Programma di Algebra III A.A. 2019/2020

Programma svolto nella prima parte: Teoria di Galois.

1. Campi finiti: esistenza e unicità. Gruppo di Galois di estensioni tra campi finiti.

2. Sottogruppi finiti del gruppo moltiplicativo di un campo.

3. Estensioni semplici: Teorema di Steinitz-Artin. Teorema dell'elemento primitivo. Esempio di una estensione finita non semplice.

4. Radici dell'unità; radici primitive. Estensioni ciclotomiche (primitive) hanno gruppo di Galois abeliano.

5. Lemma di Dedekind. Anello degli endomorfismi di uno spazio vettoriale, polinomio minimo e polinomio caratteristico di un operatore lineare. Moduli ciclici rispetto all'anello generato da un operatore lineare. Teorema della base normale e sue conseguenze.

6. Polinomio ed estensioni ciclotomiche sul campo dei razionali. Gruppi di Galois di un'estensione ciclotomica.

7. Automorfismi di gruppi ciclici e gruppo degli invertibili degli anelli di classi di resto.

8. Serie in gruppi; raffinamenti e serie di composizione in gruppi finiti. Gruppi risolubili. Sottogruppi e quozienti di gruppi risolubili. La risolubilità si conserva per estensioni.

9. Se $1 \neq N \trianglelefteq A_n$ ed N contiene un 3-ciclo, allora $N = A_n$. Semplicità dei gruppi alterni A_n per $n \geq 5$.

10. Campo composto e lemmi di omomorfismo per sezioni di Galois.

11. Estensioni radicali e Teorema di Kummer. Estensioni multiradicali e polinomi risolubili per radicali. Estensioni multiabeliane. Gruppi di Galois per sottoestensioni di estensioni radicali.

12. Teorema di Galois: in caratteristica 0 un polinomio è risolubile per radicali se e solo se un suo campo di spezzamento ha gruppo di Galois risolubile.

13. Gruppi transitivi risolubili su un numero primo di punti.

14. Esempi di polinomi di grado primo tali che: 1) non sono risolubili per radicali, 2) il cui gruppo di Galois è l'intero gruppo simmetrico.

15. Campi algebricamente chiusi e chiusure algebriche. Esistenza della chiusure algebrica di un qualsiasi campo.

16. Dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra (il campo complesso $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso).

Programma svolto nella seconda parte: Algebra commutativa.

i riferimenti al materiale didattico sono per le dispense in:
http://web.math.unifi.it/users/casolo/dispense/AlgComm19.pdf

1. Anelli, sottoanelli, ideali, omomorfismi e anelli quoziente; elementi invertibili e nilpotenti. Ideali primi e ideali massimali; Lemma di Zorn e applicazioni agli ideali. Operazioni tra ideali [1.1, 1.2, 1.3 tutto].

2. Radicale nilpotente e radicale di Jacobson di un anello. Radicale di un ideale [1.4, 1.5 tutto]

3. Radicali negli anelli di polinomi, delle serie formali e anelli gruppali [1.6 esempi 1, 2 e 3].

4. Moduli su un anello commutativo; sottomoduli, omomorfismi, moduli quoziente. Teoremi di omomorfismo. Somme e somme dirette di moduli. Sequenze esatte [2.1, 2.2, tutto]

5. Moduli finitamente generati. Moduli ciclici. Moduli liberi; Lemma di Nakayama e Lemmi collegati [2.3 tutto]

6. Condizioni sulle catene per moduli e anelli. Moduli e anelli noetheriani; Teorema della base di Hilbert [3.1 (tutto, esclusa la dimostrazione della Proposizione 33 e l'esempio pag 43–45)].

7. Moduli e anelli artiniani. Dimensione di un anello. Anelli artiniani sono noetheriani [3.2 (tutto, escluso Lemma 50)]

8. Ideali primari. Decomposizione primaria di ideali; aspetti generali, decomposizioni irridondanti, ideali primi associati ad un ideale decomponibile. Ideali irriducibili e decomponibilità degli ideali di un anello noetheriano [3.3 tutto, escluse le Proposizioni 56, 57].

9. Insiemi moltiplicativamente chiusi e anelli di frazioni. Ideali negli anelli di frazioni [4.1, tutto esclusi Lemma 68 e Proposizione 69].

10. Localizzazione [4.2 tutto]

11. Dipendenza intera; definizione, chiusura intera; anelli degli interi dei campi di numeri (esempio delle estensioni di grado 2) [5., fino all'esempio importante - pagg. 72, 73 - incluso]