ALGEBRA I - ESERCIZI SULLE RELAZIONI D'ORDINE

Il simbolo $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali (incluso 0). Per quanto riguarda l'inclusione tra gli insiemi, essa è denotata come al solito mediante il simbolo $\subseteq$, mentre il simbolo $\subset$ denoterà l'inclusione *propria* (quindi, $B \subset A$ se $B \subseteq A$ e $B \neq A$).

Ricordo in particolare la seguente notazione, che sarà nel seguito applicata senza ulteriori spiegazioni: se A e B sono insiemi, con B^A si denota l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \to B$. Così, ad esempio, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$.

---

1. aspetti generali

Il primo esercizio introduce il concetto di *preordine* su un insieme X: ovvero una relazione riflessiva e transitiva (ma non necessariamente antisimmetrica) su X. Si tratta dell'esercizio 3.65 delle dispense Algebra I (2018).

PROBLEMA 1. Sia X un insieme non vuoto e sia ρ una relazione su X che è riflessiva e transitiva (cioè un preordine). Su X si definisca una relazione binaria $\#$ ponendo, per ogni $a, b \in X : a\#b$ se $a\rho b$ e $b\rho a$. Si dimostri che $\#$ é una equivalenza. Quindi, sull'insieme quoziente $X/\#$ si definisca (si provi che si tratta di una buona definizione !) una relazione $\leq$ ponendo per ogni $a, b \in X : [a]_\# \leq [b]_\#$ se $a\rho b$. Si provi che la relazione $\leq$ così definita è una relazione d' ordine su $X/\#$.

SOLUZIONE. Il fatto che la relazione $\#$ sia un'equivalenza è di verifica immediata. Passiamo quindi a provare la buona definizione della relazione $\leq$ sull'insieme quoziente $X/\#$. Siano $a, a', b, b' \in X$ con $[a]_\# = [a']_\#$ e $[b]_\# = [b']_\#$; allora, $a\rho a', a'\rho a$ e $b\rho b', b'\rho b$. Se $a\rho b$ (cioè, secondo la definizone $[a]_\# \leq [b]_\#$), allora si ha

$$a' \rho\, a\, \rho\, b\, \rho\, b',$$

e per la transitività di ρ segue $a'\rho b'$ (cioè $[a']_\# \leq [b']_\#$). Allo stesso modo si ha $a'\rho b' \Rightarrow a\rho b$. Questo prova che $\leq$ è una relazione (ben definita) su $X/\#$.
Provare che $\leq$ è una relazione d'ordine, a questo punto, è facile. Verifichiamo solo la proprietà *antisimmetrica*: siano $[a]_\#, [b]_\# \in X/\#$, con $[a]_\# \leq [b]_\#$ e $[b]_\# \leq [a]_\#$; allora, per definizione, $a\rho b$ e $b\rho a$, dunque $a\#b$ (per definizione di $\#$) e quindi $[a]_\# = [b]_\#$ ■

....

Visto questo, il prossimo esercizio può essere svolto direttamente, oppure valutando se in qualche modo ricada nella casistica descritta nell'esercizio precedente.

PROBLEMA 2. Sull'insieme $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $f, g \in \Omega$,

$$f \sim g \quad \text{se esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } f(x) = g(x) \text{ per ogni } x \geq n.$$

1) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su Ω.
2) Sia $\overline{\Omega} = \Omega/\sim$ l'insieme quoziente. Si provi che il porre, per ogni $f, g \in \Omega$,

$$[f]_\sim \trianglelefteq [g]_\sim$$

se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq n$, definisce una relazione d'ordine $\trianglelefteq$ sull'insieme quoziente $\overline{\Omega}$.

. . . .

Si faccia invece attenzione al prossimo esercizio.

PROBLEMA 3. Sull'insieme $A = \{a^n \mid a, n \in \mathbb{N},\, a, n \geq 2\} \subseteq \mathbb{N}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo

$$a^n \trianglelefteq b^m \quad \text{se} \quad a \mid b \;\text{ e }\; n \leq m.$$

Si dica se $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su A.

Soluzione. Qui, il punto è che gli elementi di A non sono rappresentati univocamente da un coppia (a, n); ad esempio $2^4 = 4^2$. Si vede allora che la relazione proposta dal testo non è ben definita: infatti da un lato risulterebbe $2^4 \trianglelefteq 2^5$ (dato che $2 \mid 2$ e $4 \leq 5$) mentre anche $4^2 \ntrianglelefteq 2^5$ (dato che $4 \nmid 2$). ■

. . . .

Ora, un esercizio astratto ma, di fatto, piuttosto semplice.

PROBLEMA 4. Sia A un insieme fissato e non vuoto. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme di tutte le relazioni d'equivalenza di A, ordinato mediante inclusione (ovvero, se ρ e σ sono equivalenze su A, si scrive $\rho \leq \sigma$ se $\rho \subseteq \sigma$ come sottoinsiemi di $A \times A$).

1) Siano $\rho, \sigma \in \mathcal{E}$. Si provi che se $\rho \leq \sigma$ allora ogni classe di equivalenza relativa a σ è un'unione di classi di equivalenza relative a ρ.
2) Si dica se $\mathcal{E}$ ammette un elemento massimo e/o minimo.
3) Sia ω la relazione banale su A (cioè $omega = A \times A$). Si descrivano gli elementi massimali di $\mathcal{E} \setminus \{\omega\}$.

Soluzione. 1). Siano $\rho, \sigma \in \mathcal{E}$ con $\rho \leq \sigma$. Siano $a, b \in A$ con $b \in [a]_\sigma$; allora per ogni $c \in [b]_\rho$: $(c, b) \in \rho \subseteq \sigma$, dunque $c \in [a]_\sigma$. Questo prova che $[b]_\rho \subseteq [a]_\sigma$, e l'affermazione 1).

2). Chiaramente, il minimo in $(\mathcal{E}, \leq)$ è la relazione di uguaglianza $\{(a, a) \mid a \in A\}$, e il massimo la relazione banale $A \times A$.

3). Sia $\omega = A \times A$; allora ogni altra relazione d'equivalenza su A ammette almeno due distinte classi di equivalenza. Affermiamo che σ è un elemento massimale in $\mathcal{E} \setminus \{\omega\}$ se e soltanto se σ ha esattamente due classi di equivalenza, ovvero se e solo se $|A/\sigma| = 2$. Queste relazioni sono quelle associate a partizioni di A in due sottoinsiemi non vuoti: per ogni $\emptyset \neq B \subset A$ si considera la relazione

$$\sigma_B = (B \times B) \cup ((A \setminus B) \times (A \setminus B)),$$

le cui classi di equivalenza sono B e $A \setminus B$.
Se $\sigma_B \leq \sigma_1$, allora per il punto 1), $\sigma_1 = \sigma_B$ oppure σ_1 ha una sola classe di equivalenza, ovvero $\sigma_1 = \omega$. Viceversa, se $\rho \in \mathcal{E}$ ha 3 o più classi, si fissa $a \in A$ e considera σ_B con $B = [a]_\rho$. Chiaramente $\rho \leq \sigma_B$ e dunque ρ non è un elemento massimale in $\mathcal{E} \setminus \{\omega\}$.

Commento: tenendo conto della corrispondenza tra relazioni di equivalenza e partizioni di A, risulta una relazione d'ordine nell'insieme di queste ultime, considerando la quale le questioni dell'esercizio diventano quasi ovvie. ■

2. ordinamento di un prodotto

Se (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) sono insiemi parzialmente ordinati, esistono diverse maniere per definire una relazione d'ordine sul prodotto diretto $A_1 \times A_2$ che derivi dagli ordinamenti dati sui due fattori. Le più semplici, ma anche le pi utilizzate, sono quelle dell'*ordine prodotto* e dell'*ordine lessicografico*.

Ordine prodotto: su $A_1 \times A_2$ si definisce la relazione ρ ponendo, per ogni $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$,

$$(a_1, a_2)\, \rho\, (b_1, b_2) \quad se \quad a_1 \rho_1 b_1 \ e \ a_2 \rho_2 b_2.$$

Ordine lessicografico: su $A_1 \times A_2$ si definisce la relazione $\leq$ ponendo, per ogni $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$,

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \ \text{ se } \ a_1 \neq b_1 \ e \ a_1 \rho_1 b_1 \ \text{ oppure } \ a_1 = b_1 \ e \ b_1 \rho_2 b_2.$$

È facile provare che queste definizioni forniscono, in entrambi i casi, una relazione d'ordine sul prodotto $A_1 \times A_2$. L'ordine lessicografico ha il vantaggio di riprodurre alcune proprietà presenti negli ordinamenti sui fattori, come ad esempio quella di essere un ordine totale, cosa che nella pratica trova svariate applicazioni (ad esempio, l'ordine dei lemmi in un dizionario, etc.)

problema 5. Siano (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) insiemi parzialmente ordinati e si denoti con $\leq$ l'ordine lessicografico sul prodotto $A_1 \times A_2$.

1) Si provi che se (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) sono ordini totali, allora anche $\leq$ è totale.
2) Si provi che se (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) sono bene ordinati, allora anche $(A_1 \times A_2, \leq)$ è bene ordinato.

Soluzione. 1). Supponiamo che (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) siano ordini totali, e siano $(a, b), (a', b')$ elementi di $A_1 \times A_2$. Poiché ρ_2 è un ordinamento totale di A_2, possiamo assumere $b \rho_2 b'$. Per $a, a \in A_1$ si presentano tre casi:
– se $a = a'$ allora $(a, b) \leq (a', b')$;
– se $a \neq a'$ e $a \rho_1 a'$, allora $(a, b) \leq (a', b')$;
– se $a \neq a'$ e $a' \rho_1 a$, allora $(a', b') \leq (a, b)$.
Dunque l'ordine lessicografico $\leq$ su $A_! \times A_2$ è totale.

2) Supponiamo che (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) siano buoni ordini, e sia $\emptyset \neq X \subseteq A_1 \times A_2$. Sia $X_1 = \{a \in A_1 \mid \exists a' \in A_2 : (a, a') \in X\}$; chiaramente, X_1 non è vuoto, dunque, per il buon ordinamento di A_1, esiste $a_1 = \min_{A_1} X_1$. Sia $X_2 = \{a' \in A_2 \mid (a_1, a') \in X\}$; anche X_2 non è vuoto e dunque esiste $a_2 = \min_{A_2} X_2$. A questo punto, $(a_1, a_2) \in X$ e si verifica subito che $(a_1, a_2) \leq (a, a')$ per ogni $(A, a') \in X$. Dunque, (a_1, a_2) è il minimo di X in $(A_1 \times A_2, \leq)$. ■

Per quel che concerne l'ordine prodotto è invece immediato osservare che, a meno che uno dei due fattori A_1 o A_2 sia costituito da un solo elemento, l'ordine prodotto su $A_1 \times A_2$ non è mai un ordinamento totale.

. . . .

Diversi degli esercizi costruiti sul prodotto di due insiemi ordinati riguardano, in modo più o meno diretto, l'ordine prodotto o quello lessicografico. Vediamo un esempio in ciascun caso in cui questo riferimento è immediato.

PROBLEMA 6. Sull'insieme $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N},\ x, y \geq 2\}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo $(a, b) \trianglelefteq (c, d)$ se $a \leq c$ e $b \mid d$.

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su A.
2) Si determini gli eventuali massimo, minimo ed elementi massimali e minimali di $(A, \trianglelefteq)$.
3) Sia $D = \{(x, y) \in A \mid x+y = 10\}$. Si determinino, se esistono, $\inf_A(D)$ e $\sup_A(D)$.

SOLUZIONE. 1) Posto $\mathbb{N}_{\geq 2} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$, si ha $A = \mathbb{N}_{\geq 2} \times \mathbb{N}_{\geq 2}$ e si vede subito che la relazione $\trianglelefteq$ è la relazione prodotto degli insiemi parzialmente ordinati $(\mathbb{N}_{\geq 2}, \leq)$ e $(\mathbb{N}_{\geq 2}, |)$, quindi è una relazione d'ordine.

2) Per ogni $(a, b) \in A$ si ha $(a, b) \trianglelefteq (a+1, b)$; quindi non vi sono elementi massimali (dunque nemmeno massimi) in $(A, \trianglelefteq)$. Per quanto riguarda ivece elementi minimali, consideriamo le coppie del tipo $(2, p)$ con p un numero primo positivo: se $(a, b) \trianglelefteq (2, p)$ allora $a \leq 2$ e $b \mid p$, da cui, poiché $a, b \geq 2$, $(a, b) = (2, p)$. Quindi $(2, p)$ è un elemento minimale di $(A, \trianglelefteq)$. Poiché poi esiste più di un elemento minimale, non esiste il minimo.

3) Sia $(a, b) \in A$ un elemento minorante per D; allora in particolare $(a, b) \trianglelefteq (2, 8)$, dunque $a = 2$ e $b \mid 8$, ma anche $(a, b) \trianglelefteq (3, 7)$ da cui $b \mid 7$. Poiché $b \geq 2$, questo non è possibile. Pertanto non esistono minoranti, quindi nemmeno estremo inferiore di D.
Sia ora $(a, b) \in A$ un maggiorante per D. Allora $x \leq a$ e $y \mid b$ per ogni $2 \leq x, y \in \mathbb{N}$ con $x + y = 10$. Poiché $m.c.m.(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$, si conclude che $8 \leq a$ e $840 \mid b$. L'insieme dei maggioranti per D è dunque $\{(a, b) \in A \mid 8 \leq a,\ 840 \mid b\}$. tale insieme ha un evidente minimo in $(A, \trianglelefteq)$, che è $(8, 840)$ ed è l'estremo superiore di D. ■

PROBLEMA 7. Sia I un insieme finito, e sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Sull'insieme $\Omega = \mathcal{P}(I) \times \mathbb{N}$, si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per $(A, x), (C, y) \in \Omega$,

$$(A, x) \trianglelefteq (C, y) \ \text{ se } \ A \subset C \text{ oppure } A = C \text{ e } x \leq y.$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine; si dica quindi se $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine totale.
2) Si determini, se esiste, $\inf_\Omega(\Delta)$ dove
$$\Delta = \{(A, x) \in \Omega \mid 0 \neq |A| \text{ è pari}, x \text{ è dispari } \}.$$

SOLUZIONE. 1) Si riconosce subito che $\trianglelefteq$ è l'ordine lessicografico di $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$ per $(\mathbb{N}, \leq)$, dunque è una relazione d'ordine su $\Omega = \mathcal{P}(I) \times \mathbb{N}$. Ora, a meno che $|I| \leq 1$, $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$ non è un ordinamento totale; e se $X, Y \in \mathcal{P}(i)$ sono tali che $X \not\subseteq Y$, $Y \not\subseteq X$, allora $(X, 1), (Y, 1)$ sono elementi non confrontabili in $(\Omega, \trianglelefteq)$. Dunque, tenendo conto di quanto visto nell'esercizio 5, $\trianglelefteq$ è totale se e soltanto se $|I| \leq 1$.

2) Supponiamo $|I| \geq 3$ e siano a, b, c elementi distinti di I. Allora

$$(\{a, b\}, 1), (\{a, c\}, 1), (\{b, c\}, 1) \in \Delta.$$

Se $(U, x) \in \Omega$ è un minorante di Δ allora, in particolare, $U \subseteq \{a, b\} \cap \{a, c\} \cap \{b, c\} = \emptyset$; d'altra parte, per ogni $x \in \mathbb{N}$, di ha per definizione $(\emptyset, y) \trianglelefteq (A, x)$ per ogni $(A, x) \in \Delta$. Quindi, l'insieme dei minoranti di Δ è $\{(\emptyset, y) \mid y \in \mathbb{N}\}$, che non ha massimo. In conclusione, se $|A| \geq 3$ allora $\inf_\Omega(\Delta)$ non esiste.
Supponiamo $I = \{a, b\}$ (nel caso $|I| \leq 1$, $\Delta = \emptyset$). Allora $\Delta = \{(I, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ ha minimo $(I, 0)$ che ne è dunque l'estremo inferiore. ■

. . . .

Svolgendo questi esercizi, viene in mente che si possa descrivere una correlazione, valida in generale, tra elementi minimali (massimali) dei due fattori (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) ed elementi minimali (massimali) dell'ordine prodotto o dell'ordine lessicografico; e che qualche cosa si possa dire, sempre in generale, anche per minoranti (maggioranti) di un sottoinsieme. In effetti è così: vediamo la versione per minimali, minimi etc. (quella per massimali, massimi, etc. è ovviamente analoga).

PROBLEMA 8. Siano (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) insiemi parzialmente ordinati. Si denoti con ρ e con $\leq$, rispettivamente, l'ordine prodotto e l'ordine lessicografico su $A_1 \times A_2$.

1) Si provi che $(x, y) \in A_1 \times A_2$ è un elemento minimale (minimo) di $(A_1 \times A_2, \rho)$ se e solo se x e u sono elementi minimali (minimi) di (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) rispettivamente.
2) Si provi che $(x, y) \in A_1 \times A_2$ è un elemento minimale (minimo) di $(A_1 \times A_2, \leq)$ se e solo se x e u sono elementi minimali (minimi) di (A_1, ρ_1) e (A_2, ρ_2) rispettivamente.
3) Dato $\emptyset \neq \Delta \subseteq A_1 \times A_2$, siano $\Delta_1 = \{a \in A_1 \mid \exists b \in A_2 \text{ con } (a, b) \in \Delta\}$, $\Delta_2 = \{b \in A_2 \mid \exists a \in A_1 \text{ con } (a, b) \in \Delta\}$, e ancora $\mathcal{M}_1$ l'insieme dei minoranti di Δ_1 in (A_1, ρ_1), $\mathcal{M}_2$ l'insieme dei minoranti di Δ_2 in (A_2, ρ_2). Si provi che $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ è l'insieme dei minoranti di Δ in $(A_1 \times A_2, \rho)$.
4) Si provi che la il punto 3) non vale per l'ordine lessicografico $(A_1 \times A_2, \leq)$.

....

Nei prossimi due problemi si estendono al caso di una famiglia infinita di fattori le nozioni di ordine prodotto (Problema 9) e di ordine lessicografico (Problema 10).

PROBLEMA 9. [A1 - esercizio 3.18] Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Sull'insieme $\Omega = A^{\mathbb{N}}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per ogni $f, g \in \Omega$,

$$f \trianglelefteq g \quad \text{se} \quad f(n) \leq g(n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su Ω.
2) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine totale se e soltanto se $|A| = 1$.
3) Si provi che $(\Omega, \trianglelefteq)$ ha elementi minimali se e soltanto se $(A, \leq)$ ha elementi minimali.

SOLUZIONE. 1) Questo è facile e non lo svolgo (si ricordi che se $f, g \in \Omega$ allora $f = g \Leftrightarrow f(n) = g(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

2) Se A ha un solo elemento (cioè $|A| = 1$) anche Ω ha un solo elemento e quindi ogni ordine su Ω è banalmente totale. Se invece esistono due elementi distinti $x, y \in A$, in Ω esistono le funzioni $f, g \in \Omega$ definite da

$$f(n) = \begin{cases} x \text{ se } n \text{ è pari} \\ y \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} x \text{ se } n \text{ è dispari} \\ y \text{ se } n \text{ è pari} \end{cases} .$$

Allora, f e g non sono confrontabili in $(\Omega, \trianglelefteq)$, che dunque non è un ordine totale.

3) Sia a un elemento minimale di A; allora la funzione costante, definita da $\gamma_a(n) = a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ è un elemento minimale di $(\Omega, \trianglelefteq)$. Infatti, se $f \in \Omega$ è tale che $f \trianglelefteq \gamma_a$, allora $f(n) \leq a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque $f(n) = a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ cioè $f = \gamma_a$.

Viceversa, supponiamo che esista un elemento minimale μ in $(\Omega, \trianglelefteq)$; proviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mu(n)$ è un elemento minimale di $(A, \leq)$. Infatti, fissato $n_0 \in \mathbb{N}$, sia $a \in A$ con $a \leq \mu(n_0)$; posto $f \in \Omega$ la funzione definita da

$$f(n) = \begin{cases} a & \text{se } n = n_0 \\ \mu(n) & \text{se } n \neq n_0 \end{cases} ,$$

si ha per definizione, $f \trianglelefteq \mu$, e dunque, poiché μ è minimale in $(\Omega, \trianglelefteq)$, $f = \mu$, e allora in particolare $a = f(n_0) = \mu(n_0)$, il che dimostra che $\mu(n_0)$ è un elemento minimale di $(A, \leq)$. ■

PROBLEMA 10. [A1 - esercizio 3.69] Sia $(A, \leq)$ un insieme totalmente ordinato con almeno due elementi e sia $\Omega = A^{\mathbb{N}}$. Sia $\lhd$ la relazione su Ω definita da, per ogni $f, g \in \Omega$,

$$f \lhd g \quad \text{se} \quad \begin{cases} f = g, \quad \text{oppure} \\ \exists\ m \in \mathbb{N} \ \text{ tale che } \ f(m) < g(m) \text{ e } f(x) = g(x) \text{ per ogni } \ x < m \end{cases}$$

1) Si dimostri che $\lhd$ é una relazione d'ordine su Ω.
2) Si determini in $(\Omega, \lhd)$ una catena discendente $f_1 \rhd f_2 \rhd f_3 \rhd \ldots$ con $f_i \neq f_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

SOLUZIONE. 1) • *riflessività*. Se $f \in \Omega$, allora $f \lhd f$ per definizione.
• *antisimmetria*. Siano $f, g \in \Omega$ tali che $f \lhd g$ e $g \lhd f$. Supponiamo, per assurdo, che $f \neq g$. Allora esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che

$$\begin{cases} f(m) < g(m) \text{ e } f(x) = g(x) \text{ per ogni } x < m \\ g(n) < f(n) \text{ e } f(x) = g(x) \text{ per ogni } x < n. \end{cases}$$

Se fosse $n < m$ (o, similmente, $m < n$) allora $f(n) = g(n) < f(n)$, assurdo. Dunque deve esse e quindi $g(n) < f(n) = f(m) < g(m) = g(n)$, ancora un assurdo.
• *transitività* . Siano $f, g, h \in \Omega$ tali che $f \lhd g$ e $g \lhd h$. Allora esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che

$$\begin{cases} f(m) < g(m) \text{ e } f(x) = g(x) \text{ per ogni } x < m \\ g(n) < h(n) \text{ e } g(x) = h(x) \text{ per ogni } x < n. \end{cases}$$

Sia $n < m$: allora $f(n) = g(n) < h(n)$ e, per ogni $x < n$, $f(x) = g(x) = h(x)$; quindi $f \lhd h$.
Sia $n = m$: allora $f(n) < g(n) < h(n)$ e, per ogni $x < n$, $f(x) = g(x) = h(x)$; quindi $f \lhd h$.
Sia $m < n$: allora $f(m) < g(m) = h(m)$ e, per ogni $x < m$, $f(x) = g(x) = h(x)$; quindi $f \lhd h$.

2) Siano $a, b \in A$, con $b < a$ (esistono perché $(A, \leq)$ è totalmente ordinato e contiene almeno due elementi). Per ogni $1 \leq i \in \mathbb{N}$ sia $f_i \ : \mathbb{N} \ \to \ A$ definita da:

$$f_i(n) = \begin{cases} b & \text{se } x < i \\ a & \text{se } \ x \geq i. \end{cases}$$

Allora, per ogni indice i si ha: $f_{i+1}(i) = b < a = f_i(i)$ e, se $x < i$, $f_{i+1}(x) = b = f_i(x)$. Dunque $f_i \rhd f_{i+1}$ e $f_1 \rhd f_2 \rhd f_3 \rhd \ldots$ è la catena cercata (naturalmente ce ne sono molte altre). ■

. . . .

Segue qualche altro esercizio di questo tipo.

PROBLEMA 11. Sull'insieme $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N},\ 1 \leq b \leq 8\}$ definiamo la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b) \trianglelefteq (c, d) \quad \text{se} \quad a|c \ \text{ e } \ b|d.$$

1) Si provi $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su A.
2) Si determinino, se ve ne sono, elementi massimi, minimi, massimali e minimali dell'insieme parzialmente ordinato $(A, \trianglelefteq)$.
3) Posto $B = \mathbb{N} \times \{2, 3\}$ (si osservi che $B \subseteq A$), si determinino (se esistono) $\sup_A(B)$ e $\inf_A(B)$.

PROBLEMA 12. [A1 - esercizio 3.74] Siano $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, $\mathbb{N}_0$ l'insieme dei numeri naturali diversi da zero, e $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_o$. Sia ω la relazione su A definita da, per ogni $(x, n), (y, k) \in A$,

$$(x, n)\omega(y, k) \quad \text{se} \quad x < y \quad \text{oppure} \quad x = y \;\text{ e }\; n|k.$$

1) Si dimostri che ω è una relazione d'ordine su A.
2) Si dica se l'ordine indotto da ω è totale.
3) Sia $B = \{(x, n) \in A \mid x \le 0 \text{ e } n \le 3\}$. Si determini, se esiste, $\sup(B)$. Stessa domanda per $C = \{(x, n) \in A \mid x < 0 \text{ e } n \le 3\}$.

PROBLEMA 13. Sull'insieme

$$P = \{p^n |\, p, n \in \mathbb{N},\ p \text{ primo } \}$$

si definisca una relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per $p^n, q^m \in P$,

$$p^n \trianglelefteq q^m \text{ se } p < q \text{ oppure } \begin{cases} p = q \\ n|m \end{cases}$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su P. Si dica se $(P, \trianglelefteq)$ è un insieme totalmente ordinato.
2) Si determinino eventuali elementi massimali, minimali, massimi e minimi in $(P, \trianglelefteq)$.
3) Sia $Q = \{2^2, 3^3, 3^4\}$; si determinino, se esistono, $\inf_P(Q)$ e $\sup_P(Q)$.

PROBLEMA 14. Sull'insieme $A = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per $a, b \in A$, con $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ e $b = q_1 q_2 \cdots q_m$ fattorizzazioni in primi,

$$a \trianglelefteq b \quad \text{se } n < m \;\text{ oppure } n = m \text{ e } a \le b.$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su A.
2) Si determinino eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo di A.
3) Si determinino (se esistono) l'estremo superiore e l'estremo inferiore in A dell'insieme P degli interi primi positivi.

3. altri problemi

Le soluzioni si trovano alla fine.

• Problemi su relazioni d'ordine su insiemi di funzioni.

PROBLEMA 15. Sull'insieme $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ si definisca la relazione $\preceq$ ponendo, per ogni $f, g \in A$,

$$f \preceq g$$

se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $0 \le g(x) - f(x) \le n$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

1) Si provi che $\preceq$ è una relazione d'ordine su A.
2) Si provi che $(A, \preceq)$ non ha minimo e che la funzione costante $x \mapsto 0$ è il suo unico elemento minimale.

PROBLEMA 16. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è *crescente* se $f(n+1) \geq f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sull'insieme $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per ogni $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$,

$$f \trianglelefteq g \quad \text{se} \quad g(0) \geq f(0) \text{ e } \; g - f \; \text{ è crescente.}$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, e si dica se è totale.
2) Si provi che l'insieme p.o. $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \trianglelefteq)$ non ammette elementi minimali.

PROBLEMA 17. Una funzione $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la diciamo *aumentante* se $\alpha(n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Su $\Lambda = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ iniettiva}\}$ si definisca la relazione $\leq$ ponendo, per ogni $f, g \in \Lambda$, $f \leq g$ se esiste una funzione aumentante $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $g = f \circ \alpha$.

1) Si provi che $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sono aumentanti anche $\alpha \circ \beta$ lo è;
2) si provi che $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è aumentante e invertibile se e solo se $\alpha = \iota_{\mathbb{N}}$ [sugg. sia α aumentante e invertibile: ragionando per induzione su n si provi che $\alpha^{-1}(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$];
3) si provi che $\leq$ è una relazione d'ordine su Λ.

PROBLEMA 18. Sull'insieme $\Gamma = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ si definisca la relazione $\angle$ ponendo, per ogni $f, g \in \Gamma$, $f \angle g$ se

$$f(X) \subseteq g(X) \text{ per ogni sottoinsieme } \textit{infinito } X \text{ di } \mathbb{N}.$$

Si dimostri che $\angle$ é una relazione d'ordine; si dica quindi se si tratta di una relazione d'ordine totale su Γ.

• Problemi su relazioni d'ordine su (sottoinsiemi di) prodotti diretti.

PROBLEMA 19. Sull'insieme $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b) \trianglelefteq (c, d) \quad \text{se} \quad \begin{cases} a \leq c \\ a + d \leq b + c \end{cases} .$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine e che non è totale;
2) Osservato che per ogni $(a, b) \in A$ si ha $(a, b) \trianglelefteq (a + 1, b)$, si provi che l'insieme parzialmente ordinato $(A, \trianglelefteq)$ non ha né elementi massimali né minimali.
3) Posto $x = (0, 0)$ e $y = (1, 2)$, si provi che $inf_A\{x, y\} = (0, 1)$.

PROBLEMA 20. Dato un intero $n \geq 3$, sia $I_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Su $A = I_n \times I_n$ si definisca una relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b) \trianglelefteq (c, d) \qquad \text{se} \qquad a(a - c) = 0 \text{ e } b \leq d.$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su A.
2) Si determinino gli elementi massimali/minimali e/o massimo/minimo (se esistono) dell'insieme parzialmente ordinato $(A, \trianglelefteq)$.
3) Si determini l'estremo inferiore in A dell'insieme $B = \{(i, 2) \mid 1 \leq i \leq n\}$ (se esiste).

PROBLEMA 21. Su $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ (dove $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) si definisca la relazione $\preceq$ ponendo, per ogni $(a,b),(c,d) \in A$,

$$(a,b) \preceq (c,d) \quad \text{se} \quad (a,b) = (c,d) \ \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} a \leq c \\ a \leq d - b \end{array} \right.$$

1) Si provi che $\preceq$ è una relazione d'ordine su A; si dica se è totale.
2) Si determinino gli elementi minimali di $(A, \preceq)$; si dica se c'è un minimo.
3) Si determini, se esiste, l'estremo superiore di $\{(2,3),(3,2)\}$.

PROBLEMA 22. Sia Ω l'insieme di tutti i punti nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ le cui coordinate sono entrambe strettamente positive: $\Omega = \{(x,y) \mid x, y \in (0, +\infty)\}$. Su Ω si definisca la relazione σ ponendo, per ogni $P = (x,y), P' = (x', y') \in \Omega$,
$P \sigma P'$ *se* $P = P'$ *oppure* $y \leq y'$ *e il coefficiente angolare della retta congiungente* P *con* P' *è* ≥ 2 (con la convenzione che le rette verticali hanno ceoff. angolare $+\infty$).

1) Si provi che σ è una relazione d'ordine su Ω e si dica se è totale.
2) Si provi che per ogni $P, Q \in \Omega$ esiste $P \vee Q = \sup_\Omega(\{P, Q\})$.
3) Sia $B = \{(x,y) \in \Omega \mid x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, y \geq 2x\}$; si dica se B amette minimo e/o estremo inferiore.

PROBLEMA 23. Sull'insieme $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per ogni $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a,b) \trianglelefteq (c,d) \quad \text{se} \quad \sqrt{2}(a-c) \leq d - b.$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e si dica se è totale.
2) Si dica se in $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \trianglelefteq)$, il sottoinsieme $A = \{(a,b) \mid a \geq 1, b \geq 1\}$ ha minimo, e in tal caso lo si determini.
3) Si dica se l'insieme $B = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\} \mid (0,0) \trianglelefteq (a,b)\}$ ha minimo, e in tal caso lo si determini.

• Problemi su relazioni d'ordine su insiemi di parti.

PROBLEMA 24. Sull'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$X \trianglelefteq Y \quad \text{se} \quad X \subseteq Y \text{ e } Y \setminus X \text{ è finito.}$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e si dica se è totale.
2) Si dica se l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \trianglelefteq)$ ha elementi minimali e/o minimi.
3) Posto $\mathcal{B}_{12} = \{\mathbb{N} \setminus \{n\} \mid n \in \mathbb{N},\ n \leq 12\}$, si determini, se esiste, $\inf(\mathcal{B}_{12})$ in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \trianglelefteq)$.

PROBLEMA 25. Dato un insieme finito I si consideri su $A = \mathcal{P}(I)$ la relazione $\trianglelefteq$ definita da, per $X, Y \in A$,

$$X \trianglelefteq Y \quad \text{se} \quad X \subseteq Y \quad \text{e} \quad |Y \setminus X| \quad \text{è pari.}$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su A.
2) Si determinino gli elementi massimali e minimali in $(A, \trianglelefteq)$.

PROBLEMA 26. Sull'insieme $\mathcal{A} = \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid |X| < \infty\}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$,

$$X \trianglelefteq Y \text{ se } \begin{cases} X \cap \mathbb{N} \subseteq Y \cap \mathbb{N} \\ X \cap \mathbb{N}^- \supseteq Y \cap \mathbb{N}^- \end{cases}$$

dove $\mathbb{N}^- = \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}$.

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{A}$ e si dica se è totale;
2) si dica se l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{A}, \trianglelefteq)$ ha elementi minimali;
3) avendo posto, per $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$, si determini, se esiste, l'estremo superiore del sottoinsieme $\mathcal{B} = \{B_n \mid 0 \leq n \leq 5\}$.

PROBLEMA 27. Sia X un insieme finito, non vuoto, con $|X|$ pari. Per ogni $Y \subseteq X$ si ponga

$$Y_0 = \begin{cases} Y & \text{se |Y| pari} \\ X \setminus Y & \text{se |Y| dispari} \end{cases}$$

Su $\mathcal{P}(X)$ si definisca quindi la relazione $\triangleleft$ ponendo, per $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$,

$$Y \triangleleft Z \qquad \text{se} \qquad \mathrm{Y}_0 \subseteq \mathrm{Z}_0 \;\; \text{e} \;\; |\mathrm{Y}| + |\mathrm{Z}| \equiv 0 \pmod 2.$$

1) Si provi che $\triangleleft$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{P}(X)$.
2) Si determinino gli elementi massimali di $(\mathcal{P}(X), \triangleleft)$.
3) Per $|X| \geq 4$ siano $a, b, c \in X$ elementi distinti, $A = X \setminus \{a\}$, $B = X \setminus \{b\}$ e $C = X \setminus \{c\}$; si dica se esiste $\sup_{(\mathcal{P}(X), \triangleleft)}\{A, B, C\}$ e, in caso affermativo, lo si determini.

• Problemi su relazioni d'ordine sui naturali.

PROBLEMA 28. Sull'insieme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisca la relazione $\leq_3$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}_0$,

$$a \leq_3 b \qquad \text{se} \qquad a = b \;\; \text{oppure} \;\; b \geq 3a.$$

1) Provare che $\leq_3$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{N}_0$;
2) trovare (se esistono) gli elementi minimali di $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$ e dire se esiste un minimo;
3) provare che un sottoinsieme finito e non vuoto di $\mathbb{N}_0$ ha un estremo superiore in $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$ se e solo se ha massimo;
4) provare che non tutti i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{N}_0$ hanno estremo inferiore.

PROBLEMA 29. Sia $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Sull'insieme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq_k$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}_0$,

$$a \trianglelefteq_k b \qquad \text{se} \qquad (a,k) \leq (b,k) \;\text{ e }\; [a,k] \leq [b,k].$$

1) Si provi che $\trianglelefteq_k$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{N}_0$.
2) Si dica se l'insieme parzialmente ordinato $(\mathbb{N}_0, \trianglelefteq_k)$ ha un elemento massimo e/o un elemento minimo.
3) Si provi $\trianglelefteq_k$ è un ordine totale se e solo se $k = 1$.
4) Posto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < k\}$, si determinino i valori $k \geq 1$ per i quali l'insieme A ha un massimo (rispetto alla relazione d'ordine $\trianglelefteq_k$).

PROBLEMA 30. Sull'insieme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisca la relazione $\parallel$ ponendo, per ogni $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \parallel m$ se

$$n \text{ divide } m \;\text{ e }\; m/n \text{ non è un numero primo.}$$

1) Si provi che $\parallel$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{N}_0$.
2) Si descrivano, se esistono, gli elementi minimali e massimali di $(\mathbb{N}_0, \parallel)$, si dica se esiste minimo.
3) Posto $B = \{2, 3\}$ si determini l'insieme dei maggioranti di B e si dica se esiste $\sup(B)$.

4. soluzioni

PROBLEMA 15. 1). Sia $f \in A$; allora, per ogni $x \in \mathbb{N}$, $0 = f(x) - f(x)$ e quindi $f \preceq f$. Dunque $\preceq$ è riflessiva.
- Siano $f, g \in A$ tali che $f \preceq g$ e $g \preceq f$; allora, in particolare, per ogni $x \in \mathbb{N}$, $f(x) - g(x) \geq 0$ e $-(f(x) - g(x)) = g(x) - f(x) \geq 0$, il che implica $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{N}$, ovvero $f = g$. Dunque $\preceq$ è antisimmetrica.
- Siano $f, g, h \in A$ tali che $f \preceq g$ e $g \preceq h$. Esistono allora $n, m \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 0 \leq g(x) - f(x) \leq n \\ 0 \leq h(x) - g(x) \leq m \end{cases}$$

da cui, sommando membro a membro: $0 \leq h(x) - f(x) \leq n + m$ per ogni $x \in \mathbb{N}$, quindi $f \preceq h$. Questo prova che $\preceq$ è transitiva.
Quindi $\preceq$ è una relazione d'ordine su A.

2). Denotiamo con $\underline{0}$ la funzione costante $x \mapsto 0$ (per ogni $x \in \mathbb{N}$). Sia $g \in A$ tale che $g \preceq \underline{0}$; allora in particolare $g(x) \leq 0$ (e dunque $g(x) = 0$) per ogni $x \in \mathbb{N}$ e quindi $g = \underline{0}$, il che prova che $\underline{0}$ è un elemento minimale di $(A, \preceq)$.
Sia $f \in A$, $f \neq \underline{0}$; allora esiste $a \in \mathbb{N}$ tale che $f(a) \geq 1$; ponendo ora, per ogni $x \in \mathbb{N}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \neq a \\ f(a) - 1 & se \quad x = a \end{cases}$$

si ha un elemento $g \in A$ tale che $g \preceq f$ e $g \neq f$; dunque f non è minimale. Quindi $\underline{0}$ è l'unico elemento minimale di $(A, \preceq)$.

Notiamo infine che $\underline{0} \not\preceq \iota_{\mathbb{N}}$ (dove $\iota_{\mathbb{N}}$ è l'applicazione identica su $\mathbb{N}$). Quindi $\underline{0}$ non è minimo e pertanto $(A, \preceq)$ non ha elemento minimo (perché se lo avesse questo dovrebbe coincidere con ogni minimale).

Problema 16. 1) Proviamo che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
• *riflessività.* Sia $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$; allora $f(0) = f(0)$ e $f - f$ è la funzione costante 0, che è crescente; quindi $f \trianglelefteq f$.
• *antisimmetria.* Questo è il punto più delicato. Siano $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ con $f \trianglelefteq g$ e $g \trianglelefteq f$. Allora, in primo luogo, $f(0) \leq g(0) \leq f(0)$, e dunque $f(0) = g(0)$. Procedendo per induzione proviamo che $f(n) = g(n)$ pr ogni su $n \in \mathbb{N}$ (quindi $f = g$). Per $n = 0$ la cosa è già stata provata. Assumendo, per ipotesi induttiva, $f(n) = g(n)$ si ha, poiché $f - g$ è crescente,

$$f(n+1) - g(n+1) = (f-g)(n+1) \geq (f-g)(n) = f(n) - g(n) = f(n) - f(n) = 0,$$

dunque $f(n+1) = g(n+1)$. Per il principio di induzione si conclude quindi $f - g$.
• *transitività.* Siano $f, g, h \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ con $f \trianglelefteq g$ e $g \trianglelefteq h$. In particolare, $h(0) \geq g(0) \geq f(0)$, dunque $h(0) \geq f(0)$. Inoltre, $g - f$ e $h - f$ sono crescenti, dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$h(n+1) - g(n+1) = (h-g)(n+1) \geq (h-g)(n) = h(n) - g(n),$$

$$g(n+1) - f(n+1) = (g-f)(n+1) \geq (g-f)(n) = g(n) - f(n).$$

Da cui, sommando membro a membro,

$$(h-f)(n+1) = h(n+1) - f(n+1) \geq h(n) - f(n) = (h-f)(n).$$

Dunque $h - f$ è crescente, provando che $f \trianglelefteq h$.

Quindi $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \trianglelefteq)$ è un insieme parzialmente ordinato. Non è totale; ad esempio, si considerino $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definite da $f(n) = 0$ e $g(n) = 1 - n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $f(0) = 0 < 1 = g(0)$ e dunque $g \not\trianglelefteq f$. D'altra parte

$$(g-f)(1) = 0 < 1 = (g-f)(0),$$

quindi $g - f$ non è crescente e dunque $f \not\trianglelefteq g$.

2) Proviamo che $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \trianglelefteq)$ non ammette elementi minimali. Sia infatti $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, e consideriamo la funzione $f_1 \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ definita da $f_1(n) = f(n) - 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $(f - f_1)(n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $f - f_1$ è crescente, inoltre $f_1(0) = f(0) - 1 \leq f(0)$, e dunque $f_1 \trianglelefteq f$ (mentre $f_1 \neq f$). Dunque f non è un elemento minimale.

Problema 17. 1) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ funzioni aumentanti; allora per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha \circ \beta(n) = \alpha(\beta(n)) \geq \beta(n) \geq n,$$

dunque $\alpha \circ \beta$ è aumentante.

2) Sia $\alpha \in \mathbb{N}$ una funzione aumentante che ammette inversa α^{-1} in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Procedendo per induzione, proviamo che $\alpha(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$ si ha

$$0 = \alpha(\alpha^{-1}(0)) \geq \alpha^{-1}(0) \geq 0,$$

quindi $\alpha^{-1}(0) = 0$ e dunque $\alpha(0) = 0$. Sia $n \geq 1$, allora per ipotesi induttiva $\alpha(t) = t = \alpha^{-1}(t)$ per ogni $0 \leq t < n$; quindi (poiché α^{-1} è iniettiva) $\alpha^{-1}(n) \geq n$; dunque

$$n = \alpha(\alpha^{-1}(n)) \geq \alpha^{-1}(n) \geq n,$$

e quindi $\alpha^{-1}(n) = n$ da cui $\alpha(n) = n$. Per il principio di induzione si ha pertanto $\alpha(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3) Proviamo ora che la relazione $\leq$ definita nel testo del problema è una relazione d'ordine su $\Lambda = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ iniettiva}\}$.
Se $f \in \Lambda$ allora $f = f \circ \imath_{\mathbb{N}}$ e $i_{\mathbb{N}}$ (la funzione identica) è aumentante, dunque $f \leq f$; quindi $\leq$ è riflessiva.
Siano $f, g \in \Lambda$ con $f \leq g$ e $g \leq f$; allora esistono funzioni aumentanti $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tali che $g = f \circ \alpha$ e $f = g \circ \beta$, quindi $f = f \circ (\alpha \circ \beta)$. In tal caso, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(n) = f(\alpha \circ \beta(n))$ e quindi, poiché f è iniettiva, $\alpha \circ \beta(n) = n$. Dunque $\alpha \circ \beta = i_{\mathbb{N}}$ e quindi, per il punto 2), $\alpha = \beta = i_{\mathbb{N}}$, da cui $f = g$, provando che $\leq$ è una relazione antisimmetrica su Λ.
Infine, siano $f, g, h \in \Lambda$ con $f \leq g$ e $g \leq h$. Allora esistono funzioni aumentanti $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tali che $g = f \circ \alpha$ e $h = g \circ \beta$, dunque $h = f \circ (\alpha \circ \beta)$. Poiché, per il punto 1), $\alpha \circ \beta$ è aumentante si conclude $f \leq h$. Quindi $\leq$ è transitiva e pertanto è una relazione d'ordine su Λ.

Problema 18. La relazione $\angle$ su Γ è chiaramente riflessiva e transitiva. Vediamo che è anche antisimmetrica. Siano $f, g \in \Gamma$ con $f \angle g$ e $g \angle f$. Per definizione di ha allora $f(X) = g(X)$ per ogni sottoinsieme infinito X di $\mathbb{N}$. Sia $n \in \mathbb{N}$, $b = f(n)$ e $B = f^{-1}(b)$. Se B è infinito, allora $g(n) \in g(B) = f(B) = \{b\}$, e quindi $g(n) = b = f(n)$. Altrimenti, $C = \mathbb{N} \setminus B$ è infinito, ed allora $g(C) = f(C) = f(\mathbb{N}) \setminus \{b\} = g(\mathbb{N}) \setminus \{b\}$, mentre $g(C \cup \{n\}) = f(C \cup \{n\}) = f(\mathbb{N})$ dunque $g(n) = b = f(n)$. Quindi $f = g$.

La relazione $\angle$ non è un ordinamento totale: ad esempio, se $2\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri pari, le funzioni caratteristiche $\chi_{2\mathbb{N}}$ e $\chi_{\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}}$ non sono confrontabili da $\angle$.

Problema 19. 1) Proviamo che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su A.
• *riflessività*: Per ogni $(a, b) \in A$ (quindi $a, b \in \mathbb{N}$) si ha banalmente $a \leq a$ e $a + b \leq b + a$; dunque $(a, b) \trianglelefteq (a, b)$.
• *antisimmetria*. Siano $(a, b), (c, d) \in A$ con $(a, b) \trianglelefteq (c, d)$ e $(c, d) \trianglelefteq (a, b)$; allora

$$\begin{cases} a \leq c \\ a + d \leq b + c \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} c \leq a \\ c + b \leq d + a \end{cases}$$

da cui segue subito $c = a$ e $d = (c + b) - a = a + b - a = b$.
• *transitività*. Siano $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$ con $(a, b) \trianglelefteq (c, d)$ e $(c, d) \trianglelefteq (e, f)$; allora

$$\begin{cases} a \leq c \\ a + d \leq b + c \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} c \leq e \\ c + f \leq d + e \end{cases}$$

da cui si ricava: $a \leq e$, e
$a + f = a + d - d + f \leq b + c - d + f = (c + f) - d + b \leq e + d - d + b = e + b$ Dunque $(a, b) \trianglelefteq (e, f)$.

Quindi $(A, \trianglelefteq)$ è un insieme parzialmente ordinato. L'ordine non è totale perché, ad esempio $(0,0) \not\trianglelefteq (1,2)$ e $(1,2) \not\trianglelefteq (0,0)$.

2) Sia $(a,b) \in A$. Allora, come si verifica subito dalla definizione $(a,b) \trianglelefteq (a+1,b)$ e $(a,b+1) \trianglelefteq (a,b)$. Questo prova che $(A, \trianglelefteq)$ non ha elementi massimali né minimali.

3) *Posto* $x = (0,0)$ *e* $y = (1,2)$, *si provi che* $\inf_A\{x,y\} = (0,1)$. Sia $u = (a,b) \in A$; allora $u \trianglelefteq x$ se e solo se $a \leq 0$ e $a+0 \leq b+0$, cioè se e solo se $a = 0$; mentre $u \trianglelefteq y$ se e solo se $a \leq 1$ e $a+2 \leq b+1$, ovvero se e solo se $a = 0, 1$ e $b \geq a+1$. Pertanto l'insieme degli elementi minimanti di $\{x,y\}$ è

$$\mathcal{M} = \{(0,b) \in A \mid b \geq 1\}.$$

Ora, per ogni $b \geq 1$ si ha $(0,b) \trianglelefteq (0,1)$. Ne consegue che $(0,1)$ è il massimo di $\mathcal{M}$ e dunque è l'estremo superiore di $\{x,y\}$. $\angle$.

Problema 20. 1) Proviamo che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su A.
- *riflessività*. Per ogni $(a,b) \in A$ si ha $a(a-a) = 0$ e $b \leq b$; dunque $(a,b) \trianglelefteq (a,b)$.
- *antisimmetria*. Siano $(a,b),(c,d) \in A$ tali che $(a,b) \trianglelefteq (c,d)$ e $(c,d) \trianglelefteq (a,b)$. Allora, in particolare, $b \leq d$ e $d \leq b$, dunque $b = d$. Inoltre, sempre per definizione di $\trianglelefteq$, si ha $a(a-c) = 0 = c(c-a)$; quindi se $a = 0$ segue che $c = 0$, se $a \neq 0$ allora $a = c$. In ogni caso, $a = c$ e dunque $(a,b) = (c,d)$ come si voleva.
- *transitività*. Siano $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ con $(a,b) \trianglelefteq (c,d)$ e $(c,d) \trianglelefteq (e,f)$. Allora

$$a(a-c) = 0, \;\; c(c-e) = 0, \;\; b \leq d \text{ e } d \leq f;$$

dunque subito $b \leq f$. Inoltre $a(a-e) = a(a-c) + a(c-e) = a(c-e)$; quindi $a(a-e) = 0$ se $c - e = 0$, altrimenti si ha $c = 0$ quindi $0 = a(a-c) = a^2$ da cui $a = 0$ e $a(a-e) = 0$. Pertanto $(a,b) \trianglelefteq (e,f)$.

2) *Elementi minimali di* $(A, \trianglelefteq)$. Si osserva che per ogni $(a,b) \in A$, $(0,0) \trianglelefteq (a,b)$: infatti $0(0-a) = 0$ e $0 \leq b$. Dunque $(0,0)$ è il minimo di A e pertanto è anche l'unico minimale. *Elementi massimali.* Si osserva che per ogni $(a,b) \in A$ se $b \neq n$ allora $(a,b+1) \in A$ e $(a,b) \trianglelefteq (a,b+1)$. Quindi, se $b \neq n$ allora (a,b) non è massimale. Consideriamo ora gli elementi del tipo (a,n). Notato che $(0,0)$ (che come abbiamo visto è il minimo) non è certo massimale, ci restano gli elementi (a,b) con $1 \leq a \leq n$: se $(a,n) \trianglelefteq (c,d)$ allora, $a(a-c) = 0$ e $n \leq d$. Poiché $a \neq 1$ dalla prima identità segue $c = a$, mentre dalla seconda segue $d = n$; pertanto $(c,d) = (a,n)$. Abbiamo provato così che (a,n) è un elemento massimale per ogni $1 \leq a \leq n$. Poiché il numero di massimali è superiore a uno, non esistono massimi.

3) Sia $B = \{(i,2) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Si comincia cercando di individuare l'insieme dei minoranti di B. Se (a,b) è un minorante di B allora $(a,b) \trianglelefteq (i,2)$ per ogni $1 \leq i \leq n$; ovvero,

$$\begin{cases} a(a-i) = 0 \\ b \leq 2 \end{cases}$$

per ogni $1 \leq i \leq n$. Questo forza $a = 0$; infatti, se $a \neq 0$ allora, prendendo $i \neq a$ si ha $a(a-i) \neq 0$ e dunque $(a,b) \not\trianglelefteq (i,2)$. D'altra parte si vede subito che per $0 \leq b \leq 2$, l'elemento $(0,b)$ è un minorante di B. Quindi, l'insieme dei minoranti di B è $\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$, il cui massimo è - come si vede subito - $(0,2)$. In conclusione $sup(B) = (0,2)$.

Problema 21. 1) La proprietà riflessiva di $\preceq$ è data per definizione.
Per l'antisimmetria, consideriamo $(a,b),(c,d) \in A$ tali che $(a,b) \preceq (c,d)$ e $(a,b) \preceq (c,d)$, e supponiamo, per assurdo $(a,b) \neq (c,d)$. Allora, per definizione di $\preceq$,

$$\begin{cases} a \leq c \\ a \leq d-b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} c \leq a \\ c \leq b-d \end{cases}$$

da cui segue subito $a = c$; di conseguenza $d - b \geq a = c \leq b - d$, che è un assurdo perché $a = c > 0$. Quindi $(a,b) = (c,d)$ è $\preceq$ è antisimmetrica.
Provare la transitività è semplice; siano $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ tali che $(a,b) \preceq (c,d)$ e $(c,d) \preceq (e,f)$; se $(a,b) = (b,c)$, o $(c,d) = (e,f)$, allora $(a,b) \preceq (e,f)$ è ovvia; possiamo dunque assumere che le tre coppie $(a,b),(c,d),(e,f)$ siano a due a due distinte; quindi che

$$\begin{cases} a \leq c \\ a \leq d-b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} c \leq e \\ c \leq f-d \end{cases}$$

quindi $a \leq e$, e

$$f - b = (f-d) + (d-b) \geq c + a \geq a$$

Dunque $(a,b) \preceq (e,f)$. Pertanto $(A, \preceq)$ è un insieme parzialmente ordinato. Non è totalmente ordinato perché, ad esempio $(2,1) \not\preceq (2,2)$ e $(2,2) \not\preceq (2,3)$.

2) Sia $(a,b) \in A$. Se $b \geq 2$ allora $(a,b) \neq (1,1) \in A$ e $(1,1) \preceq (a,b)$. Questa osservazione mostra che se (a,b) è minimale allora $b = 1$; esaminiamo quindi questo caso. Sia $(c,d) \in A$ tale che $(c,d) \preceq (a,1)$; se $(c,d) \neq (a,1)$ allora, in particolare, $1 \leq c \leq 1 - d$, che è assurdo dato che $d \geq 1$; dunque $(c,d) = (a,1)$. In conclusione l'insieme degli elementi minimali di $(A, \preceq)$ è $\{(a,1) \mid a \in \mathbb{N}^*\}$; e siccome ci sono almeno due elementi minimali distinti, non c'è un minimo.

3) Cominciamo con il trovare - se ce ne sono - i maggioranti di $\{(2,3),(3,2)\}$. Sia quindi $(a,b) \in A$ con $(2,3) \preceq (a,b)$ e $(3,2) \preceq (a,b)$. Poiché $(2,3) \not\preceq (3,2)$ e $(3,2) \not\preceq (2,3)$, $(a,b) \notin \{(2,3),(3,2)\}$, e dunque

$$\begin{cases} 2 \leq a \\ 2 \leq b-3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3 \leq a \\ 3 \leq b-2 \end{cases}$$

Quindi, l'insieme dei maggioranti di $\{(2,3),(3,2)\}$ è

$$\mathcal{M} = \{(a,b) \in A \mid a \geq 3,\ b \geq 5\}.$$

Ragionando come nel punto precedente, si verifica facilmente che $(3,5)$ è un elemento minimale di $\mathcal{M}$, ma che non è il minimo dato che, ad esempio, $(3,5) \not\preceq (4,5)$. Quindi $\mathcal{M}$ non ha minimo e dunque non esiste l'estremo superiore di $\{(2,3),(3,2)\}$.

Problema 22. 1) Proviamo che σ è una relazione d'ordine.
• *riflessività*. La proprietà riflessiva di σ è data per definizione.
• *antissimmetria*. Siano $P = (x,y), P' = (x',y') \in \Omega$ con $P\sigma P'$ e $P'\sigma P$; supponiamo, per assurdo, $P \neq P'$, allora $y \leq y'$ e $y' \leq y$, da cui $y = y'$; quindi $x \neq x'$ e il coefficiente angolare della retta congiungente P a P' è 0, contro l'assunzione $P\sigma P'$.
• *transitività*. Siano $P = (x,y), P' = (x',y'), P'' = ('',y'') \in \Omega$ con $P\sigma P'$ e $P'\sigma P''$; vogliamo provare $P\sigma P''$. Tale conclusione è banale se $P = P'$ oppure $P' = P''$, assumiamo

quindi $P \neq P'$v e $P' \neq P''$. Allora $y \leq y' \leq y''$, quindi $y \leq y''$; inoltre la condizione sui coefficienti angolari fornisce le diseguaglianze

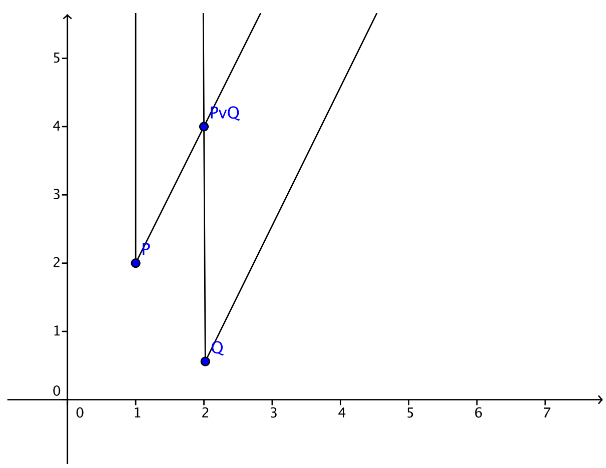
$$\begin{cases} y' - y \geq \\ y'' - y' \geq 2(x'' - x') \end{cases}$$

da cui:

$$y'' - y = (y'' - y') + (y' - y) \geq 2(x'' - x') + 2(x' - x) = 2(x'' - x);$$

quindi il coefficiente angolare della retta congiungente P a P'' è almeno 2, e pertanto $P\sigma P''$, come si voleva.
Questo prova che σ è una relazione d'ordine su Ω. Non è totale: ad esempio, posto $P = (1,1)$ e $Q = (2,2)$ si ha $P\not\sigma Q$ e $Q\not\sigma P$.

2) Siano $P = (x_0, y_0), Q = (x_1, y_1) \in \Omega$. La figura qui sotto fa capire cosa sta succedendo.



Possiamo supporre $x_1 \geq x_0$. Se $y_1 - y_0 \geq 2(x_1 - x_0)$, allora anche $y_1 \geq y_0$ e $P\sigma Q$ per cui $P \vee Q = Q$. Sia $y_1 - y_0 < 2(x_1 - x_0)$ e consideriamo il punto R di coordinate

$$\begin{cases} x_R = x_1 \\ y_R = 2(x_1 - x_0) + y_0 \end{cases}$$

Si prova dalla definizione che $P\sigma R$ (poiché R giace sulla retta di coeff. angolare 2 passante per P e $y_R \geq y_0$) e $Q\sigma R$ (poiché R giace sulla retta verticale passante per Q e $y_R = 2(x_1 - x_0) + y_0 \geq y_1 - y_0 + y_0 = y_1$; quindi R è maggiorante di $\{P, Q\}$. D'altra parte se $T = (x_2, y_2)$ un maggiorante di $\{P, Q\}$; allora

$$\begin{cases} y_2 \geq y_i \\ y_2 - y_i \geq 2(x_2 - x_i) \end{cases}$$

per $i = 0, 1$. Quindi $y_2 \geq y_R$; inoltre

$$y_2 - y_R = y_2 - 2(x_1 - x_0) - y_0 \geq 2(x_2 - x_0) - 2(x_R - x_0) = 2(x_2 - x_R)$$

dunque il coeff. angolare della retta per R e T è maggiore o uguale a 2 e pertanto $R\sigma T$.
Questo dimostra che $R = P \vee Q$.

3) Osserviamo che $(1,2) \in B$. Sia $X = (a,b) \in B$ allora $1 \leq a, b \in \mathbb{N}$ e $b \geq 2a$. In particolare $b \geq 2$. Se $a = 1$ allora X giace sulla retta verticale per $(1,2)$, quindi $(1,2)\sigma X$. Se $a > 1$ allora $b - 2 \geq 2a - 2 = 2(a-1)$, e dunque $(1,2)\sigma X$. Questo prova che $(1,2)$ è il minimo (e pertanto anche l'estremo inferiore) di B.

Problema 23. 1) Proviamo che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
- *riflessività*. Sia $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; allora $\sqrt{2}(a-a) = 0 \leq b - b$, quindi $(a,b) \trianglelefteq (a,b)$.
- *antisimmetria*. Siano $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $(a,b) \trianglelefteq (c,d)$ e $(c,d) \trianglelefteq (a,b)$. Allora

$$\sqrt{2}(a-c) \leq d - b \quad \text{e} \quad \sqrt{2}(c-a) \leq b - d,$$

quindi $\sqrt{2}(a-c) \leq d - b \leq \sqrt{2}(a-c)$, e dunque $\sqrt{2}(a-c) = d - b$. Poiché $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, da ciò segue $a - c = 0 = d - b$, dunque $(a,b) = (c,d)$.
- *transitività*. Siano $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $(a,b) \trianglelefteq (c,d) \trianglelefteq (e,f)$. Allora

$$\begin{cases} \sqrt{2}(a-c) \leq d - b \\ \sqrt{2}(c-e) \leq f - d \end{cases}$$

da cui, sommando membro a membro, $\sqrt{2}(a-e) \leq f - b$, quindi $(a,b) \trianglelefteq (e,f)$.

2) Osserviamo: se $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, allora $\sqrt{2}(a-a) = 0 < (b+1) - b$, dunque $(a, b+1) \trianglelefteq (a,b)$. Ciò mostra che l'insieme $A = \{(a,b) \mid a \geq 1, b \geq 1\}$ non ha minimo (né elementi minimali).

3) Osserviamo che $(a,b) \in B$ se e solo se $-\sqrt{2}a = \sqrt{2}(0-a) \leq b - 0 = b$. In particolare, se $(a,b) \in B$ allora $(a, b+1) \in B$, e dunque, per quanto osservato al punto precedente, B non ha minimo.

Problema 24. 1) Proviamo che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
- *riflessività*. Sia $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; allora $X \subseteq X$ e $X \setminus X = \emptyset$, quindi $X \trianglelefteq X$.
- *antisimmetria*. Siano $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con $X \trianglelefteq Y$ e $Y \trianglelefteq X$; allora, in particolare, $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, dunque $X = Y$.
- *transitività*. Siano $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con $X \trianglelefteq Y$ e $Y \trianglelefteq Z$. Allora, in particolare, $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, dunque $X \subseteq Z$. Inoltre, poiché X è contenuto in Y, $Y = X \cup (Y \setminus X)$ e analogamente $Z = Y \cup (Z \setminus Y)$, con $Y \setminus X$ e $Z \setminus Y$ finiti. Quindi

$$Z = Y \cup (Z \setminus Y) = Z = X \cup (Y \setminus X) \cup (Z \setminus Y),$$

dunque $Z \setminus X \subseteq (Y \setminus X) \cup (Z \setminus Y)$ è finito (infatti, $Z \setminus Y = (Y \setminus X) \cup (Z \setminus Y)$), e $X \trianglelefteq Z$. Pertanto $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \trianglelefteq)$ è un insieme parzialmente ordinato. Chiaramente, non è totale; ad esempio $\{1\} \not\trianglelefteq \{2\}$ e $\{2\} \not\trianglelefteq \{1\}$.

2) $\emptyset$ è un elemento minimale di $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \trianglelefteq)$, ma non è minimo; infatti se X è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ allora $\emptyset \not\trianglelefteq X$. Non vi sono altri elementi minimali; infatti se $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ e $a \in X$, allora $X \setminus \{a\} \trianglelefteq X$.

3) Sia $M = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, 12\}$; allora, per ogni $0 \leq n \leq 12$, $M \subseteq \mathbb{N} \setminus \{n\}$ e

$$(\mathbb{N} \setminus \{n\}) \setminus M = \{0, 1, 2, \ldots, 12\} \setminus \{n\}$$

è finito, quindi $M \trianglelefteq (\mathbb{N}\setminus\{N\})$. Dunque M è un minorante di $\mathcal{B}_{12}$. Se poi Y è un minorante di $\mathcal{B}_{12}$, allora $n \notin Y$ per ogni $0 \leq n \leq 12$, e pertanto $Y \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, 12\} = M$. Dunque, M è il massimo dei minoranti di $\mathcal{B}_{12}$ e quindi è il suo estremo inferiore in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \trianglelefteq)$.

Problema 25. 1) La relazione $\trianglelefteq$ è chiaramente riflessiva e antisimmetrica (vedi l'esercizio precedente). Vediamo la transitività: siano $X, Y, Z \in \mathcal{P}(I)$ con $X \trianglelefteq Y$ e $Y \trianglelefteq Z$; allora, come nell'esercizio precedente, $X \subseteq Z$, inoltre $Y = X \cup (Y \setminus X)$ e $Z = Y \cup (Z \setminus Y)$, con $|Y \setminus X|$ e $|Z \setminus Y|$ pari; si ha quindi l'unione disgiunta

$$Z \setminus Y = (Y \setminus X) \cup (Z \setminus Y),$$

dunque $|Z \setminus Y| = |Y \setminus X| + |Z \setminus Y|$ è pari, e $X \trianglelefteq Z$. Pertanto $(\mathcal{P}(I), \trianglelefteq)$ è un insieme parzialmente ordinato.

2) Sia $X \in \mathcal{P}(I)$ con $|X| \geq 2$; allora esistono $x, y \in X$ con $x \neq y$ e, posto $Y = X \setminus \{x, y\}$, si ha $Y \trianglelefteq X$; dunque X non è un elemento minimale. Se invece $|X| \leq 1$ e $Y \in \mathcal{P}(I)$ è tale che $Y \trianglelefteq X$, allora $Y \subseteq X$ e $|X \setminus Y| \leq 1$ è pari; dunque $|X \setminus Y| = 0$, cioè $X \setminus Y = \emptyset$ e quindi $Y = X$. In conclusione, gli elementi minimali di $(\mathcal{P}(I), \trianglelefteq)$ sono $\emptyset$ e tutti i singoletti $\{x\}$ con $x \in I$.
Similmente, si trova che gli elementi massimali di $(\mathcal{P}(I), \trianglelefteq)$ sono I e tutti quelli del tipo $I \setminus \{x\}$ con $x \in I$.

Problema 26. 1) *riflessività.* Sia $X \in \mathcal{A}$; allora per definizione di inclusione $X \cap N \subseteq X \cap N$ e $X \cap \mathbb{N}^- \supseteq X \cap \mathbb{N}^-$; quindi $X \trianglelefteq X$.
antisimmetria. Siano $X, Y \in \mathcal{A}$ tali che $X \trianglelefteq Y$ e $Y \trianglelefteq X$. Allora

$$\begin{cases} X \cap \mathbb{N} \subseteq Y \cap \mathbb{N} \\ X \cap \mathbb{N}^- \supseteq Y \cap \mathbb{N}^- \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Y \cap \mathbb{N} \subseteq X \cap \mathbb{N} \\ Y \cap \mathbb{N}^- \supseteq X \cap \mathbb{N}^- \end{cases}$$

quindi, per la doppia inclusione $X \cap \mathbb{N} = Y \cap \mathbb{N}$ e $X \cap \mathbb{N}^- \subseteq Y \cap \mathbb{N}^-$. Poiché $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-$, si conclude

$$X = X \cap \mathbb{Z} = (X \cap \mathbb{N}) \cup (X \cap \mathbb{N}^-) = (Y \cap \mathbb{N}) \cup (Y \cap \mathbb{N}^-) = Y \cap \mathbb{Z} = Y.$$

transitività. Siano $X, Y, T \in \mathcal{A}$ tali che $X \trianglelefteq Y$ e $Y \trianglelefteq T$. Allora

$$\begin{cases} X \cap \mathbb{N} \subseteq Y \cap \mathbb{N} \\ X \cap \mathbb{N}^- \supseteq Y \cap \mathbb{N}^- \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Y \cap \mathbb{N} \subseteq T \cap \mathbb{N} \\ Y \cap \mathbb{N}^- \supseteq T \cap \mathbb{N}^- \end{cases}$$

da cui segue $X \cap \mathbb{N} \subseteq T \cap \mathbb{N}$ e $X \cap \mathbb{N}^- \supseteq T \cap \mathbb{N}^-$, ovvero $X \trianglelefteq T$.
Pertanto $(\mathcal{A}, \trianglelefteq)$ è un insieme parzialmente ordinato.
Non è totale; ad esempio se $X = \{0\}$ e $Y = \{1\}$, allora $X, Y \in \mathcal{A}$, ma $X \not\trianglelefteq Y$ e $Y \not\trianglelefteq X$.

2) Non ci sono elementi minimali. Infatti, sia $X \in \mathcal{A}$; poiché X è finito esiste $z \in \mathbb{N}^- \setminus X$. Sia $Y = X \cup \{z\}$; allora $Y \in \mathcal{A}$ e $Y \neq X$; inoltre

$$\begin{cases} Y \cap \mathbb{N} = X \cap \mathbb{N} \subseteq X \cap \mathbb{N} \\ Y \cap \mathbb{N}^- = \{z\} \cup (X \cap \mathbb{N}^-) \supseteq X \cap \mathbb{N}^- \end{cases}$$

ovvero $Y \trianglelefteq X$. Dunque X non è minimale.

3) Sia $M \in \mathcal{A}$ un maggiorante di $\mathcal{B} = \{B_n \mid 0 \leq n \leq 5\}$. Allora $B_n \trianglelefteq M$, per $0 \leq n \leq 5$. Da $B_0 = \{0\} \trianglelefteq M$, segue in particolare $\emptyset = B_0 \cap \mathbb{N}^- \supseteq M \cap \mathbb{N}^-$, cioè $M \cap \mathbb{N}^- = \emptyset$, ovvero

$$M \subseteq \mathbb{N}. \tag{1}$$

Mentre da $B_5 \trianglelefteq M$ segue in particolare $B_5 \cap \mathbb{N} \subseteq M \cap \mathbb{N} = M$, dunque

$$\{0, \ldots, 5\} \subseteq M. \tag{2}$$

Si verifica ora facilmente, per definizione, che le condizioni (1) e (2) sono anche sufficienti a che M sia un maggiorante di $\mathcal{B}$. Dunque, l'insieme dei maggioranti di $\mathcal{B}$ in $(\mathcal{A}, \trianglelefteq)$ è

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{A} \mid \{0, \ldots, 5\} \subseteq M \subseteq \mathbb{N}, \}.$$

Sia infine $S = \{0 \ldots, 5\}$. Allora $S \in \mathcal{M}$ e per ogni $Y \in \mathcal{M}$, $S \trianglelefteq Y$. Quindi S è il minimo di $\mathcal{M}$, cioè l'estremo superiore di $\mathcal{B}$ in $(\mathcal{A}, \trianglelefteq)$.

Problema 27. Facciamo qualche osservazione sulla relazione definita nel testo. Siano $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$. Se $|Y|, |Z|$ sono entrambi pari allora $Y_0 = Y$, $Z_0 = Z$ e $|Y| + |Z|$ è pari, quindi, in questo caso, $Y \triangleleft Z$ se e soltanto se $Y \subseteq Z$. Similmente, se $|Y|, |Z|$ sono entrambi dispari, si trova che $Y \triangleleft Z$ se e solo se $X \setminus Y \subseteq X \setminus Z$, e questo equivale a $Z \subseteq Y$. Se invece $|Y|, |Z|$ sono uno pari ed uno dispari, $|Y| + |Z|$ è dispari e qundi, per definizione, $Y \ntriangleleft Z$.

1) Da quanto osservato si deduce facilmente che $\triangleleft$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{P}(X)$. La riflessività è chiara. Siano $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ con $Y \triangleleft Z$ e $Z \triangleleft Y$, allora, per quanto detto, $|Y|, |Z|$ sono entrambi pari o entrambi dispari; nel primo caso, inoltre, $Y \subseteq Z$ e $Z \subseteq Y$, nel secondo (la stessa cosa) $Z \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$; dunque $Y = Z$. Per la transitività, siano $Y, Z, T \in \mathcal{P}(X)$ con $Y \triangleleft Z$ e $Z \triangleleft T$; allora $|Y|, |Z|, |T|$ sono tutti pari oppure tutti dispari; nel primo caso $Y \subseteq Z \subseteq T$, quindi $Y \subseteq T$ e dunque, poiché $|Y| e |T|$ sono pari, $Y \triangleleft T$; nel secondo caso $T \subseteq Z \subseteq Y$, quindi $T \subseteq Y$ e dunque, poiché $|Y| e |T|$ sono dispari, $Y \triangleleft T$.

2) Sia $Y \in \mathcal{P}(X)$ con $|Y|$ pari; se $Y \neq X$ allora (per quanto detto sin qui) poichè X è pari, $Y \triangleleft X$, e Y non è elemento massimale; d'altra parte, se $T \in \mathcal{P}(X)$ con $X \triangleleft T$, allora $|T|$ deve essere pari e quindi $X \subseteq T$ da cui $T = X$. Dunque, X è un elemento massimale. Sia $Y \in \mathcal{P}(X)$ con $|Y|$ dispari. Allora, preso $a \in Y$ si ha $Y_0 = X \setminus Y \subseteq X \setminus \{a\} = \{a\}_0$ e dunque $Y \triangleleft \{a\}$. D'altra parte se $Z \in \mathcal{P}(X)$, $a \in X$ sono tali che $\{a\} \triangleleft Z$, allora $|Z|$ deve essere dispari e quindi $Z \subseteq \{a\}$, ovvero $Z = \{a\}$. Pertanto, sono elementi massimali di $(\mathcal{P}(X), \triangleleft)$ anche tutti gli elementi del tipo $\{a\}$ con $a \in X$.

3) Poiché $|A|, |B|, |C|$ sono dispari, un maggiorante U di $\{A, B, C\}$ deve essere di ordine dispari e si deve verificare $U \subseteq A \cap B \cap C = X \setminus \{a, b, c\}$. In particolare $M = X \setminus \{a, b, c\}$ è un maggiorante; e se U è un maggiorante allora $U \subseteq M$ e dunque, poiché $|U|$ è dispari, $M \triangleleft U$. Quindi, M è il minimo dei maggioranti dell'insieme $\{A, B, C\}$ e pertanto ne è l'estremo superiore.

Problema 28. 1) La relazione $\leq_3$ è riflessiva per definizione. Siano $a, b \in \mathbb{N}_0$ tali che $a \leq_3 b$ e $b \leq_3 a$ e assumiamo $a \neq b$; allora $b \geq 3a$ e $a \geq 3b$ che è assurdo: dunque $a = b$, provando così che la relazione è antisimmetrica. Siano poi $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ con $a \leq_3 b$ e $b \leq_3 c$; se $a = b$ o $b = c$ allora subito $a \leq_3 c$; altrimenti $b \geq 3a$ e $c \geq 3b$, da cui $c \geq 9a \geq 3a$ e dunque $a \leq_3 c$, provando che la relazione è transitiva.

2) Se $3 \leq b \in \mathbb{N}_0$, allora $1 \leq_3 b$ e quindi b non è un elemento minimale. Viceversa sia $a \in \mathbb{N}_0$ con $a \leq_3 2$: poiché $2 \not\geq 3a$ si ha $a = 2$, il che prova che 2 è un elemento minimale; allo stesso modo si vede che 1 è minimale. Poiché l'insieme parzialmente ordinato $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$ ha due distinti elementi minimali, esso non ha minimo.

3) Questo è il punto più difficile del problema. Sia $B \neq \emptyset$ un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}_0$. Se B ha un massimo in $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$ allora tale massimo è l'estremo superiore. Viceversa, supponiamo che B ammetta estremo superiore s in $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$; se $s \notin B$ allora (poiché $b \leq_3 s$ per ogni $b \in B$) $s \geq 3b$ per ogni $b \in B$, ma allora $s + 1 \geq 3b$ per ogni $b \in B$, dunque $s+1$ è un maggiorante di B in $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$ e pertanto $s \leq_3 s+1$, cioè $s+1 \geq 3s$ che è assurdo. Quindi $s \in B$ e dunque s è il massimo di B.

4) Qui, ricordandoci del punto 2), basta considerare l'insieme $B = \{1, 2\}$. Poichè 1 e 2 sono elementi minimali di $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$, l'insieme B non ha minoranti e dunque non ha estremo inferiore.

Problema 29. 1) Proviamo che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{N}_0$.
• *riflessività.* Questa è ovvia.
• *antisimmetria.* Siano $a, b \in \mathbb{N}_0$ tali che $a \trianglelefteq_k b$ e $b \trianglelefteq_k a$; allora $(a, k) = (b, k)$ e $[a, k] = [b, k]$. Da ciò segue

$$ak = [a, k](a, k) = [b, k](b, k) = bk$$

e dunque, poiché $k \neq 0$, $a = b$.
• *transitività.* Anche questa è ovvia.

2) Si vede subito che 1 è il minimo di $(\mathbb{N}_0, \trianglelefteq_k)$: infatti, per ogni $a \in \mathbb{N}_0$ si ha

$$(1, k) = 1 \leq (a, k) \text{ e } [1, k] = k \leq [a, k].$$

É anche facile vedere che $(\mathbb{N}_0, \trianglelefteq_k)$ non ha massimo: infatti, per ogni $a \in \mathbb{N}_0$, $a \trianglelefteq_k 2a$.

3) Per $k = 1$ si ha, per ogni $a \in \mathbb{N}_0$, $(a, k) = 1$ e $[a, k] = a$, e dunque la relazione $\trianglelefteq_1$ coincide con la relazione d'ordine naturale $\leq$. Se $k \geq 2$, si considerino gli elementi $a = k$ e $b = k + 1$; allora $(b, k) = 1 < k = (a, k)$, mentre $[a, k] = k < k(k + 1) = [b, k]$; dunque $a \not\trianglelefteq_3 b$ e $b \not\trianglelefteq_3 a$.

4) Se $k = 1$, $A = \emptyset$ che non ha massimo, mentre, se $k = 2$, $A = \{1\}$ ha massimo. Supponiamo che k sia un numero primo; allora, per ogni $a \in A$, $(a, k) = 1$ e $[a, k] = ak$, dunque la restrizione di $\trianglelefteq_k$ ad A è l'ordine naturale e pertanto A ha massimo $k - 1$. Supponiamo infine che $1 \neq k$ non sia un numero primo, e sia p un divisore primo di k. Allora $k - 1 \geq 2$ e, per ogni $1 < a < k - 1$, $[a, k] < (k - 1)k = [k - 1, k]$, dunque, se A ha massimo in $(\mathbb{N}_0, \trianglelefteq_k)$, questo deve essere $k - 1$; ma $(p, k) = p > (k - 1, k) = 1$ e quindi $p \not\trianglelefteq_k k - 1$, assurdo. In conclusione, A ha un massimo in $(\mathbb{N}_0, \trianglelefteq_k)$ se e solo se k è un numero primo.

Problema 30. 1) • *riflessività.* Sia $n \in \mathbb{N}_0$; allora $n|n$ e $n/n = 1$ che non è un numero primo, dunque $n \parallel n$.

• *antisimmetria.* Siano $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n \parallel m$ e $m \parallel n$; allora, in particolare, $n|m$ e $m|n$, dunque (poiché n e m sono interi positivi) $n = m$.

• *transitività.* Siano $n, m, t \in \mathbb{N}_0$ con $n \parallel m$ e $m \parallel t$; allora $n|m$ e $m|t$, dunque $n|t$. Inoltre,

$$\frac{t}{n} = \frac{t}{m} \cdot \frac{m}{n},$$

e dal fatto che né t/m né m/n è un primo segue che t/n non è primo; dunque $n \parallel t$.

2) Osserviamo che se $n \in \mathbb{N}_0$ non è un primo allora $1 \parallel n$, dunque, se inoltre $n \neq 1$, n non è minimale. Viceversa, sia $n \in \mathbb{N}_0$ con $n = 1$ oppure n un numero primo, e sia $m \in \mathbb{N}_0$ tale che $m \parallel n$; allora m divide n e n/m non è primo, il che comporta $m = n$, mostrando che n è un elemento minimale. Infine, dato che esiste più di un elemento minimale, $(\mathbb{N}_0, \parallel)$ non ha minimo.

3) Sia $n \in \mathbb{N}_0$ un maggiorante dell'insieme $B = \{2, 3\}$. Allora $2|n$ e $3|n$, dunque $6|n$, quindi $n = 6c$ per qualche $c \in \mathbb{N}_0$; inoltre si ha che $n/2 = 3c$ e $n/3 = 2c$ non sono numeri primi, cosa che è equivalente a $c \neq 1$. Dunque, l'insieme dei maggioranti di B è

$$\mathcal{M} = \{6c \mid 1 < c \in \mathbb{N}\}.$$

Osserviamo ora che 6 è un elemento minimale di $\mathcal{M}$, ma non ne è il minimo, dato che, ad esempio, $6 \not\parallel 30 \in \mathcal{M}$. Dunque $\mathcal{M}$ non ha minimo e pertanto non esiste $\sup(B)$.