i+1}]$, per $i = 0, \dots, k-1$. Si osservi che la lunghezza di ciascuno di questi segmenti geodesici è al più $\lambda + C$. Dato $t \in [a, b]$ sia $t^* \in \Sigma$ tale che $|t - t^*| \leq \frac{1}{2}$. Allora,

$$d(c(t), Im(c')) \leq d(c(t), c'(t^*)) = d(c(t), c(t^*)) \leq \lambda |t - t^*| + C \leq \frac{\lambda}{2} + C,$$

e questo mostra che $\sup_{x \in Im(c)} d(x, Im(c')) \leq \lambda + C$. Ora, poiché $t, t^* \in [z_i, z_{i+1}]$ (per qualche $i = 0, \dots, k-1$) e in tale intervallo c' è un segmento geodesico riscaldato, si ha

$$d(c'(t), c'(t^*)) \leq \frac{d(c'(z_i), c'(z_{i+1}))}{2} \leq \frac{\lambda + C}{2};$$

dunque

$$d(c'(t), Im(c)) \leq d(c'(t), c(t^*)) = d(c'(t), c'(t^*)) \leq \frac{\lambda + C}{2}.$$

Quindi $\sup_{y \in Im(c')} d(Im(c), y) \leq \lambda + C$. Pertanto,

$$d_{Haus}(Im(c), Im(c')) \leq \lambda + C,$$

e il punto 4) è provato.

Per il punto 2), osservato che $c(t^*) = c'(t^*)$ per ogni $t \in [a, b]$, si trova

$$\begin{aligned} d(c'(t), c'(u)) &\leq d(c'(t), c'(u^*)) + d(c'(u^*), c'(t^*)) + d(c'(t^*), c'(u)) \leq \\ &\leq d(c(u^*), c(t^*)) + \lambda + C \leq \lambda |t^* - u^*| + \lambda + 2C \leq \\ &\leq \lambda(|t - u| + 1) + \lambda + 2C = \lambda |t - u| + 2(\lambda + C), \end{aligned}$$

per ogni $t, u \in [a, b]$. Similmente

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}|t - u| - 2(\lambda + C) &\leq \lambda^{-1}(|t - u| - 1) - (\lambda + 2C) \leq \\ &\leq \lambda^{-1}|t^* - u^*| - (\lambda + 2C) \leq d(c(u^*), c(t^*)) - (\lambda + C) \leq \\ &\leq d(c'(u), c'(t)). \end{aligned}$$

Questo prova che c' è una $(\lambda, 2(\lambda + C))$ -quasi-geodesica.

Rimane il punto 3). Cominciamo con elementi di Σ ; si ha, per $0 \leq n < m \leq k$

$$L(c'_{[z_n, z_m]}) = \sum_{i=n}^{m-1} d(c(z_i), c(z_{i+1})) \leq (\lambda + C)|z_m - z_n|.$$

Per una semplice applicazione della disuguaglianza triangolare, si conclude che

$$L(c'_{[t, u]}) \leq (\lambda + C)(|t^* - u^*| + 2),$$

per ogni $a \leq t \leq u \leq b$. D'altra parte, come visto sopra,

$$d(c'(u), c'(t)) \geq \lambda^{-1}|t^* - u^*| - (\lambda + 2C).$$

Combinando queste ultime due disuguaglianze si ricava 3). □

Il prossimo risultato mostra che, in uno spazio iperbolico, le immagini di funzioni quasi-geodesiche tra due punti x e y , non si allontanano mai troppo da un segmento geodesico $[x-y]$. In particolare, in uno spazio iperbolico, segmenti geodesici tra due punti si mantengono "vicini" per il loro intero percorso (vedi anche l'esercizio 5.9).

Teorema 5.7 (di stabilità per quasi-geodesiche). *Per ogni terna di numeri reali $\delta \geq 0$, $\lambda \geq 1$, $C \geq 0$, esiste $R(\delta, \lambda, C) \in R_{\geq 0}$ tale che se (X, d) è uno spazio δ -iperbolico e c una (λ, C) -quasi-geodesica dal punto p al punto q , allora*

$$d_{Haus}(Im(c), [p-q]) \leq R(\delta, \lambda, C)$$

per ogni segmento geodesico $[p-q]$.

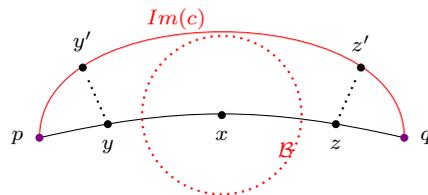
Dimostrazione. Siano (X, d) è uno spazio δ -iperbolico e $c : [a, b] \rightarrow X$ una (λ, C) -quasi-geodesica, con $c(a) = p$ e $c(b) = q$. Per il Lemma 5.6 possiamo supporre che c sia continua, rettificabile, e soddisfi la proprietà 3) del Lemma. Poniamo

$$D = \sup_{x \in [p-q]} d(x, Im(c)) \quad \text{e} \quad E = \sup_{x \in Im(c)} d(x, [p-q]).$$

Il primo passo consiste nel limitare superiormente D . Sia $x \in [p-q]$ tale che $d(x, Im(c))$ è massima (esiste per compattezza, dato che c è continua); per definizione, la palla aperta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X(x, D)$ non contiene punti di $Im(c)$. Siano $y \in [p-x] \subseteq [p-q]$ e $z \in [x-q] \subseteq [p-q]$ tali che

$$d(x, y) = \min\{d(x, p), 2D\} \quad \text{e} \quad d(x, z) = \min\{d(x, q), 2D\};$$

siano quindi $y', z' \in Im(c)$ tali che $d(y, y') \leq D$ e $d(z, z') \leq D$.



Consideriamo la funzione continua γ ottenuta concatenando un segmento geodesico $[y-y']$ con la parte di c la cui immagine sta tra y' e z' ed un segmento geodesico $[z'-z]$; osserviamo che $Im(\gamma) \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Poiché $d(y', z') \leq d(y', y) + d(y, z) + d(z, z') \leq 6D$, per la proprietà 3) del Lemma 5.6 si ha

$$L(\gamma) \leq d(y', y) + K_1 d(y', z') + K_2 + d(z', z) \leq 6DK_1 + K_2 + 2D.$$

Applicando ora il Lemma 5.5 otteniamo

$$D - 1 \leq d(x, Im(\gamma)) - 1 \leq \delta |\log_2 L(\gamma)| \leq \delta \log_2(6DK_1 + K_2 + 2D). \quad (5.5)$$

Poiché il termine a destra cresce logaritmicamente in D (mentre $D - 1$ cresce linearmente), la diseuguaglianza (5.5) implica un limite superiore D^* per D , ed è chiaro che tale D^* dipende solo dai parametri δ, K_1, K_2 , quindi, in ultima istanza, da δ, λ e C . Si osservi che $[p-q] \subseteq B_X(Im(c), D^*)$.

Se $Im(c) \subseteq B_X([p-q], D^*)$, abbiamo finito (con $R \geq B^*$). Altrimenti, sia $[a', b']$ un sottointervallo di $[a, b]$ massimale tale che $c([a', b'])$ abbia intersezione vuota con la palla aperta $\mathcal{B}([p-q], D^*)$ (quindi $a' < b'$). Poiché $[p-q]$ è connesso e contenuto in $B_X(Im(c), D^*)$, esiste $w \in [p-q]$ tale che $d(w, c([b', b])), d(w, c([a, a'])) \leq d(w, Im(c))$; esistono cioè $t \in [a, a']$, $u \in [b', b]$ tali che

$$d(c(t), w) \leq D^* \quad \text{e} \quad d(c(u), w) \leq D^*.$$

In particolare, $d(c(t), c(u)) \leq 2D^*$, e quindi $L(c_{|[t,u]}) \leq 2K_1 D^* + K_2$, per la proprietà 3) del Lemma 5.6. Ne segue che, per ogni $x \in [a', b']$,

$$\begin{aligned} d([p-q], c(x)) &\leq d(w, c(x)) \leq d(w, c(t)) + d(c(t), c(x)) \leq d(w, c(t)) + L(c_{|[t,u]}) \leq \\ &\leq 2D^* + 2K_1 D^* + K_2 = 2D^*(K_1 + 1) + K_2. \end{aligned}$$

Ponendo $R' = R'(\delta, \lambda, C) = 2D^*(K_1 + 1) + K_2$ si ha quindi

$$d_{Haus}(Im(c), [x-y]) \leq R'$$

nel caso di c quasi-geodesica continua e rettificabile. Per il caso generale, per il Lemma 5.6, basta porre $R(\delta, \lambda, C) = R'(\delta, \lambda, 2(\lambda + C)) + \lambda + C$, e si arriva alla conclusione. \square

Corollario 5.8. *Uno spazio metrico geodesico è δ -iperbolico se e soltanto se per ogni $\lambda \geq 1$, $C \geq 0$ esiste $M = M(\delta, \lambda, C) \geq 0$ tale che ogni triangolo (λ, C) -quasi-geodesico di X è M -slim.*

Il risultato principale di questa sezione è ora a portata di mano.

Teorema 5.9. *Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici geodesici e $f : Y \rightarrow X$ un'inclusione (λ, C) -quasi-isometrica (con $\lambda \geq 1$, $C \geq 0$). Se X è δ -iperbolico, allora Y è η -iperbolico, dove $\eta = \eta(\delta, \lambda, C)$.*

Dimostrazione. Sia Δ un triangolo geodesico in Y i cui lati sono i segmenti geodesici $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (le funzioni che li definiscono). Per il Corollario 5.10 esiste una costante $M = M(\delta, \lambda, C)$ tale che il triangolo geodesico $f\Delta$ in X i cui lati sono $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f \circ \gamma_3$, è M -slim. Quindi, per ogni $x \in Im\gamma_1$

$$\text{esiste } y \in Im\gamma_2 \cup Im\gamma_3 \text{ tale che } d_X(f(x), f(y)) \leq M;$$

e, poiché f è un'inclusione (λ, C) -quasi-isometrica,

$$d_Y(x, y) \leq \lambda d_X(f(x), f(y)) + \lambda C \leq \lambda(M + C).$$

Lo stesso argomento, applicato agli elementi di $Im\gamma_2$ e di $Im\gamma_3$, permette di concludere che Δ è η -slim, con $\eta = \lambda(M + C) = \eta(\delta, \lambda, C)$, ovvero Y è η -iperbolico. \square

Corollario 5.10. *L'iperbolicità è invariante per quasi-isometria nella classe degli spazi metrici geodesici.*

ESERCIZIO 5.8. Si provi che la funzione $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da, per ogni $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$f(t) = (t \sin(\log(t + 1)), t \cos(\log(t + 1)))$$

è una inclusione quasi-isometrica rispetto alle metriche standard su \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 . Si deduca che il Teorema di stabilità per quasi-geodesiche 5.7 non vale per $X = \mathbb{R}^2$ (l'immagine di f è una spirale logaritmica in \mathbb{R}^2).

ESERCIZIO 5.9. Sia (X, d) uno spazio δ -iperbolico. Siano $\gamma : [0, r] \rightarrow X$, $\gamma' : [0, r'] \rightarrow X$ segmenti geodesici con $r \leq r' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\gamma(0) = \gamma'(0)$. Posto $D = d(\gamma(r), \gamma'(r'))$, si provi che $r' - r \leq D$ e che per ogni $t \in [0, r]$,

$$d(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq 2\delta + D$$

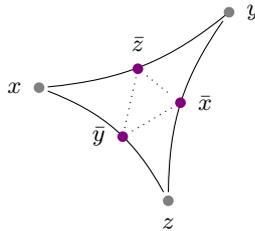
• Gli esercizi seguenti non sono direttamente riferiti al contenuto di questa sezione, ma introducono un'altra caratterizzazione degli spazi iperbolici che può essere utile in certe situazioni. Cominciamo con la definizione chiave.

DEFINIZIONE. In uno spazio metrico geodesico (X, d) sia $\Delta = \Delta(x, y, z)$ il triangolo geodesico i cui lati sono $[x-y]$, $[y-z]$, $[z-x]$; si chiama *tripode* di Δ l'insieme $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$, dove

$$\begin{aligned} \bar{x} \in [y-z] \text{ è tale che } d(z, \bar{x}) &= (x \cdot y)_z \\ \bar{y} \in [x-z] \text{ è tale che } d(x, \bar{y}) &= (y \cdot z)_x \\ \bar{z} \in [x-y] \text{ è tale che } d(y, \bar{z}) &= (x \cdot y)_z \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.10. Si provi che $d(z, \bar{x}) = d(z, \bar{y})$, $d(y, \bar{x}) = d(y, \bar{z})$ e $d(x, \bar{y}) = d(x, \bar{z})$.

DEFINIZIONE (CONTINUA). Il triangolo Δ si dice δ -thin, con $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ se, per ogni $s, t \in \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$, si ha $d(s, t) \leq \delta$ e, detto v il vertice di Δ che sta fra s e t , allora $d(s, t') \leq \delta$ per ogni $t' \in [v-t]$ e $s' \in [s, v]$ tali che $d(v, t') = d(v, s')$.



ESERCIZIO 5.11. Sia (X, d) uno spazio metrico geodesico, e sia $\delta \geq 0$. Si provi che ogni triangolo geodesico δ -thin di X è un triangolo δ -slim.

ESERCIZIO 5.12. Sia (X, d) uno spazio metrico geodesico.

- (i) Per $\delta \geq 0$, sia $\Delta = \Delta(x, y, z)$ un triangolo geodesico δ -slim di X ; si provi che $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 4\delta$.
- (ii) Sia $\delta \geq 0$; si provi che se G è δ -iperbolico allora ogni triangolo geodesico di X è 4δ -thin.
- (iii) Si concluda che X è iperbolico se e solo se esiste $\delta \geq 0$ tale che ogni triangolo geodesico di X è δ -thin.

5.4. Gruppi iperbolici

Il Corollario 5.10 (il Teorema 5.9) implica in particolare che le realizzazioni geometriche di grafi di Cayley per due diversi sistemi finiti di generatori di uno stesso gruppo, sono entrambe iperboliche oppure entrambe non iperboliche; e consente quindi la seguente definizione.

DEFINIZIONE. Sia G un gruppo finitamente generato. G si dice *iperbolico* se, posto S un sistema finito di generatori di G , la realizzazione geometrica $|\Gamma[G, S]|$ è uno spazio (geodesico) iperbolico.

Ancora dal Corollario 5.10 segue che la classe dei gruppi finitamente generati iperbolici è una classe geometrica.

Esempio 5.5. Per opposte ragioni, sono iperbolici tutti i gruppi finiti ed i gruppi liberi finitamente generati (gli ultimi perché un loro grafo di Cayley è un albero, dunque 0-iperbolico). \square

Esempio 5.6. Il gruppo $SL(2, \mathbb{Z})$ è iperbolico perché è quasi-isometrico al gruppo libero F_2 . \square

Esempio 5.7. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non è iperbolico. Infatti, abbiamo visto nell'esempio 5.3, che il grafo di Cayley $\Gamma[\mathbb{Z}^2, S]$ con $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ non è Gromov iperbolico, dunque la sua realizzazione geometrica non è iperbolica. Più avanti, proveremo che il gruppo del Lampionario ed il gruppo di Heisenberg (vedi esercizio 4.21) non sono iperbolici. \square

Dal Lemma di Milnor-Švarc 4.6, in congiunzione con il Corollario 5.10, segue che un gruppo G è iperbolico se e solo se esiste uno spazio metrico iperbolico proprio X sul quale G ammette un'azione propriamente discontinua e co-compatta. Diciamo qualcosa per il caso in cui lo spazio sia il piano iperbolico \mathbb{H} .

Gruppi Fuchsiani. Un *gruppo Fuchsiano* è, per definizione, un gruppo discreto G di isometrie di \mathbb{H} che preservano l'orientamento; quindi, per quanto richiamato nella sezione 5.2, è sottogruppo discreto di $PSL(2, \mathbb{R})$. Con ciò si intende che G è isolato nella topologia indotta su $PSL(2, \mathbb{Z})$ da $SL(2, \mathbb{Z})$ in quanto sottospazio dello spazio euclideo \mathbb{R}^4 .

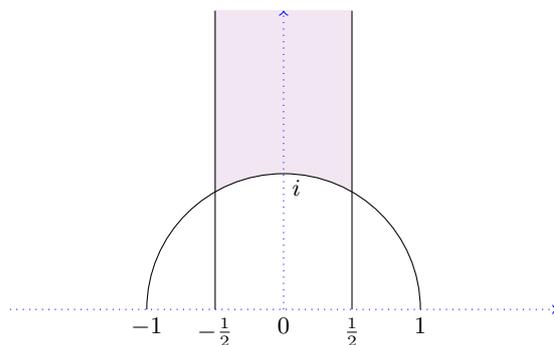
Risale a Poincaré l'osservazione che un sottogruppo di $\text{Isom}(\mathbb{H})$ è discreto se e solo se propriamente discontinuo. Quindi, per il Lemma di Milnor-Švarc, un gruppo Fuchsiano co-compatto è iperbolico.

Ora, ogni gruppo Fuchsiano G ammette un *dominio fondamentale*, ovvero un sottoinsieme aperto e connesso di U_G di \mathbb{H} tale che

- $\mathbb{H} = \bigcup_{g \in G} g\bar{U}_G$ (dove \bar{U}_G è la chiusura di U_G);
- $gU_G \cap U_G = \emptyset$ per ogni $1 \neq g \in G$.

In particolare, punti distinti di U_G appartengono a G -orbite diverse. Si prova poi che lo spazio delle orbite $G \backslash \mathbb{H}$ è omeomorfo allo spazio $G \backslash \bar{U}_G$, ottenuto identificando in \bar{U}_G punti appartenenti alla stessa G -orbita (per definizione, tali punti stanno tutti sulla frontiera). Il gruppo G è quindi co-compatto se e solo se lo spazio $G \backslash \bar{U}_G$ è compatto.

NOTA-ESEMPIO. $G = PSL(2, \mathbb{Z})$ è un gruppo fuchsiano, ma per la sua azione su \mathbb{H} non vale la conclusione del Lemma di Milnor-Švarc (vedi esercizio 5.16); infatti tale azione non è co-compatta: un dominio fondamentale per G è l'insieme $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, -\frac{1}{2} < \Re z < \frac{1}{2}\}$ colorato in figura.



Lo spazio delle orbite $G \backslash \mathbb{H}$ si ottiene dal dominio fondamentale identificando le due semirette verticali (mediante la trasformazione $z \mapsto z + 1$) e le due metà del segmento geodesico per il punto i (mediante la trasformazione $z \mapsto -\frac{1}{z}$); si ottiene uno spazio che non è compatto. Dunque l'azione di G su \mathbb{H} non è co-compatta e Milnor-Švarc non si applica.

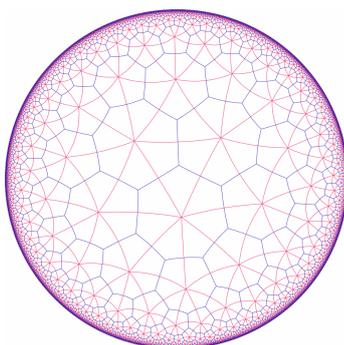
Va da sé che $G = PSL(2, \mathbb{Z})$ è però comunque un gruppo iperbolico.

Tassellature del piano iperbolico. Un classico (e non troppo difficile) risultato della geometria del piano euclideo \mathbb{R}^2 riconosce come esistano soltanto tre maniere per ottenere una tassellatura regolare (cioè tale il suo gruppo di simmetria agisce transitivamente sui tasselli) del piano usando poligoni regolari tutti tra loro congruenti (cioè isometrici): mediante triangoli equilateri, quadrati o esagoni.

Sotto questo aspetto, il piano iperbolico si mostra molto più ricco: si dimostra infatti che esiste una tassellatura regolare di \mathbb{H} mediante n -agoni³ isometrici in modo che in ogni vertice si incontrano k tali n -agoni se e solo se

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2},$$

e in tal caso si parla di una tassellatura di \mathbb{H} di tipo (n, k) . La figura che segue mostra, disegnata sul disco di Poincaré, la tassellatura di tipo $(7, 3)$ (e la sua duale, fatta con i triangoli dai lati rossi)⁴.



³Ovviamente, la definizione di n -agono regolare nel piano iperbolico è la stessa del caso euclideo.

⁴La figura è scaricata dal sito di Dmitry Brant (<https://dmitrybrant.com/2007/01/24/hyperbolic-tesselations>), dove è messo a disposizione un programma che produce varie tassellature. Un'altra fornita galleria di tassellature del disco di Poincaré, curata da D.Hatch, si trova nel sito <https://www.plunk.org/~hatch/HyperbolicTesselations/>

Si dimostra che il gruppo di simmetria (cioè il gruppo di tutte le isometrie di \mathbb{H} che la conservano) di questa tassellatura è generato dalle tre riflessioni iperboliche di \mathbb{H} con assi le rette su cui giacciono i lati di un triangolo i cui vertici sono il centro di uno degli eptagoni, un suo vertice, ed il punto medio di uno dei lati dell'eptagono incidenti in tale vertice, e che questo gruppo ha la seguente presentazione

$$T_{2,3,7} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = 1, (xy)^2 = (yz)^3 = (xz)^7 = 1 \rangle.$$

Questo gruppo non è propriamente Fuchsiano (i generatori sono riflessioni iperboliche che non conservano l'orientamento), ma la sua intersezione con $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ è un sottogruppo di indice 2 che è Fuchsiano; inoltre è co-compatto (un dominio fondamentale è costituito proprio dall'interno del triangolo che definisce le riflessioni generatrici), quindi è un gruppo iperbolico quasi-isometrico a \mathbb{H} .

Questo è solo uno dei tanti *gruppi triangolari*, ovvero gruppi generati da riflessioni lungo i lati di un triangolo i cui angoli interni misurano $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$, per $2 \leq l \leq m \leq n \in \mathbb{N}$ (sul piano euclideo, sferico o iperbolico). Tali gruppi hanno presentazione

$$T_{l,m,n} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = 1, (xy)^l = (yz)^m = (xz)^n = 1 \rangle.$$

Nel caso euclideo, vi sono solo tre possibilità per (l, m, n) , ovvero $(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$, mentre nel piano euclideo \mathbb{H} la condizione sulla terna è $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$; per ciascuna di tali terne il gruppo $T_{l,m,n}$ sia può rappresentare come un gruppo Fuchsiano e, come nel caso visto sopra, iperbolico.

Surface Groups. Altri casi interessanti di gruppi Fuchsiani si trovano tra i gruppi fondamentali di una superficie.

Come noto, una superficie chiusa e orientabile è caratterizzata dal suo *genere* g . La superficie chiusa orientabile di genere 0 è la sfera 2-dimensionale, che è semplicemente connessa, quindi il suo gruppo fondamentale è banale; la superficie chiusa orientata di genere 1 è il toro, il cui gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (che, come detto, non è iperbolico). In generale, per $g \geq 1$ il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ di una superficie chiusa ed orientabile di genere g è il gruppo con la presentazione

$$\Gamma_g = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \mid [x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_g, y_g] = 1 \rangle$$

detto *surface group* di ordine g . Per $g \geq 2$ tale gruppo è realizzabile, con una procedura abbastanza standard che però non approfondiamo, come un gruppo Fuchsiano, i cui domini fondamentali sono $4g$ -agoni regolari del piano \mathbb{H} . Quindi, Γ_g risulta quasi-isometrico a \mathbb{H} .

ESERCIZIO 5.13. Un gruppo abeliano (finitamente generato) è iperbolico se e solo se è isomorfo a $\mathbb{Z} \times A$ con A gruppo abeliano finito.

ESERCIZIO 5.14. Sia G un gruppo finitamente generato e privo di involuzioni (elementi di ordine 2). Si provi che se esiste un sistema finito S di generatori di G tale che $|\Gamma[G, S]|$ è 0-iperbolico allora G è un gruppo libero.

ESERCIZIO 5.15. Si provi che il gruppo $PSL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ non è Fuchsiano.

ESERCIZIO 5.16. Sia $G = SL(2, \mathbb{Z})$ come gruppo di trasformazioni di Möbius del piano iperbolico \mathbb{H} , e sia $z \in \mathbb{H}$. Si provi che l'applicazione $G \rightarrow \mathbb{H}$ data da $A \mapsto A \cdot z$ non è una quasi-isometria. [sugg.: si consideri l'azione del sottogruppo generato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.]

5.5. Sottogruppi di gruppi iperbolici

DEFINIZIONE. 1) Sia (X, d) uno spazio metrico geodesico. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice *quasi-convesso* se esiste $k > 0$ tale che per ogni coppia di elementi $y, y_1 \in Y$ ed ogni segmento geodesico $[y-y_1]$,

$$[y-y_1] \subseteq B_X(Y, k).$$

(quando serve, diremo che tale Y è k -quasi-convesso.)

2) Sia S un sistema finito di generatori del gruppo G . Un sottogruppo $H \leq G$ si dice *quasi-convesso rispetto ad S* se H è un sottoinsieme quasi-convesso di $|\Gamma[G, S]|$.

Esempio 5.8. Ogni sottogruppo finito ed ogni sottogruppo di indice finito di un gruppo finitamente generato G è quasi-convesso (rispetto a qualsiasi sistema finito di generatori di G) \square

Lemma 5.11. *Sia S un sistema finito di generatori del gruppo G . Se H è un sottogruppo quasi-convesso rispetto ad S , allora H è finitamente generato e l'inclusione identica $H \rightarrow G$ è un'inclusione quasi-isometrica.*

Dimostrazione. Supponiamo H sia k -quasi-convesso rispetto a S . Sia $h \in H$ e siano $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ tali che $1, s_1, s_1s_2, \dots, s_1 \cdots s_n = h$ siano i vertici di un cammino geodesico da 1 a h . Si ha allora che per ogni $i = 1, \dots, n$, esiste $h_i \in H$ tale che

$$d_S(1, h_i^{-1}s_1 \cdots s_i) = d_S(h_i, s_1 \cdots s_i) \leq k,$$

ovvero $g_i = h_i^{-1}s_1 \cdots s_i \in B_S(1, k)$ (e $g_0 = g_n = 1$). Quindi

$$h = g_0s_1g_1^{-1} \cdot g_1s_2g_2^{-1} \cdots g_{n-1}s_n g_n^{-1} = \prod_{i=1}^n (h_{i-1}^{-1}h_i),$$

con $h_{i-1}^{-1}h_i \in H \cap B_S(1, 2k+1)$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Pertanto, H è generato dall'insieme $T = H \cap B_S(1, 2k+1)$, che è finito.

Ora, per ogni $h, h' \in H$, si ha chiaramente

$$d_T(h, h) = \ell_T(h^{-1}h') \leq (2k+1)\ell_S(h^{-1}h') = (2k+1)d_S(h, h'),$$

e dunque l'inclusione identica $H \rightarrow G$ è un'inclusione quasi-isometrica. \square

Lemma 5.12. *Sia S un sistema finito di generatori del gruppo G . Se A e B sono sottogruppi quasi-convessi rispetto ad S , allora $A \cap B$ è un sottogruppo quasi-convesso rispetto ad S .*

Dimostrazione. Possiamo supporre A e B siano k -quasi convessi per lo stesso $k \geq 0$. Sia $h \in A \cap B$, e sia $x \in G$ un elemento appartenente ad un cammino geodesico in $X = \Gamma[G, S]$ da 1 a h . Consideriamo l'insieme \mathfrak{P} di tutti i cammini da x a $A \cap B$ in cui ogni punto è contenuto in $B_S(A, k) \cap B_S(B, k)$. \mathfrak{P} non è vuoto (dato che contiene il tratto da x a h del segmento geodesico iniziale): sia \mathfrak{p} un suo elemento di lunghezza minima, sia L tale lunghezza, e sia $h \in A \cap B$ l'estremo di \mathfrak{p} . Per costruzione, ad ogni punto $u \in \mathfrak{p}$ si può associare una coppia $(y_u, y'_u) \in B_S(1, k) \times B_S(1, k)$ tale che $uy_u \in A$ e $uy'_u \in B$. Supponiamo ora

$$L > |B_S(1, k)|^2.$$

Allora, per il principio dei cassettei, esistono elementi distinti $u, v \in \mathfrak{p}$ tali che u precede v in \mathfrak{p} e $(y_u, y'_u) = (y_v, y'_v)$. Quindi

$$uv^{-1} = uy_u y_v^{-1} v^{-1} = (uy_u)(vy_v)^{-1} \in A,$$

e similmente $uv^{-1} \in B$. Dunque $uv^{-1} \in A \cap B$. Chiamando \mathfrak{p}' il tratto di \mathfrak{p} da x a u , e \mathfrak{p}'' quello da v a h , si osserva che, per ogni punto $y \in \mathfrak{p}''$,

$$d_S(uv^{-1}y, A) = d_S(y, A) \leq k \quad \text{e} \quad d_S(uv^{-1}y, B) = d_S(y, B) \leq k.$$

Quindi il cammino da x a $uv^{-1}h \in A \cap B$ ottenuto da \mathfrak{p}' seguito da $(uv^{-1})\mathfrak{p}''$, appartiene all'insieme \mathfrak{B} , ma ha lunghezza strettamente minore di quella di \mathfrak{p} , che è una contraddizione.

Dunque $L \leq C := |B_S(1, k)|^2$, il che implica che la distanza di x da $A \cap B$ non supera C , così provando che $A \cap B$ è un sottogruppo C -quasi-convesso di G . \square

Esempio 5.9. La quasi-convessità di un sottogruppo di un gruppo finitamente generato G dipende in genere dal sistema di generatori S dato per G . Ad esempio in $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, il sottogruppo $H = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ non è quasi-convesso rispetto al sistema di generatori $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$: infatti, per ogni $n \geq 1$ il punto $(0, n)$ appartiene ad un segmento geodesico in G da $(0, 0)$ a (n, n) ma $d_S(H, (0, n)) = n$ (ci sono altri segmenti geodesici che rimangono a distanza 1 da H , ed il punto è proprio che in generale segmenti geodesici tra gli stessi estremi possono essere distanti l'uno dall'altro). D'altra parte, H è quasi-convesso rispetto al sistema di generatori $S \cup \{(1, 1)\}$ (in questo caso esiste un unico segmento geodesico tra due punti di H , che è tutto contenuto in H). \square

Passiamo ora al caso dei gruppi iperbolici.

Lemma 5.13. *Siano G un gruppo iperbolico e H un sottogruppo finitamente generato.*

- 1) *H è quasi-convesso se e solo se l'inclusione identica $H \rightarrow G$ è un'inclusione quasi-isometrica.*
- 2) *Se H è quasi-convesso rispetto ad un sistema finito di generatori di G allora è quasi-convesso rispetto ad ogni sistema finito di generatori.*

Dimostrazione. In un verso, l'affermazione 1) è provata nel Lemma 5.11.

Per il viceversa, siano S e T sistemi finiti di generatori, rispettivamente, di G e di H , e supponiamo che l'inclusione identica $H \rightarrow G$ induca un'inclusione quasi-isometrica ϕ dello spazio $Y = |\Gamma[H, T]|$ in $X = |\Gamma[G, S]|$. Dati $h, h' \in H$, sia $\gamma : [0, r] \rightarrow Y$ un segmento geodesico in Y da $h = \gamma(0)$ a $h' = \gamma(r)$; allora $c = \phi \circ \gamma$ è un segmento quasi-geodesico in X da $\phi(h) = h$ a $\phi(h') = h'$. Se $[h-h']$ è l'immagine di un qualunque segmento geodesico in X da h a h' , allora, per il Teorema 5.7 $[h-h']$ è contenuto in $B_X(Im(c), R) \subseteq B_X(Y, R)$, dove R dipende solo dai parametri di iperbolicità di G e di inclusione quasi-isometrica di ϕ . Dunque H è un sottogruppo quasi-convesso.

Da 1) segue il punto 2), poiché il fatto che l'inclusione $H \rightarrow G$ sia una inclusione quasi-isometrica non dipende dai sistemi di generatori di G (e H). \square

Dal Teorema 5.9 segue immediatamente il seguente corollario.

Teorema 5.14. *Un sottogruppo quasi-convesso di un gruppo iperbolico è un gruppo iperbolico.*

Applicheremo ora lo strumento dei sottogruppi quasi-convessi per dimostrare quella che forse è la più 'visibile' ostruzione a che un gruppo finitamente generato sia iperbolico (Teorema 5.16).

Proposizione 5.15. *Sia G un gruppo iperbolico. Allora, per ogni $g \in G$, $C_G(g)$ è un sottogruppo convesso.*

Dimostrazione. Sia S un sistema finito di generatori di G che, per il Lemma 5.13, e per comodità, possiamo assumere contenga g (il caso $g = 1$ è banale). Sia $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $|\Gamma| = |\Gamma[G, S]|$ è δ -iperbolico.

Proviamo la seguente affermazione: c'è una funzione $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, che dipende solo da δ (e da G, S come dati in partenza), tale che, per ogni $u \in G$,

$$d_S(u, C_G(g)) \leq k(d_S(u, gu)). \quad (5.6)$$

La dimostriamo per induzione su $\ell_s(u) = d_S(1, u)$. Dato $u \in G$, siano $R = \ell_s(u)$, $D = d_S(u, gu)$ e $\gamma : [0, R] \rightarrow X$ un segmento geodesico in $|\Gamma|$ con $\gamma(0) = 1, \gamma(R) = u$. Allora, $\gamma' = g \circ \gamma : [0, R] \rightarrow X$ (stiamo ovviamente considerando l'estensione a $|\Gamma|$ dell'azione per moltiplicazione a sinistra di g) è un segmento geodesico, con $\gamma'(0) = g$ e $\gamma'(r) = gu$. Ora,

$$d_S(\gamma(0), \gamma'(0)) = d_S(1, g) = 1 \quad \text{e} \quad d_S(\gamma(r), \gamma'(r)) = d_S(u, gu) = D;$$

e dunque, per una conseguenza non difficile del Teorema 5.7 (si tratta dell'esercizio 5.9 applicato due volte), esiste $K_1 = K_1(\delta, D)$ tale che

$$d_{|\Gamma|}(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq K_1 \quad \text{per ogni } t \in [0, R]. \quad (5.7)$$

Poniamo $K = k(D) = |B_G(1, K_1)|$ (dipende solo da δ e D). Da (5.8) segue che, per ogni $\gamma(t) = v \in \text{Im}(\gamma) \cap G$,

$$d_S(v, gv) = d_{|\Gamma|}(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq K_1,$$

quindi $gv = vb$ con $b \in B_G(1, K_1)$. Ora, se $R = \ell_s(u) \leq K$ siamo già a posto. Altrimenti, $R \geq K + 1$ e dunque, per il principio dei cassetti, esistono $0 \leq t_1 < t_2 \leq R$ tali che $v_1 = \gamma(t_1) \in G$, $v_2 = \gamma(t_2) \in G$, con $gv_1 = v_1b$ e $gv_2 = v_2b$ per lo stesso elemento $b \in B_G(1, K_1)$. Allora

$$v_2v_1^{-1}g = v_2bv_1^{-1} = gv_2v_1^{-1},$$

quindi $v_2v_1^{-1} \in C_G(g)$. Inoltre, $d_S(v_2, v_2v_1^{-1}) = d_S(1, v_1^{-1}) = d_S(1, v_1) = t_1 \leq M$. Pertanto, posto $h = v_2v_1^{-1}$,

$$\ell_S(h^{-1}u) = d_S(u, v_2v_1^{-1}) \leq d_S(u, v_2) + d_S(v_2, v_2v_1^{-1}) = R - t_2 + t_1 \leq R - 1.$$

Ma si ha anche $d_S(h^{-1}u, gh^{-1}u) = d_S(h^{-1}u, h^{-1}gu) = d_S(u, gu) = D$; quindi, per ipotesi induttiva,

$$K = k(D) \geq d_S(h^{-1}u, C_G(g)) = d_S(u, hC_G(g)) = d_S(u, C_G(g)),$$

così completando la dimostrazione dell'affermazione (5.6).

Proviamo ora la Proposizione. Sia quindi $\gamma : [0, R] \rightarrow |\Gamma|$ un segmento geodesico con $\gamma(0), \gamma(r) \in C_G(g)$; vogliamo provare che esiste $k \geq 0$ tale che $\text{Im}(\gamma) \subseteq B_{|\Gamma|}(C_G(g), k)$.

Possiamo supporre, a meno di moltiplicazione a sinistra, $\gamma(0) = 1$, e scrivere $\gamma(R) = h$. Consideriamo il segmento geodesico $\gamma' = g \circ \gamma$, per cui $\gamma'(0) = g$ e $\gamma'(R) = gh = hg$. Allora,

$$d_S(\gamma(0), \gamma'(0)) = d_S(1, g) = 1 = d_S(h, hg) = d_S(\gamma(R), \gamma'(R)),$$

e dunque, come prima, esiste una costante D , che dipende solo da δ , tale che

$$d_{|\Gamma|}(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq D \quad \text{per ogni } t \in [0, r]. \quad (5.8)$$

In particolare, se $u \in \text{Im}(\gamma) \cap G$, allora $d_S(u, gu) \leq D$; dunque per quanto provato prima, $d_S(u, C_G(g)) \leq k(D)$. Poiché per ogni $t \in [0, 1]$ esiste $u \in \text{Im}(\gamma) \cap G$ tale che $d_{|\Gamma|}(\gamma(t), u) < 1$, concludiamo che, posto $k = k(D) + 1$, si ha $d_{|\Gamma|}(\gamma(t), C_G(g)) \leq k$ per ogni $t \in [0, R]$, e dunque la dimostrazione. \square

Esempio 5.10. Sia $H \neq \{1\}$ un gruppo finitamente generato, allora il prodotto intrecciato ristretto $G = H \wr \mathbb{Z} = B \rtimes \mathbb{Z}$ (dove, come al solito, B è la base) è finitamente generato; tuttavia, per ogni $1 \neq b \in B$, il centralizzante $C_G(b)$ è contenuto in B , da cui segue facilmente che $C_G(b)$ non è finitamente generato, dunque non iperbolico. Per la Proposizione 5.15 e il Teorema 5.14 si conclude che G non è iperbolico. In particolare, il gruppo del Lampionaio L_2 non è iperbolico. \square

Teorema 5.16. *Un gruppo iperbolico non contiene sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo iperbolico e supponiamo, per assurdo, che G ammetta un sottogruppo $H \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Siano $g, h \in H$ di ordine infinito tali che $H = \langle g, h \rangle$. Per la Proposizione 5.15 ed il Lemma 5.12, $Q := C_G(H) = C_G(g) \cap C_G(h)$ è un sottogruppo quasi-convesso di G e quindi, per il Teorema 5.14, è iperbolico (in particolare, finitamente generato). Sia Y un sistema finito di generatori di Q ; ancora per la Proposizione 5.15 ed il Lemma 5.12,

$$Z(Q) = \bigcap_{x \in Y} C_Q(x)$$

è un sottogruppo quasi-convesso e dunque iperbolico di Q . Poiché Q è abeliano, Q non contiene sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (esercizio 5.13), ma $H \leq Z(Q)$: contraddizione. \square

Naturalmente, il non contenere sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non è una condizione necessaria a che un gruppo finitamente generato non sia iperbolico; ad esempio il gruppo del lampionaio L_2 non è iperbolico e non contiene sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Esempio 5.11. Il gruppo di Heisenberg discreto non è iperbolico, dato che contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (punto 1 dell'esercizio 4.21). Di conseguenza, il gruppo $SL(n, \mathbb{Z})$ non è iperbolico per ogni $n \geq 3$. \square

Esempio 5.12. Se $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $|n| = |m|$, allora nel gruppo di Baumslag–Solitar $BS(m, n) = \langle a, b \mid ab^m = b^n a \rangle$ il sottogruppo generato da $\{a^2, b^m\}$ è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; dunque $BS(m, n)$ non è iperbolico. In effetti, è stato dimostrato che nessun gruppo di Baumslag–Solitar è iperbolico (vedi esercizio qui sotto). \square

ESERCIZIO 5.17. Si provi che il gruppo di Baumslag–Solitar $BS(1, 2)$

- 1) non contiene sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
- 2) non è iperbolico [sugg. guardare al centralizzante di un opportuno elemento].

ESERCIZIO 5.18. Siano H, K gruppi finitamente generati e siano S, T sistemi finiti di generatori, rispettivamente, di H e di K . Si provi che H e K sono sottogruppi quasi-convessi del prodotto libero $H * K$ rispetto al sistema di generatori $S \cup T$. Si deduca che un prodotto libero $H * K$ di gruppi finitamente generati H e K è iperbolico se e solo se H e K sono iperbolici.

5.6. Il problema della parola

DEFINIZIONE. Sia $\langle S \mid R \rangle$ una presentazione di un gruppo con S finito, e sia W_S l'insieme di tutte le parole nell'alfabeto $S \cup S^{-1}$. Si dice che il *problema della parola* è *risolubile* in $G = \langle S \mid R \rangle$ se esiste un algoritmo che, per ogni $w \in W_S$, decide se w rappresenta 1_G oppure no.

Detto in maniera più formale; il problema della parola è risolubile in $\langle S \mid R \rangle$ se gli insiemi

$$U = \{w \in W_S \mid w \text{ rappresenta } 1 \text{ in } \langle S \mid R \rangle\} \text{ e } W_S \setminus U \quad (5.9)$$

sono ricorsivamente enumerabili⁵.

La procedura di riduzione mediante cancellazione delle coppie del tipo ss^{-1} o $s^{-1}s$ (con $s \in S$) è un algoritmo finito che per ogni $w \in W_S$ fornisce in output l'unica parola ridotta \bar{w} , ed è chiaramente l'algoritmo che risolve il problema della parola nel gruppo libero $F(S) = \langle S \mid \emptyset \rangle$.

Poiché, in generale, w e \bar{w} rappresentano lo stesso elemento in $\langle S \mid R \rangle$, un algoritmo che risolva il problema della parola può essere ricondotto a prendere come input iniziale solo le parole ridotte, ovvero gli elementi del gruppo libero $F(S)$; da questo punto di vista, l'insieme U nella (5.9) diventa

$$U = \{w \in F(S) \mid w \in \langle R \rangle^{F(S)}\}.$$

Il *Problema della parola* (cioè determinare se in un gruppo finitamente generato sia o no risolubile il problema della parola) è, storicamente e per le sue ripercussioni in molte altre parti della matematica, una delle questioni fondamentali nello studio delle presentazioni. Citiamo ad esempio, senza dimostrarlo (vedi [8]), un risultato che ha importanti ricadute.

Teorema 5.17 (Novikov, Boone). *Esistono gruppi finitamente presentati tali che il problema della parola non è risolubile in alcuna loro presentazione finita.*

Osserviamo infine che se in $G = \langle S \mid R \rangle$ il problema della parola è risolubile, allora esiste un algoritmo che decide se, date due parole $w, w' \in W_S$, esse rappresentano o no lo stesso elemento di G .

Il risultato principale che proveremo in questa sezione è il seguente.

Teorema 5.18. *Sia G un gruppo iperbolico e sia S un suo sistema finito di generatori. Allora esiste un sottoinsieme finito $R \subseteq W_S$ tale che $G = \langle S \mid R \rangle$ ed il problema della parola è risolubile in $\langle S \mid R \rangle$.*

L'enunciato include il seguente fatto interessante, che enunciamo separatamente.

Corollario 5.19. *Ogni gruppo iperbolico è finitamente presentato.*

⁵Il problema della parola si pone anche se l'insieme delle relazioni R è infinito, in tal caso, però, si deve richiedere che R sia ricorsivamente enumerabile.

Inoltre, si può dimostrare che se nel gruppo finitamente generato G il problema della parola è risolubile rispetto ad una presentazione finita, allora è risolubile in ogni altra presentazione finita; in questo senso, si dice che il problema della parola è risolubile nel gruppo G ; nella nostra esposizione continueremo a fare riferimento ad una data presentazione perché risulta più comodo.

La dimostrazione del teorema 5.18 è basata sul concetto di presentazione di Dehn, che definiamo subito.

DEFINIZIONE. Una presentazione finita $\langle S \mid R \rangle$ è una *presentazione di Dehn* se esistono un intero positivo n e parole ridotte $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ in W_S tali che:

- $R = \{u_1v_1^{-1}, \dots, u_nv_n^{-1}\}$;
- $\ell_S(u_i) > \ell_S(v_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- ogni parola ridotta $w \in W_S$ che rappresenta 1 in $\langle S \mid R \rangle$ contiene come sottoparola una u_j per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$.

NOTA. La più elementare presentazione di Dehn è quella in un gruppo finito G , prendendo l'insieme degli elementi diversi da 1_G come generatori e , come relazioni, la tavola di moltiplicazione, escluse le relazioni banali gg^{-1} ; ogni relazione è del tipo xyz . In questo caso, in ogni parola w di lunghezza maggiore di uno nei generatori, si troverà, o una coppia xx^{-1} (che si cancella), oppure xy che si sostituisce con z^{-1} se xyz è la relazione opportuna; si ottiene così una parola w' che rappresenta lo stesso elemento di G ed ha lunghezza minore di quella di w ; ed è il passo che definisce un ovvio algoritmo per decidere se w rappresenta 1_G . In questa considerazione banale è racchiuso il principio che assicura la semplice efficacia delle presentazioni di Dehn.

Proposizione 5.20. *Se $\langle S \mid R \rangle$ è una presentazione di Dehn allora il problema della parola è risolubile in $\langle S \mid R \rangle$.*

Dimostrazione. Sia $G = \langle S \mid R \rangle$ una presentazione di Dehn con $R = \{u_1v_1^{-1}, \dots, u_nv_n^{-1}\}$ e le notazioni nella definizione di sopra. L'algoritmo di soluzione del problema della parola consiste nell'iterazione, fino all'arresto, del passo seguente.

Sia w una parola in W_S ;

- si produce la riduzione \bar{w} di w ;
- se $\bar{w} = \emptyset$, allora w rappresenta 1_G e si finisce; altrimenti
- se nessuna delle parole u_j , con $j \in \{1, \dots, n\}$, è una sottoparola di \bar{w} , allora w non rappresenta 1_G e si finisce; altrimenti
- per $j \in \{1, \dots, n\}$, $\bar{w} = ru_jr'$, con $r, r' \in W_S$, allora (si sostituisce u_j con v_j) w rappresenta in G lo stesso elemento di $w' = rv_jr'$ e $\ell_S(w') < \ell_S(\bar{w}) \leq \ell_S(w)$; si ripete quindi il passo con w' al posto di w .

Dopo un numero di passi non superiore a $\ell_S(w)$ questo processo si arresta. □

In vista di questa Proposizione, il Teorema 5.18 segue dal seguente.

Teorema 5.21. *Sia G un gruppo iperbolico e sia S un suo sistema finito di generatori. Allora esiste un sottoinsieme finito $R \subseteq W_S$ tale che $\langle S \mid R \rangle$ è una presentazione di Dehn di G .*

Seguiamo solo una traccia della dimostrazione. Il risultato tecnico che fa funzionare tutta la faccenda è il seguente Lemma.

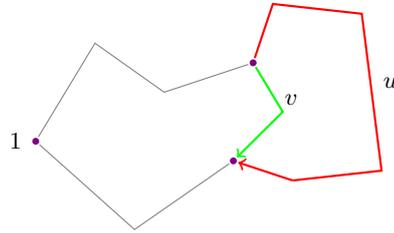
Lemma 5.22. *Sia S un sistema finito di generatori del gruppo G e supponiamo che lo spazio geodesico $X = |\Gamma[G, S]|$ sia δ -iperbolico, per $\delta > 0$. Sia $\gamma : [0, n] \rightarrow X$ la realizzazione geometrica di un ciclo di lunghezza $n \geq 2$ nel grafo di Cayley discreto $\Gamma[G, S]$. Allora esistono $t, t_1 \in [0, n]$ tali che la restrizione $\gamma|_{[t, t_1]}$ non è geodesica, e*

$$L_X(\gamma|_{[t, t_1]}) \leq 8\delta.$$

Omettiamo la dimostrazione, non immediata e abbastanza tecnica, come già diverse volte in questo capitolo, e vediamo invece cosa il Lemma comporta quando interpretato in termini di parole e relazioni.

Sia S un sistema finito di generatori del gruppo G tale che $X = |\Gamma[G, S]|$ uno spazio δ -iperbolico, per $\delta > 0$. Poniamo $D = \lfloor 8\delta \rfloor$. Sia $x_1x_2 \cdots x_n$ una parola ridotta in W_S che rappresenta 1_G e tale che nessuna sottoparola $x_i x_{i+1}$ rappresenta 1_G ; allora, ponendo $g_0 = 1_G$ e, per ogni $i = 0, \dots, n-1$, $g_{i+1} = g_i x_{i+1}$, si ha che $1_G = g_0, g_1, \dots, g_n = 1_G$ sono i vertici di un circuito nel grafo $\Gamma[G, S]$.

Il Lemma 5.22 dice che esistono $0 \leq i \leq j \leq n$ con $j - i \leq D$ tali che $d_S(g_i, g_j) < j - i$ (se $n < D$, $i = 0, j = n$). In altri termini, posto $u = x_{i+1}x_{i+2} \cdots x_j$, esiste $v \in W_S$ tale che uv^{-1} rappresenta 1_G , e la lunghezza di v (come parola di W_S) è strettamente minore di quella di u (vedi figura).



Dimostrazione del Teorema 5.21. Sia $\pi : F(S) \rightarrow G$ l'omomorfismo canonico, ed utilizziamo le notazioni dell'osservazione di sopra, in più, per chiarezza, denotiamo con $\ell(w)$ la lunghezza di $w \in W_S$ come parola in $S \cup S^{-1}$. Poniamo

$$R = \{uv^{-1} \mid u, v \in W_S, \pi(uv^{-1}) = 1_G, \ell(v) = d_S(1, \pi(u)) < \ell(u) \leq D\},$$

e dimostriamo che $\langle S \mid R \rangle$ è una presentazione di Dehn di G .

È chiaro che π induce un omomorfismo suriettivo $\langle S \mid R \rangle \rightarrow G$; che risulta, come vogliamo, un isomorfismo se ogni $w \in W_S$ tale che $\pi(w) = 1_G$ appartiene a $K = \langle R \rangle^{F(S)}$. Dimostriamo questo per induzione su $\ell(w)$. Osservato che il caso $\ell(w) = 0$ è banale, notiamo anche che R contiene tutte le parole u tali che $\pi(u) = 1_G$ e $0 < \ell(u) \leq D$ (con $v = \emptyset$, la parola vuota). Supponiamo quindi $\ell(w) > D$.

(1) Se $w = w_1 ss' w_2$, con $s, s' \in S \cup S^{-1}$ e $\pi(ss') = 1_G$, allora $\pi(w_1 w_2) = 1_G$ e, per quanto osservato, $t = ss' \in R$; quindi, per ipotesi induttiva,

$$w = w_1 t w_1^{-1} w_1 w_2 = t^{w_1} w_1 w_2 \in K.$$

(2) Se w non contiene sottoparole del tipo ss' come in (1), allora per le osservazioni fatte in precedenza esiste $uv^{-1} \in R$, ed esistono $w_1, w_2 \in W_S$, tali che $w = w_1 u w_2$. Ma allora $\pi(w_1 v w_2) = \pi(w) = 1_G$, dunque $w_1 v w_2 \in K$ per ipotesi induttiva e, di conseguenza,

$$w = w_1 u w_2 = w_1 u (v^{-1} w_1^{-1} w_1 v) w_2 = (uv^{-1})^{w_1} w_1 v w_2 \in K.$$

Questo completa la dimostrazione che $\langle S \mid R \rangle$ è una presentazione di G , e mostra allo stesso tempo che è una presentazione di Dehn. \square

Naturalmente, esistono intere altre classi di gruppi finitamente presentati, non iperbolici, nei quali il problema della parola è risolubile (e.g. tutti i gruppi \mathbb{Z}^n con $n \geq 1$); vediamo ad esempio un interessante risultato la cui dimostrazione, sorvolando un poco sugli aspetti formali di logica, non è difficile né lunga.

Teorema 5.23. *Il problema della parola è risolubile in ogni gruppo finitamente presentato e residualmente finito.*

Dimostrazione. Sia $\langle S \mid R \rangle$ un gruppo finitamente presentato e residualmente finito, e sia $\pi : F(S) \rightarrow G$ l'omomorfismo canonico. Se w è una parola ridotta in W_S vogliamo decidere, in un tempo finito, se $\pi(w) = 1_G$ oppure $\pi(w) \neq 1_G$. Accettiamo, senza approfondire formalmente le cose, che:

- è possibile enumerare ricorsivamente tutti i gruppi finiti che sono generati da un numero di generatori $\leq |S|$:

$$G_1 = \langle S \mid R_1 \rangle, G_2 = \langle S \mid R_2 \rangle, G_3 = \langle S \mid R_3 \rangle \dots$$

- è possibile enumerare ricorsivamente gli elementi (parole ridotte) appartenenti a $\ker(\pi) = \langle R \rangle^{F(S)}$ (questo perché R è finito): r_1, r_2, r_3, \dots

Si eseguono quindi in parallelo le due procedure, per cui, al passo i :

- si verifica (il problema della parola è risolubile nei gruppi finiti) se $\pi_i(w) = 1_{G_i}$, dove π_i è la composizione di π con la proiezione $G \rightarrow \langle S \mid R \cup R_i \rangle$;
- si confronta w con r_i .

Se $\pi(w) = 1_G$ allora la procedura (b) trova, dopo un numero finito di passi, $w = r_i$; se invece $\pi(w) \neq 1_G$, allora è la procedura (b) a trovare, in un numero finito di passi, $\pi_i(w) \neq 1_{G_i}$. \square

A tal proposito, menzioniamo una delle principali questioni ancora aperte nella teoria dei gruppi iperbolici.

PROBLEMA. È vero che ogni gruppo iperbolico è residualmente finito⁶?

ESERCIZIO 5.19. Sia $G = \langle S \mid R \rangle$ con S finito e tale che il problema della parola sia risolubile. Si provi che in ogni sottogruppo finitamente generato di G il problema della parola è risolubile.

ESERCIZIO 5.20. Il *problema del coniugio* chiede se, data una presentazione $G = \langle S \mid R \rangle$, esiste un algoritmo che decide quando due parole $w, w' \in W_S$ rappresentano elementi tra loro coniugati di G . Si provi che nei gruppi liberi $\langle S \mid \emptyset \rangle$ il problema del coniugio è risolubile (si può dimostrare che il problema del coniugio è risolubile in ogni gruppo iperbolico).

⁶Si dimostra che la risposta è affermativa se (e solo se) si prova che: *ogni gruppo iperbolico non banale ammette un sottogruppo proprio di indice finito.*