

Laurea in Matematica
Università di Firenze

Corso di Teoria dei Grafi

Carlo Casolo, Silvio Dolfi
a.a. 2011-2012

Indice

I	TEORIA GENERALE	5
1	Concetti di base.	7
1.1	L'idea di grafo.	7
1.2	Vertici, cammini, cicli.	14
1.3	Cammini euleriani e hamiltoniani.	19
1.4	Alcuni invarianti fondamentali.	25
1.5	Esercizi e complementi.	30
2	Alcune classi di grafi	35
2.1	Alberi.	35
2.2	Grafi planari.	42
2.3	Grafi regolari.	48
2.4	Grafi bipartiti.	51
2.5	Grafi estremi. Teorema di Turán.	61
2.6	Esercizi e complementi.	66
3	Grafi diretti e connettività	75
3.1	Grafi diretti	75
3.2	Reti e flussi.	77
3.3	Connettività e Teorema di Menger.	84
3.4	Fattori.	89
3.5	Esercizi	93
4	Colorazioni	97
4.1	Colorazioni dei vertici.	98
4.2	Colorazioni dei lati.	102
4.3	L-colorazioni.	106
4.4	Teoria di Ramsey.	109
4.5	Grafi perfetti	116
4.6	Esercizi e complementi.	119
5	Grafi e Algebra	123
5.1	Matrice d'adiacenza.	123
5.2	Grafi fortemente regolari, grafi di Moore.	130

5.3	Automorfismi.	135
5.4	Grafi di Cayley.	138
5.5	Expanders	143
5.6	Esercizi e complementi.	149

Parte I

TEORIA GENERALE

Capitolo 1

Concetti di base.

1.1 L'idea di grafo.

Sia V un insieme e sia $1 \leq n \in \mathbb{N}$; si denota con $V^{[n]}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di V di cardinalità n . Dunque, in particolare, se V è un insieme finito, $|V^{[n]}| = \binom{|V|}{n}$.

Un **multigrafo** è una tripla $G = (V, E, \phi)$, dove V ed E sono insiemi, con $V \neq \emptyset$, e ϕ è un'applicazione

$$\phi : E \longrightarrow V^{[2]}.$$

In tal caso, V ed E sono detti, rispettivamente, l'insieme dei **vertici** e quello degli **archi** (o *lati*) di $G = (V, E, \phi)$. Il multigrafo $G = (V, E, \phi)$ si dice *finito* se entrambi gli insiemi V e E lo sono. Se $e \in E$, allora i due vertici appartenenti a $\phi(e)$ si dicono gli *estremi* di e . Dato $v \in V$, il **grado** (o *valenza*) di v è il numero di archi $e \in E$ di cui v è un estremo, e si denota con $d_G(v)$. Un vertice che non sia estremo di alcun arco (cioè tale che $d_G(v) = 0$) si dice vertice *isolato* di G .

Chiameremo **grafo** un multigrafo $G = (V, E, \phi)$ in cui l'applicazione ϕ è iniettiva. In tal caso è conveniente identificare E con la sua immagine in $V^{[2]}$ tramite ϕ , e quindi vedere l'insieme degli archi di G come un sottoinsieme di $V^{[2]}$. Esplicitamente: un grafo è una coppia (V, E) , dove V è un insieme non vuoto ed E è un sottoinsieme (che può anche essere vuoto) dell'insieme dei sottoinsiemi di ordine 2 di V . Chiaramente, la differenza tra multigrafo e grafo è che, in un grafo, per ogni coppia di vertici c'è al più un arco che ha tali vertici come estremi, mentre in un generico multigrafo è consentito che ve ne siano più d'uno (ma non sono ammessi archi che abbiano un solo estremo). Denoteremo con $V(G)$ l'insieme dei vertici e con $E(G)$ l'insieme dei lati di un grafo G .

Conviene avvisare che (quasi) tutta la terminologia in teoria dei grafi è soggetta a variazioni da testo a testo. La definizione di (multi)grafo che abbiamo scelto non è la più generale (come accenneremo tra poco); in alcuni testi sono detti grafi quelli che noi qui abbiamo definito come multigrafi, mentre i nostri grafi sono detti grafi semplici. L'argomento principale di queste note sono i grafi finiti. Tuttavia alcuni risultati possono essere provati senza ulteriore

fatica per i multigrafi in generale, o per grafi infiniti, cosa che (quando non troppo onerosa) cercheremo di fare.

È comodo (quando si sia in grado di farlo) rappresentare uno specifico (multi)grafo mediante un diagramma, nel quale i vertici sono punti in un piano, ed ogni arco è rappresentato da una linea continua (non necessariamente un segmento di retta) congiungente i due vertici che corrispondono agli estremi dell'arco. Ad esempio, sia $X = \{1, 2, 3\}$, e sia G il grafo i cui vertici sono i sottoinsiemi di X , e due di essi formano un arco se la loro differenza simmetrica contiene almeno due elementi. Allora, G si può rappresentare mediante il diagramma:

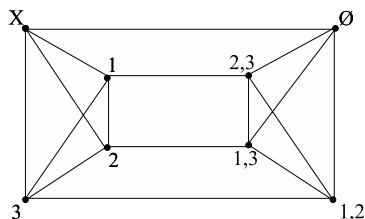


Figura 1.1: un grafo

La nozione di grafo si presta alla più svariate utilizzazioni, costituendo un modo comodo e compatto per descrivere relazioni binarie in senso lato. Ad esempio il grafo della Figura 1.2 è il diagramma della molecola di etanolo, la cui formula chimica è H_6C_2O .

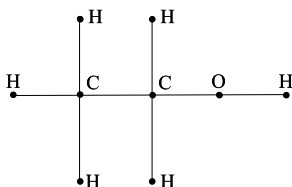


Figura 1.2: la molecola dell'etanolo

E risulta spesso conveniente utilizzare i multigrafi: ad esempio, per rimanere nella rappresentazione delle molecole, un multigrafo riesce a descrivere con maggior precisione i legami tra gli atomi (semplici, doppi, etc.). Così il multigrafo della figura 1.3 rappresenta la molecola dell'adenina (uno degli aminoacidi di base degli acidi nucleici), la cui formula chimica è $H_2C_5N_5$.

Oltre a ciò, è anche possibile che, per rappresentare particolari situazioni, si debba prevedere l'eventualità che alcuni archi inizino e terminino nello stesso vertice. Tali archi sono detti *cappi*; e chiamiamo *pseudografi* i multigrafi in cui sono ammessi i cappi. Si tratta, tuttavia, di una generalizzazione che non prenderemo in considerazione (e che, per molti, aspetti, può comunque essere ricondotta, al caso dei multigrafi). Un'altra maniera (forse più importante) di estendere il concetto di grafo è quella di assegnare ad ogni arco una "direzione", che nel diagramma viene di solito rappresentata mediante una

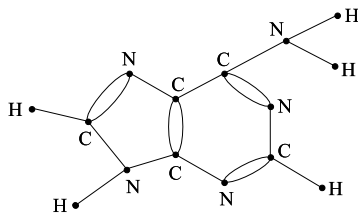


Figura 1.3: la molecola dell'adenina

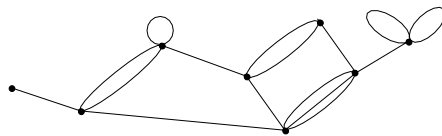


Figura 1.4: uno pseudografo

freccia (come ad esempio negli alberi genealogici, nei diagrammi che descrivono flussi, o in schemi di reti di distribuzione di varia natura). In tal caso, si parla di *grafi diretti*: oggetti che hanno importanti applicazioni, e dei quali ci occuperemo nel terzo capitolo di queste note.

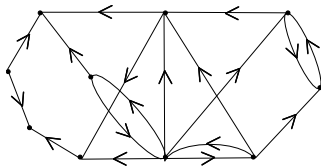


Figura 1.5: un grafo diretto

Naturalmente, può poi essere conveniente ricorrere a multigrafi o a pseudografi con direzione. Ad esempio, se V è l'insieme degli studiosi di un dipartimento di matematica (o anche di chimica), e si vuole rappresentare mediante un diagramma le citazioni incrociate da parte degli studiosi di V negli articoli di ricerca degli ultimi tre anni, dobbiamo ricorrere ad uno pseudografo con direzione, dato che è possibile che la studiosa a citi il/la collega b , ma che questi non citi mai la collega a (e dunque i lati hanno una direzione), è poi possibile che a citi b più di una volta (da cui i lati multipli), ed infine è possibile (ed anzi è del tutto frequente) che una/o studiosa/o citi se stessa/o (e più di una volta), da cui la necessità di utilizzare anche i cappi.

Comunque lo si prenda, Il fatto importante è che, spesso, il concetto di grafo, con le diverse varianti, non solo fornisce uno schema visivo più o meno suggestivo, ma costituisce il naturale strumento matematico per rendere accessibile lo studio di determinati problemi.

Cominciamo con il definire in astratto i concetti (entrambi piuttosto naturali) di isomorfismo tra grafi e di sottografo.

Isomorfismi. Quando due grafi sono lo "stesso grafo"? Un grafo $G = (V, E)$ è sostanzialmente l'espressione di una relazione binaria simmetrica (descritta dall'insieme E) su V , indipendentemente dalla natura degli elementi di V . È facile quindi arrivare alla definizione seguente:

Un **isomorfismo** tra due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ è una biezione $\alpha : V \rightarrow V'$ tra gli insiemi dei vertici tale che, per ogni $x, y \in V$,

$$\{x, y\} \in E \iff \{\alpha(x), \alpha(y)\} \in E'.$$

Se una tale applicazione esiste, si dice che G e G' sono **isomorfi** (e si usa scrivere l'isomorfismo come $\alpha : G \rightarrow G'$).

Questo concetto giustifica il fatto che un grafo possa essere rappresentato da un diagramma, che non è soltanto un mezzo per aiutare l'intuizione, ma contiene tutte le informazioni sul grafo in quanto tale; in un certo senso, esso è *il grafo*. Difatti, il più delle volte, un grafo viene dato direttamente e solo come diagramma. Diagrammi diversi possono benissimo essere lo stesso grafo: ad esempio, nel disegnare il diagramma del grafo che ha dato origine alla figura 1.1, avremmo potuto disporre in modo diverso i punti sul foglio (ad esempio, come vertici di un ottagono regolare), e far corrispondere ad essi in modo diverso i vertici del grafo (cioè i sottoinsiemi di $X = \{1, 2, 3\}$): avremmo probabilmente ottenuto un disegno abbastanza diverso, che tuttavia rappresenta lo stesso grafo.

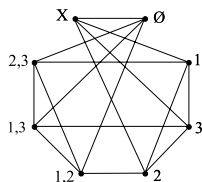


Figura 1.6: la figura 1.1 in un suo (riuscito?) travestimento

La definizione di *isomorfismo per i multigrafi* dovrà tener conto del fatto che l'insieme degli archi non è individuato da coppie di vertici. Si dirà quindi che due multigrafi $G = (V, E, \phi)$ e $G' = (V', E', \psi)$ si dicono *isomorfi* se esiste una coppia di biezioni, $\alpha : V \rightarrow V'$ e $\beta : E \rightarrow E'$, tali che, per ogni $e \in E$, $\psi(\beta(e)) = \alpha(\phi(e))$.

Grafo completo. Un grafo $G = (V, E)$ si dice *completo* se $E = V^{[2]}$. Se $1 \leq n \in \mathbb{N}$, denotiamo con K_n il grafo completo su n vertici.

Osserviamo che in un grafo completo su n vertici, il numero degli archi è dunque uguale al numero di sottoinsiemi di ordine due dell'insieme dei vertici, e quindi è $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

È del tutto chiaro che due grafi completi sono isomorfi se e solo se i loro insiemi di vertici hanno la stessa cardinalità. Ad esempio, il primo grafo a sinistra nella figura 1.8 è isomorfo a K_5 (una qualsiasi corrispondenza biunivoca tra i vertici funziona); i due grafi a destra

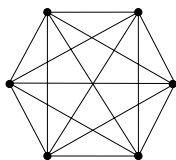
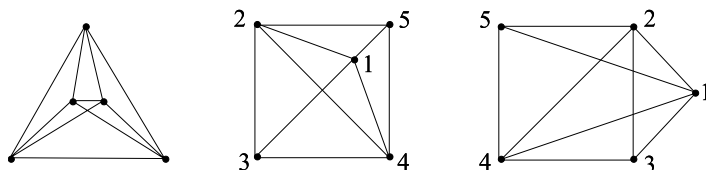
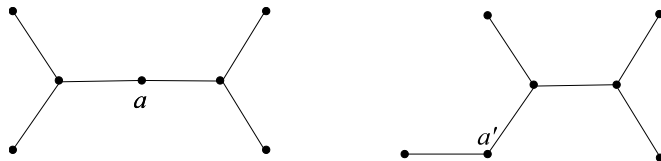
Figura 1.7: il grafo completo K_6 

Figura 1.8: isomorfismo

sono isomorfi tra loro (la numerazione indica una corrispondenza tra i vertici che realizza un isomorfismo di grafi), ma non sono isomorfi a K_5 (infatti non sono completi).

In generale, non è facile stabilire se due grafi siano isomorfi, e non esiste un metodo generale ed efficiente per farlo. Talvolta non rimane che procedere per tentativi: se il grafo non è molto grande ci si può aiutare pensando ai vertici come a palline rigide ed ai lati come ad elastici, che si possono deformare ed incrociare, ma non staccare dalle palline che uniscono, e quindi tentare di immaginare se tendendo, contraendo, incrociando, etc. codesti elastici, avvenga di passare da una configurazione all'altra. È chiaro che poi, se ci va bene, il tutto va tradotto in un argomento formalmente corretto (ad esempio indicando esplicitamente la corrispondenza tra i vertici che realizza l'isomorfismo). Naturalmente, vi sono anche considerazioni del tutto rigorose che è possibile fare prima di lanciarsi nei tentativi: ad esempio, se $\phi : G \rightarrow G'$ è un isomorfismo di grafi, si vede facilmente che $d_G(v) = d_{G'}(\phi(v))$ per ogni vertice v di G ; quindi, in particolare, grafi isomorfi hanno lo stesso numero di vertici di ciascun grado. Questa condizione non è tuttavia sufficiente a garantire che due grafi siano isomorfi; ad esempio, essa è soddisfatta dai due grafi della figura seguente,



i quali non sono isomorfi: infatti se vi fosse un isomorfismo tra di essi, allora il vertice a dovrebbe corrispondere al vertice a' (dato che questi sono i soli vertici di grado 2 in ognuno dei due grafi), ma nel grafo a sinistra a è adiacente ai due vertici di grado 3, ai quali dovrebbero corrispondere i due vertici di grado 3 del grafo di destra, che tuttavia non sono entrambi adiacenti ad a' . Ma anche questo tipo di considerazioni "locali" (cioè relative a quel che

accade in prossimità di vertici che, in un ipotetico isomorfismo, si devono corrispondere) non sono sempre sufficienti per concludere.

Primi grafi. Come già detto, un grafo è *finito* se l'insieme dei suoi vertici (e, di conseguenza, quello dei suoi archi) è finito. A meno che non venga esplicitamente detto il contrario, tutti i grafi (e anche tutti i multigrafi) che considereremo nel seguito saranno implicitamente intesi essere finiti.

Vi sono alcuni grafi, dalla struttura molto semplice e regolare, che possiamo considerare come fondamentali per la nostra comprensione; tra questi, abbiamo già definito i grafi completi K_n , altrettanto importanti sono i cosiddetti cicli: il **ciclo di lunghezza n** (o n -ciclo) è (a meno di isomorfismo) il grafo il cui lati sono tutti e soli quelli che costituiscono il perimetro del n -agono: esso si denota con C_n (ovviamente, in questo tipo di grafi, il numero di lati è uguale a quello dei vertici).

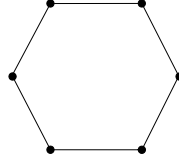


Figura 1.9: il ciclo C_6

Formalmente $C_n = (V, E)$, dove $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ed $E = \{\{i, i+1\}, \{n, 1\} | 1 \leq i \leq n-1\}$.

Con P_n (per $n \geq 1$) denoteremo invece il grafo con $n+1$ vertici, i cui archi si seguono come nella figura (lasciamo al lettore di darne una definizione formale),

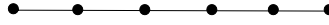


Figura 1.10: il grafo P_5

Tra i grafi con un numero ridotto di vertici, uno dei più interessanti (e che richiameremo spesso negli esercizi e negli esempi) è il *grafo di Petersen* della Figura 1.11. Si tratta di un grafo con caratteristiche non sempre intuitive, il che lo rende un soggetto da test: quando si tratta di valutare una qualche congettura, il primo caso che si prende in esame è spesso il grafo di Petersen.

Sottogradi. Un multigrafo $G' = (U, F, \phi')$ si dice un *sottografo* del multigrafo $G = (V, E, \phi)$ se $\emptyset \neq U \subseteq V$, $F \subseteq E$ e $\phi' = \phi|_F$. Nel caso dei grafi, quindi, $G' = (V', E')$ si dice un **sottografo** del grafo $G = (V, E)$ se $\emptyset \neq V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$; ad esempio, i diagrammi in figura 1.12 mostrano (a livello di sottogradi e lati) alcuni sottogradi del grafo $G = (V, E)$ del grafo di Petersen. Un tipo importante di sottografo è il **sottografo indotto** se, per ogni $u, v \in V'$, $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \in E'$; ovvero se ogni arco di G i cui estremi appartengono a V' è anche un arco di G' . Se $\emptyset \neq S \subseteq V$ è un sottoinsieme dell'insieme dei vertici di G , il sottografo *indotto* da S è il sottografo indotto di G il cui insieme di vertici è S . Negli esempi di figura 1.12 solo il caso B descrive un

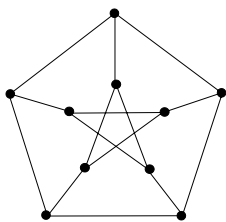


Figura 1.11: il grafo di Petersen

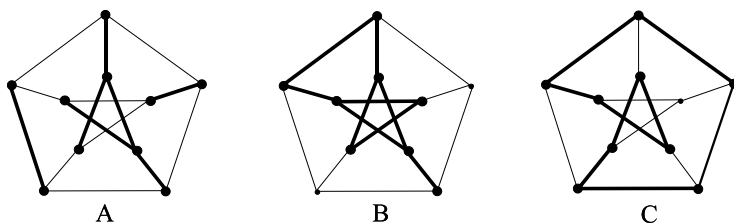


Figura 1.12: sottografi

sottografo indotto. Nell'esempio in figura 1.13, l'insieme dei vertici è $V = \{1, 2, \dots, 8\}$, e il grafo G' è il sottografo indotto da $S = V \setminus \{3\}$.

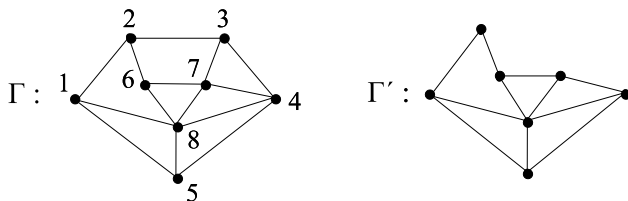


Figura 1.13: un sottografo indotto

È conveniente introdurre fin d'ora le seguenti notazioni. Sia $G = (V, E, \phi)$ un multigrafo; fissato un suo arco $e \in E$, denotiamo con $G - e$ il multigrafo ottenuto da G rimuovendo il lato e (ma lasciando tutti i vertici), pertanto $G - e = (V, E \setminus \{e\}, \phi)$; mentre se $v \in V$ è un vertice di G , denotiamo con $G - v$ il multigrafo ottenuto da G togliendo il vertice v e tutti i lati ad esso adiacenti (si tratta quindi di un sottografo indotto, ed anzi ogni sottografo indotto si ottiene da G mediante un numero finito di sottrazioni di vertici).

Grafo complementare. Un concetto spesso utile, è quello di grafo complementare. Se $G = (V, E)$ un grafo; il *grafo complementare* $\bar{G} = (V', E')$ è definito nel modo seguente $V' = V$ e, per ogni $u, v \in V$ con $u \neq v$, $\{u, v\} \in E'$ se e solo se $\{u, v\} \notin E$. Ad esempio, il complementare di un grafo completo $(V, V^{[2]})$ è il grafo privo di archi (V, \emptyset) ; mentre il grafo

complementare del ciclo C_4 è il grafo costituito da due archi disgiunti (i cui estremi sono i vertici del grafo). È chiaro che per ogni grafo G , il complementare di \bar{G} è G stesso.

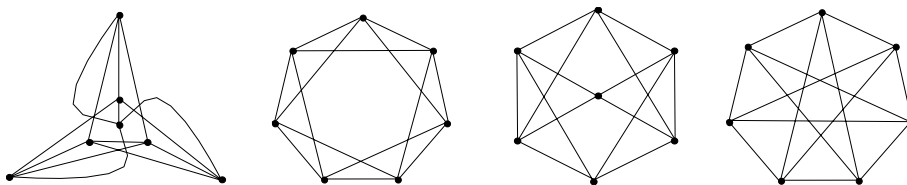
Esercizio 1.1. Si rappresentino mediante un diagramma i seguenti grafi:

1) $G = (V, E)$, dove $V = \{0, 1\}^3$ è l'insieme delle terne a coefficienti in $\{0, 1\}$, e dati $a, b \in V$, $\{a, b\} \in E$ se e solo se a e b differiscono esattamente per una componente.

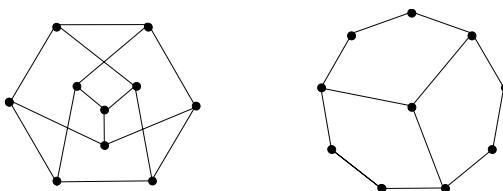
2) Sia $B_6 = (V, E)$, dove $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e per $a, b \in V$, $\{a, b\} \in E$ se e solo se $a - b$ è dispari.

Esercizio 1.2. Si dica quanti sono, a meno di isomorfismo, i grafi con quattro vertici. Quanti sono quelli privi di vertici isolati?

Esercizio 1.3. Si dica quali tra i seguenti grafi sono tra loro isomorfi:



Esercizio 1.4. Si provi che il grafo a sinistra nella figura di sotto è isomorfo al grafo di Petersen. Al grafo di destra si aggiungano opportunamente tre lati in modo da ottenere un grafo isomorfo al grafo di Petersen.



Esercizio 1.5. Si dimostri che il grafo complementare di C_5 è C_5 .

1.2 Vertici, cammini, cicli.

Sia $G = (V, E, \phi)$ un multigrafo. Come già detto, se $e \in E$, i due vertici appartenenti a $\phi(e)$ si dicono gli *estremi* di e . Un vertice v ed un arco e si dicono *incidenti* se $v \in \phi(e)$ (cioè se v è un estremo di e); due vertici $v, w \in V$ si dicono *adiacenti* se $\{v, w\} \in \phi(E)$ (ovvero, sono estremi di uno stesso arco); similmente, diremo che due archi $e, e' \in E$ sono *consecutivi* se hanno un estremo in comune (cioè se $e \neq e'$ e $\phi(e) \cap \phi(e') \neq \emptyset$). Dato $v \in V$, il **grado** (o *valenza*) di v è il numero di archi incidenti a v (che, nel caso dei grafi, coincide con il numero di vertici adiacenti a v), e si denota con $d_G(v)$. Un vertice che non sia incidente ad alcun arco (cioè tale che $d_G(v) = 0$) si dice vertice *isolato* di G . Il primo risultato generale della teoria dei grafi è una semplice ma fondamentale osservazione:

Teorema 1.1. *Sia $G = (V, E)$ un multigrafo. Allora*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'insieme $S = \{(v, e) \in V \times E \mid v \in \phi(e)\}$. Ora, ogni vertice $v \in V$ è incidente a tanti archi in E quanto è il suo grado; viceversa, ad ogni arco corrispondono esattamente due estremi. Si ha quindi, contando in due modi gli elementi dell'insieme S , facendo cioè separatamente variare in primo luogo la prima componente (i vertici), e quindi la seconda (gli archi):

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = |S| = 2|E|,$$

da cui l'enunciato. ■

Ovviamente, un vertice si dirà (dis)pari se il suo grado è (dis)pari. Poiché una somma di numeri interi è pari se e soltanto se il numero di addendi dispari è pari, dal teorema 1.1 discende subito il seguente

Corollario 1.2. *In un multigrafo il numero di vertici dispari è pari.*

Regolarità. Un multigrafo si dice **regolare** se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado; se tale grado comune è d , si dice che il grafo è regolare d -valente, o d -regolare. Un esempio è il grafo in figura 1.1, che è 4-regolare. Si osservi che, se G è d -regolare, allora la formula del teorema 1.1 diventa $d|V| = 2|E|$.

Il grafo completo K_n è $(n - 1)$ -regolare (ed è il solo grafo con tale proprietà su un insieme di n vertici). Un n -ciclo ($n \geq 3$) è un grafo 2-regolare (infatti, si prova - esercizio 1.10 - che ogni grafo connesso 2-regolare è isomorfo ad un ciclo C_n).

I grafi 3-regolari sono spesso chiamati *grafi cubici* e possono essere molto complicati; costituiscono perciò un classe assai interessante (e difficile) di grafi regolari. Il grafo di Petersen è cubico; un altro esempio di grafo cubico con 10 vertici (e non isomorfo al grafo di Petersen), è il seguente.

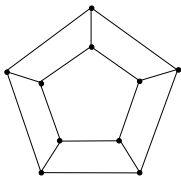


Figura 1.14: un grafo cubico

Famosi grafi regolari si ottengono considerando la relazione d'incidenza tra i vertici e gli spigoli nei poliedri regolari (i cosiddetti solidi platonici). La figura 1.15 mostra i grafi del tetraedro, del cubo (esaedro), dell'ottaedro, e del dodecaedro; si disegni per esercizio il grafo dell'icosaedro (20 facce triangolari, 12 vertici e 30 spigoli).

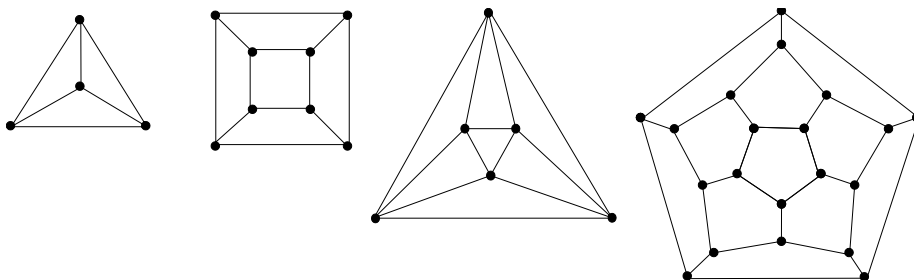


Figura 1.15: i grafi di alcuni solidi regolari

Ad ogni grafo G può essere associata la *sequenza dei gradi*, intendendo con ciò la successione dei gradi di tutti i vertici di G ordinati in modo crescente. Ad esempio, la sequenza dei gradi del grafo della figura 1.13 è $(3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5)$. È chiaro che la sequenza dei gradi non individua il grafo (come abbiamo già osservato a pagina 9), e che non tutte le sequenze crescenti di numeri naturali ≥ 1 sono sequenze dei gradi di un qualche grafo.

Cammini. Sia $G = (V, E, \phi)$ un multigrafo, e siano $v, w \in V$ due vertici di G (non necessariamente distinti). Un **cammino** in G da v a w è una sequenza:

$$v = v_0 \ e_1 \ v_1 \ e_2 \ \dots \ v_{n-2} \ e_{n-1} \ v_{n-1} \ e_n \ v_n = w$$

di vertici $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ (non necessariamente distinti), ed archi $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$, *tutti distinti* e tali che $\phi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

L'intero $n \geq 0$ si dice la *lunghezza* del cammino (osserviamo che prendiamo in considerazione anche cammini di lunghezza 0, formati cioè da un solo vertice e nessun arco).

Se $v_0 = v_n$, il cammino è detto **circuito**. Un cammino (circuito) si dice **semplice** se tutti i vertici che lo compongono, tranne eventualmente il primo e l'ultimo, sono diversi; ovvero se, per ogni $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$ (il cammino non "ripassa" per uno stesso vertice). Un circuito semplice con almeno tre archi è detto anche **ciclo** (in sostanza, un ciclo di lunghezza n è un sottografo isomorfo al n -ciclo C_n).

Osserviamo che, nel caso in cui G sia un grafo (cioè ci sia al più un arco per ciascuna coppia di estremi), nella descrizione di cammino non è necessario includere esplicitamente gli archi e_i . Sarà sufficiente dire che un cammino in un grafo G è una sequenza di vertici di G

$$v_0, v_1, \dots, v_n$$

tale che, per ogni $i, k \in \{1, \dots, n\}$, $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$, e $\{v_{i-1}, v_i\} \neq \{v_{k-1}, v_k\}$ se $i \neq k$.

La definizione di cammino che abbiamo dato, richiedendo che tutti i lati siano distinti, è talvolta troppo restrittiva. Un concetto più ampio è quello di **passeggiata** in un grafo G , ovvero una sequenza di vertici e lati alternativamente $v_0 \ e_1 \ v_1 \ e_2 \ \dots \ v_{n-1} \ e_n \ v_n$, sottoposta alla sola condizione che ogni lato e_i abbia come estremi i vertici v_{i-1} e v_i (si possono quindi "percorrere" più di una volta gli stessi lati, anche "avanti e indietro" – come, appunto, di solito accade in una reale passeggiata). Ogni cammino è dunque una passeggiata, ma

non viceversa. (Non esiste un accordo ecumenico a proposito della nomenclatura relativa a cammini, passeggiate, etc.; anche perché, la letteratura essendo in modo preponderante di lingua inglese, occorrerebbe accordarsi su come tradurre i vari termini come *walk*, *track*, *trail*, *path*, e simili. In considerazione dello scopo circoscritto di queste note, abbiamo cercato di limitare l'introduzione di termini diversi, preferendo piuttosto impiegare qualche aggettivo in più, ma avvisando però che, trovandovi a consultare altri testi, una delle prime cose da fare è quella di controllare le definizioni di *cammino*, *circuito*, etc.)

Connessione. Un multigrafo G si dice **connesso** se per ogni coppia di suoi vertici v, w , esiste in G un cammino tra v e w .

Proposizione 1.3. *Sia $G = (V, E, \phi)$ un multigrafo finito. Se G è connesso allora*

$$|E| \geq |V| - 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V, E, \phi)$ un multigrafo connesso, e procediamo per induzione sul numero n di vertici di G (cioè $n = |V|$). Se $n = 1$ o 2 l'asserto è ovvio. Sia $n \geq 3$, ed assumiamo che la proprietà sia soddisfatta da ogni multigrafo con un numero di vertici strettamente minore di n .

Supponiamo che si abbia $d_G(v) \geq 2$, per ogni $v \in V$; allora, per il Teorema 1.1,

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

e quindi $|E| \geq |V|$. Altrimenti, esiste un vertice v tale che $d_G(v) = 1$ (essendo connesso con almeno due vertici, G non ha vertici isolati). Consideriamo il multigrafo $G' = G - v$. Allora, G' è connesso, perché un cammino che in G congiunge due vertici diversi da v è tutto contenuto in G' (infatti, se passasse per v dovrebbe contenere due volte il solo lato incidente a v). D'altra parte, l'insieme E' dei lati di G' è costituito da tutti i lati di G con l'esclusione del solo lato incidente a v . Dunque, applicando l'ipotesi induttiva,

$$|E| = |E'| + 1 \geq (|V \setminus \{v\}| - 1) + 1 = |V| - 1$$

come si voleva. ■

A questo punto è naturale, dato un multigrafo G , introdurre una relazione sull'insieme V dei vertici, dicendo che due vertici sono in relazione se esiste un cammino (eventualmente di lunghezza 0) che li congiunge. È chiaro che tale definizione stabilisce una relazione d'equivalenza sull'insieme V . Le **componenti connesse** di G non sono altro che i sottografi indotti dalle singole classi di equivalenza di vertici. Si osserva facilmente che le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali. È anche immediato provare (lo si faccia per esercizio) che dato un multigrafo G ed un isomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$, G è connesso se e solo se G' è connesso.

Alberi. Un grafo connesso *privo di circuiti non banali* (il che equivale all'essere connesso e privo di cicli) si dice **albero**. Un grafo privo di cicli (ma non necessariamente connesso) si chiama una **foresta**; è chiaro dunque che un grafo è una foresta se e solo se ogni sua componente connessa è un albero.

Gli alberi sono spesso un naturale metodo di rappresentare relazioni di dipendenza. Il diagramma della molecola di etanolo di Figura 1.2 è un esempio di albero; un altro esempio è l'albero di affinità genetica tra alcune specie di primati (secondo le ipotesi più recenti):

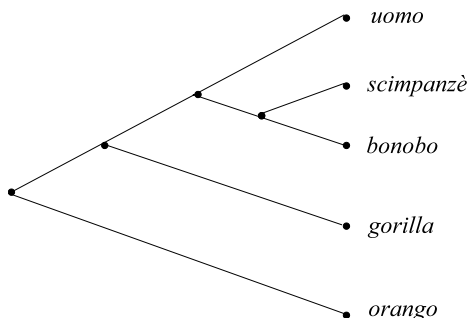


Figura 1.16: l'albero genetico di alcune specie di primati

Torneremo diffusamente sugli alberi nel prossimo capitolo; per il momento proviamo il seguente fatto elementare.

Lemma 1.4. *Un albero con due o più vertici ha almeno due vertici di grado 1.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un albero con almeno due vertici (e quindi, essendo connesso, almeno un lato), e sia $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ un cammino semplice in G di lunghezza massima possibile. Poiché in G non vi sono cicli, $v_0 \neq v_n$, e v_0, v_n sono vertici di grado 1. Infatti se così non fosse e, ad esempio, v_n avesse grado almeno 2, esisterebbe un altro lato $e = \{v_n, w\}$ (con $w \neq v_{n-1}$) incidente a v_n . Ma allora, per la massimalità del cammino semplice scelto, la sequenza $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n e w$ non è un cammino semplice, e dunque $w = v_i$ per un $0 \leq i \leq n-2$ (che è unico perché il cammino iniziale è semplice). Ma allora si avrebbe in G il circuito semplice $v_i e_{i+1} \dots v_{n-1} e_n v_n e w = v_i$, e quindi una contraddizione. ■

Esercizio 1.6. Provare che ogni grafo con 2 o più vertici ha almeno due vertici dello stesso grado.

Esercizio 1.7. Dire se esistono grafi le cui sequenze dei gradi dei vertici sono, rispettivamente:

$$(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5), \quad (1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 7), \quad (1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5).$$

Esercizio 1.8. Sia $G = (V, E)$ un grafo regolare 3-valente. Si provi che $|V|$ è pari. Si provi che per ogni numero pari n esiste un grafo connesso regolare 3-valente con n vertici. Si provi che, a meno di isomorfismo, esistono due grafi 3-regolari con 6 vertici.

Esercizio 1.9. Siano v, w vertici distinti di un grafo G . Si provi che se esiste un cammino in G da v a w , allora esiste anche un cammino semplice da v a w .

Esercizio 1.10. Si dimostri che ogni grafo connesso 2-regolare con n vertici è isomorfo al ciclo C_n .

1.3 Cammini euleriani e hamiltoniani.

Cammini e circuiti euleriani. I grafi sono spesso associati alla matematica ricreativa ed ai cosiddetti "rompicapo", problemi di natura logico-matematica la cui formulazione ricorre (in modo spesso forzatamente immaginifico) a situazioni reali o, almeno, realisticheggianti, e può essere compresa anche senza una specifica preparazione teorica. Questa propensione antielitaria è presente nella teoria dei grafi sin dal suo ingresso ufficiale nella matematica, avvenuto nel 1736, anno della pubblicazione negli atti dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo di una memoria di Leonardo Eulero, nella quale egli affrontava e risolveva il famoso

Problema dei ponti di Königsberg. La città di Königsberg (oggi Kaliningrad) nella Prussia Orientale (oggi un enclave russa tra la Polonia e la Lituania) sorge alla foce del fiume Pregel, che in quel punto forma due isole. Nel settecento le varie parti della città erano collegate da un sistema di sette ponti (figura 1.17), ed era costume delle famiglie borghesi del tempo (tra cui immaginiamo la famiglia Kant con il piccolo Immanuel che ancora succhia un lecca-lecca) recarsi a passeggiare, nelle domeniche di bel tempo, lungo le rive del fiume e le sue isole.

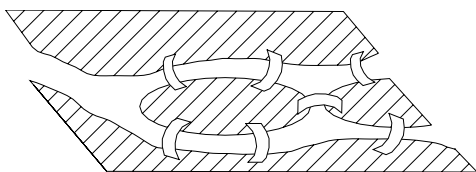


Figura 1.17: i ponti di Königsberg...

Assieme ai cittadini, circolava anche il problema seguente: è possibile fare una passeggiata che partendo ed arrivando nello stesso luogo porti ad attraversare una ed una sola volta tutti e sette i ponti di Königsberg?

Sia $G = (V, E, \phi)$ un multigrafo. Un cammino $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m$ in G si dice **euleriano** se $\{e_1, \dots, e_m\} = E$ (ricordiamo che i lati che compongono un cammino sono per definizione tutti distinti). Similmente, un circuito si dice euleriano se l'insieme dei lati che lo compongono è tutto E . Un grafo in cui esiste un circuito euleriano si chiama **grafo euleriano**.

Il problema dei ponti di Königsberg è dunque quello dell'esistenza di un circuito euleriano nel multigrafo in figura.

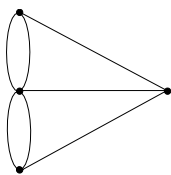


Figura 1.18: ... il loro multigrafo.

La risposta di Eulero (del tutto generale) costituisce, come detto, il primo teorema di teoria dei grafi nella storia della matematica occidentale.

Teorema 1.5. (Eulero). *Un multigrafo privo di vertici isolati è euleriano se e soltanto se è connesso ed ogni suo vertice ha grado pari.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un multigrafo privo di vertici isolati.

Se G è euleriano è ovvio che G è connesso. Inoltre, per ciascun vertice v , un fissato circuito euleriano di G attraversa una ed una sola volta tutti i lati incidenti a v ; poiché ogni volta che il circuito tocca v deve arrivare e uscire per due lati distinti (se v è il vertice iniziale, il circuito inizia e si chiude in v con due lati diversi), si conclude che il grado di v è pari.

Viceversa, supponiamo che G sia connesso e che tutti i suoi vertici abbiano grado pari. Proviamo che G ha un circuito euleriano per induzione sul numero m di lati di G (osserviamo che $m \geq 2$). Se $m = 2$, allora G è un multigrafo costituito da due vertici connessi da due lati, e quindi ammette banalmente un cammino euleriano. Sia $m \geq 3$. Allora, poiché ogni vertice di G ha grado almeno 2, G non è un albero (se G fosse un albero, non avrebbe alcun lato multiplo e quindi, per il Lemma 1.4, avrebbe dei vertici di grado 1); quindi G ammette dei circuiti. Sia \mathcal{C} un circuito di G con il massimo numero possibile di lati e supponiamo, per assurdo, che \mathcal{C} non sia euleriano (cioè che non comprenda tutti i lati di G). Allora, il multigrafo $G - \mathcal{C}$, ottenuto da G togliendo tutti i lati di \mathcal{C} , non è formato da soli vertici isolati, e ha pertanto una componente connessa Δ non banale. Ora, poiché nel ricavare $G - \mathcal{C}$ abbiamo tolto i lati di un circuito, e dunque per ciascun vertice v di G , abbiamo tolto un numero pari (eventualmente zero) di lati incidenti a v , ne segue in particolare che in Δ tutti i vertici hanno grado pari e quindi, per ipotesi induttiva, esiste un circuito euleriano \mathcal{D} in Δ . Ora, siccome G è connesso, almeno un vertice a del circuito \mathcal{C} appartiene a Δ (e quindi compare in \mathcal{D}). Ora, percorrendo il circuito \mathcal{C} , a partire da un suo vertice qualsiasi, sino al vertice a , poi percorrendo tutto \mathcal{D} fino a tornare ad a , e quindi riprendendo il tratto non ancora percorso di \mathcal{C} , si ottiene un circuito in G (dato che i lati di Δ , e quindi quelli che formano \mathcal{D} , non compaiono in \mathcal{C}) di lunghezza maggiore di \mathcal{C} , e questo va contro la scelta di \mathcal{C} . Pertanto \mathcal{C} è un circuito euleriano. ■

Un semplice adattamento della dimostrazione precedente consente di completare il risultato di Eulero al caso dei cammini euleriani.

Teorema 1.6. *Un grafo G privo di vertici isolati ha un cammino euleriano non chiuso se e soltanto se G è connesso ed ha esattamente due vertici dispari. In tal caso caso, se u e v sono i due vertici dispari u e v , allora tutti i cammini euleriani di G iniziano e terminano in u e v .*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. (suggerimento: se u e v sono i due vertici dispari, aggiungere al grafo un nuovo vertice a e due archi, quindi applicare il Teorema precedente.) ■

Come prima applicazione, osserviamo che un grafo regolare k -valente è euleriano se e soltanto k è pari. In particolare il grafo completo K_n (che è regolare di grado $n - 1$) è euleriano se e solo se n è dispari. Se n è pari, togliendo opportunamente $n/2$ lati (ad esempio, se K_n è disegnato sui vertici di un n -agono regolare, si possono togliere uno sì e uno no i lati del perimetro) si ottiene un grafo euleriano. Quindi, se n è pari, K_n ha un circuito di lunghezza $\binom{n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$; e questa (lo si provi) è la massima lunghezza di un circuito di K_n .

Cicli e grafi hamiltoniani. Un circuito euleriano attraversa una ed una sola volta ogni arco di un grafo. Il problema duale (solo apparentemente simile, ma molto più difficile)

ovvero lo stabilire se un certo grafo ammette un circuito che passa una ed una sola volta per ogni vertice, ha anch'esso una data di nascita precisa: il 1859, quando sir William Rowan Hamilton propose (e, pare, cercò anche di commercializzare) il seguente rompicapo:

Problema del viaggiatore sul dodecaedro. Ai venti vertici di un dodecaedro regolare sono assegnati i nomi di altrettante città famose. È possibile per un viaggiatore che parta da un dato vertice-città, visitare una e una sola volta tutte le città, trasferendosi lungo gli spigoli del dodecaedro, e facendo alla fine ritorno alla città di partenza?

Il problema si traduce in termini di grafi (cosa che lo stesso Hamilton suggerì) nel modo seguente: esiste un circuito semplice nel grafo del dodecaedro (vedi Figura 1.7) che passa (una ed una sola volta) per tutti i vertici del grafo? (la risposta è sì).

Per affrontare questo e simili problemi, si comincia con il formalizzare il concetto di cammino che passa (una e una sola volta) per tutti i vertici.

Sia quindi $G = (V, E)$ un grafo. Un cammino $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_n v_n$ in G si dice **hamiltoniano** se è semplice e $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} = V$. Similmente, un circuito di G si dice hamiltoniano se è semplice (cioè è un ciclo) e l'insieme dei vertici che lo compongono è tutto V . Un grafo in cui esiste un ciclo hamiltoniano si chiama **grafo hamiltoniano**. In altre parole, un grafo con n vertici è hamiltoniano se e solo se contiene un sottografo isomorfo al ciclo C_n .

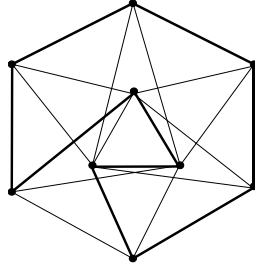


Figura 1.19: un ciclo hamiltoniano

Mentre è facile implementare un programma efficiente (qualsiasi cosa questo ragionevolmente significhi) che, utilizzando il teorema 1.5, stabilisce se un grafo è euleriano, in generale decidere se un dato grafo ammetta un ciclo (o anche un cammino) hamiltoniano è un problema molto più difficile. Di fatto, non si conosce alcuna caratterizzazione dei grafi hamiltoniani analoga a quella vista per i grafi euleriani, né si sa che non esiste (anche se la cosa è improbabile: per chi ha un poco di dimestichezza con la teoria della complessità, citiamo che è stato dimostrato che il problema di decidere se un grafo è hamiltoniano è NP-completo).

Questa questione ha da sempre attirato l'interesse di diversi studiosi, e sono stati ottenuti vari risultati i quali assicurano che, sotto condizioni di solito abbastanza specifiche, certi grafi sono (o non sono) hamiltoniani. Uno dei più semplici è il seguente, dovuto a O. Ore (1960). Prima di enunciarlo, osserviamo che, banalmente, ogni grafo completo è hamiltoniano.

Teorema 1.7. (Ore). *Sia G un grafo con n vertici, tale che per ogni coppia di vertici v, w non adiacenti si ha $d_G(v) + d_G(w) \geq n$. Allora G è hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un grafo con n vertici che soddisfa all'ipotesi del Teorema.

Se $n = 1$ non c'è nulla da provare (osserviamo che un grafo con un solo vertice, o più in generale un qualsiasi grafo completo, soddisfa la condizione dell'enunciato, dato che *non ci sono* coppie di vertici non adiacenti). Supponiamo quindi $n \geq 2$, e procediamo per induzione sul numero t di coppie (non ordinate) di vertici non adiacenti di G . Se $t = 0$ allora G è un grafo completo e dunque, per quanto osservato sopra, ammette un cammino hamiltoniano. Sia quindi $t \geq 1$. Allora esistono in G due vertici non adiacenti u e w . Consideriamo il grafo G' ottenuto da G aggiungendo il lato $e = \{u, w\}$. Chiaramente G' , che ha lo stesso numero di vertici di G e un lato in più, soddisfa le ipotesi del teorema. Ora, G' ha una coppia in meno di vertici non adiacenti, e dunque, per ipotesi induttiva, esiste un ciclo hamiltoniano \mathcal{C} di G' . Poiché G' ha gli stessi vertici di G , se \mathcal{C} non contiene il lato aggiunto e , allora è un ciclo hamiltoniano anche di G . Supponiamo quindi che il lato $e = e_1$ appartenga al ciclo \mathcal{C} . Il resto del ciclo, $w = v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n = u$, è un cammino hamiltoniano in G . Poniamo

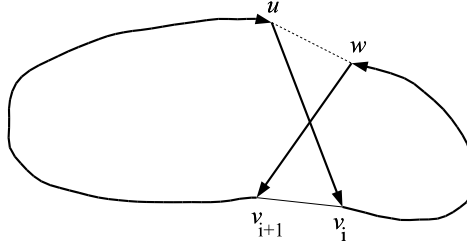
$$A = \{ v_i \mid 1 \leq i \leq n, u \text{ è adiacente in } G \text{ a } v_i \}$$

$$B = \{ v_i \mid 1 \leq i \leq n-1, w \text{ è adiacente in } G \text{ a } v_{i+1} \}.$$

Poiché $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è l'insieme di tutti i vertici di G , si ha $|A| = d_G(u)$, $|B| = d_G(w)$. Quindi, per ipotesi, $|A| + |B| \geq n$. Ora, $u \notin A \cup B$, e dunque

$$|A \cup B| \leq n - 1 < |A| + |B|.$$

Da ciò segue $A \cap B \neq \emptyset$. Sia $v_i \in A \cap B$; allora $\{w, v_{i+1}\}$ e $\{u, v_i\}$ sono lati di G .



Partendo da w , facendo seguire il lato $\{w, v_{i+1}\}$ (vedi la figura), percorrendo poi il circuito \mathcal{C} da v_{i+1} fino ad u , quindi facendo seguire il lato $\{u, v_i\}$, ed infine percorrendo \mathcal{C} a ritroso da v_i a w (vedi figura) si ottiene un ciclo hamiltoniano di G . ■

Il Teorema di Ore è un raffinamento di un celebre risultato di G. Dirac (1954), che possiamo ricavare come immediato corollario.

Corollario 1.8. *Sia G un grafo su n vertici e tale che $d_G(v) \geq n/2$ per ogni vertice v . Allora G è hamiltoniano.*

Per citare (senza dimostrarlo) un esempio di un risultato più recente, ma di simile natura, peschiamo più o meno dal mazzo un bel teorema di B. Jackson (1980). Un grafo si dice 2-connesso se ogni coppia di vertici distinti appartiene a qualche ciclo del grafo.

Teorema 1.9. (Jackson) *Sia G un grafo 2-connesso d -regolare con n vertici. Se $d \geq n/3$ allora G è hamiltoniano.*

Osserviamo che il grafo di Petersen è 3-regolare e 2-connesso, ma non è hamiltoniano, e verifica $d = (n - 1)/3$. Chiaramente, la 2-connessione è una condizione necessaria per l'esistenza di un ciclo hamiltoniano; il seguente esempio è un grafo regolare 4-valente con $n = 11$ vertici (che soddisfa quindi $d \geq n/3$) ma che non è 2-connesso:

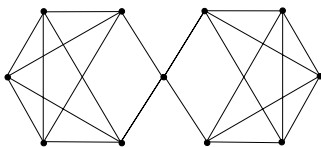
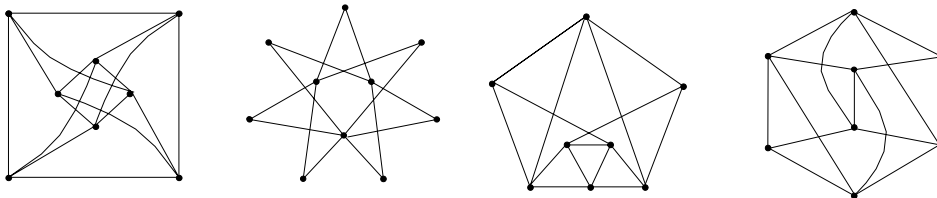


Figura 1.20: un grafo regolare non 2-connesso

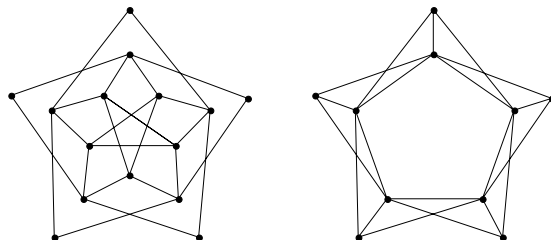
Esercizio 1.11. Si dica quali tra i seguenti grafi ammette un circuito euleriano, e in tali casi si trovi esplicitamente un tale circuito. Nei rimanenti casi si dica qual è la massima lunghezza di un circuito percorribile nel grafo.



Esercizio 1.12. È possibile tracciare una (e una sola) diagonale su ogni faccia di un cubo in modo che il grafo che si ottiene (i vertici sono quelli del cubo, ed i lati gli spigoli del cubo e le diagonali aggiunte) sia euleriano?

Esercizio 1.13. Si provi che il grafo del dodecaedro è hamiltoniano. Si provi che il grafo di Petersen non è hamiltoniano (si osservi che la figura 1.12 mostra che il grafo di Petersen ammette un ciclo di lunghezza 9).

Esercizio 1.14. Si dica quali tra i seguenti grafi sono hamiltoniani.



Esercizio 1.15. Sia G un grafo con n vertici e sia $\kappa = \kappa(G)$ la lunghezza massima di un cammino semplice di G . Si provi che aggiungendo a G al più $n - \kappa$ opportuni lati si ottiene un grafo hamiltoniano (si faccia induzione su $n - \kappa$).

Digressione: il problema del commesso viaggiatore. Il viaggiatore ottocentesco, un po' astratto e libero dalla necessità di lavorare, di sir W. R. Hamilton, e che immaginiamo nella biblioteca di palazzo, avvolto nella sua più comoda veste da camera, con un bicchierino di sherry in mano, serenamente intento a programmare il suo *grand tour* contemplando un mappamondo dodecaedrico, è oggi diventato un *commesso viaggiatore*.

Come tale, deve visitare in successione, e tornando al termina al luogo di partenza, un certo numero n di città, e intende (o è tenuto a) eseguire il proprio compito con la minore spesa possibile (in tempo, o in denaro, o rispettivamente a qualsiasi parametro quantificabile che può essere inteso come "prezzo da pagare"). Quindi valuta inizialmente, per ogni coppia di città distinte, il costo del trasferimento da una all'altra (che per semplicità assumiamo non dipendere dal verso di percorrenza). La situazione si rappresenta mediante un grafo completo su n vertici (il numero di città) in cui ad ogni lato è assegnato un costo (o *peso*); ed il problema del commesso viaggiatore è quello di come in modo efficiente decidere, tra tutti i circuiti che toccano tutti i vertici, uno di peso totale minimo. Se assumiamo che il commesso viaggiatore non possa ripassare per una città già visitata (se non per tornare alla fine a quella di partenza), il problema è quindi quello di trovare, in un grafo completo i cui lati sono pesati, un circuito hamiltoniano di peso totale minimo. Questo problema contiene quello di stabilire se un dato grafo G sia hamiltoniano. Infatti, si aggiungono a G tutti i lati che congiungono vertici di esso non adiacenti, in modo da ottenere un grafo completo sullo stesso insieme di vertici; quindi si assegna un peso 0 ai lati originari di G ed un peso 1 a quelli aggiunti. G è hamiltoniano se è solo se esiste, nel grafo completo che lo estende, un circuito hamiltoniano di peso totale 0.

Da quanto abbiamo detto dei grafi hamiltoniani, è intuibile come tale problema sia, allo stato attuale, intrattabile. La questione non è quella dell'esistenza di un algoritmo che determini un ciclo hamiltoniano di peso minimo, ma quella dell'esistenza di un algoritmo "efficiente". Non è nostro compito discutere qui e definire con maggior precisione cosa si intenda per efficienza di un algoritmo; ma proviamo a darne un'idea dicendo perché l'algoritmo ovvio non è tale. L'algoritmo "ovvio" consiste nel considerare tutti i possibili cicli hamiltoniani del grafo completo (ce n'è un numero finito, dato che il numero di vertici è finito), calcolare il peso totale di ognuno, e scegliere quello di peso minimo. Ora, in un grafo completo K_n , ogni sequenza degli n -vertici (in cui ciascuno compare una ed una sola volta) è la sequenza dei vertici di un ciclo hamiltoniano (che si chiude al primo vertice della sequenza); se fissiamo il vertice iniziale v_1 dei cicli, c'è quindi una corrispondenza biunivoca tra i cicli hamiltoniani in K_n e i modi per disporre i rimanenti $n - 1$ vertici. Dunque il numero di cicli hamiltoniani in K_n è pari al numero di permutazioni degli $n - 1$ vertici diversi da v_1 , quindi è $(n - 1)!$. Il nostro algoritmo "ovvio" richiede pertanto un numero di passi che cresce, al crescere del numero n di vertici, come $n!$, e quindi diventa rapidamente un numero intrattabile per qualsiasi elaboratore. Una delle richieste ragionevoli affinché un algoritmo sia considerato (almeno dal punto di vista teorico) efficiente, è che il numero complessivo di operazioni necessarie a produrre un output sia limitato in modo polinomiale rispetto ai parametri in input. Nel nostro caso, un algoritmo è efficiente se esiste una costante intera c , tale che il numero totale di operazioni è limitato da n^c , dove n è il numero di vertici del grafo che si pone in input.

Nel caso del problema del commesso viaggiatore, non è ancora stato trovato (né è stato provato che non esiste) un algoritmo deterministico che sia "migliore" di quello ovvio (sia detto in senso teorico: è intuibile come siano stati proposti diversi accorgimenti che, per grafi non troppo grandi, funzionano da un punto di vista pratico molto meglio dell'algoritmo

ovvio). Si tratta di una questione che, se risolta (in positivo o in negativo) avrebbe comunque delle conseguenze (teoriche e pratiche) di estrema importanza.

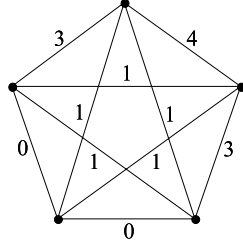


Figura 1.21: il grafo K_5 con pesi

L'esempio della figura 1.21 dovrebbe perlomeno convincere che un algoritmo di tipo *greedy* (ovvero un algoritmo che ad ogni passo effettua la scelta 'migliore' a quel passo, senza tener conto di ciò che potrebbe avvenire dopo) non funziona: i lati disegnati all'interno hanno tutti peso 1, mentre quelli sul perimetro hanno il peso indicato dal numero accanto; c'è un solo ciclo hamiltoniano di peso minimo, che è quello che utilizza tutti e soli i lati che formano la stella interna, ed ha peso 5: in questo caso la scelta "greedy" (che partirebbe con i due archi di peso 0) si rivela sbagliata sin dal primo passo.

Vista la difficoltà del problema generale, un approccio alternativo è quello di cercare algoritmi efficienti che trovino soluzioni "approssimate" (non specifichiamo in che senso), oppure che "con buona probabilità" trovino un ciclo di peso minimo. Ma anche qui ci fermiamo.

Esercizio 1.16. Sia K_6 il grafo completo su sei vertici, e siano i vertici numerati da 1 a 6; si assegni poi ad ogni vertice $e = \{n, m\}$ ($n \neq m$) il peso $c(e) = \min\{n, m\}$. Si dica (provando l'affermazione senza fare tutti i tentativi) qual è il peso totale minimo di un cammino hamiltoniano in tale grafo.

1.4 Alcuni invarianti fondamentali.

In questa breve sezione introduciamo alcuni dei principali invarianti (in questo caso, si tratta di interi positivi) per grafi (finiti). Per ora, si tratta soltanto di fare nuove conoscenze; il significato di tali indicatori numerici nell'indirizzare diversi argomenti di studio emergerà più compiutamente nel seguito. Anche se quasi tutto quel che segue può facilmente essere definito per i multigrafi, ci limiteremo, per semplicità, al caso dei grafi.

Distanza e diametro. Sia G un grafo connesso, e siano u, v vertici di G ; definiamo la *distanza* tra u e v come la lunghezza minima di un cammino tra u e v , e la denotiamo con $d_G(u, v)$. Il *diametro* di un grafo connesso $G = (V, E, \phi)$ è quindi la massima distanza che intercorre tra i suoi vertici:

$$\text{diam}(G) = \sup\{d_G(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Assegnata in questo modo una distanza sul grafo connesso G , risulterà utile il concetto di *palla* e di *sfera*. Si tratta di quello familiare: per ogni $v \in V$ e $1 \leq k \in \mathbb{N}$ si definisce la palla di centro v e raggio k come l'insieme

$$B_G(v, k) = \{x \in V \mid d_G(v, x) \leq k\}$$

Chiaramente, ogni grafo completo K_n ha diametro 1; anzi, un grafo connesso è completo se e soltanto se ha diametro 1. Quando però si passa a considerare grafi connessi di diametro almeno 2 la faccenda si complica notevolmente: non è possibile dare una classificazione soddisfacente nemmeno per quelli di diametro 2, anche assumendone la regolarità. Dal lato opposto, è intuibile che un grafo in cui i gradi dei vertici sono “piccoli” abbia un diametro “grande” (nel capitolo 5 preciseremo questa affermazione); ad esempio si vede facilmente che $\text{diam}(C_n) = \lceil n/2 \rceil$.

Calibro. Sia G un grafo; si chiama **calibro** di G (in inglese: *girth*) la lunghezza minima di un ciclo (non banale) contenuto in G ; esso è di solito denotato con $g = g(G)$.

Ad esempio, un grafo completo con almeno 3 vertici (o comunque un grafo che contenga un triangolo) ha calibro 3, mentre il grafo del cubo (figura 1.15) ha calibro 4; il grafo del dodecaedro e il grafo di Petersen hanno calibro 5 (lo si verifichi). Per quanto riguarda gli alberi (che non hanno alcun ciclo), si conviene di dire che non hanno calibro, oppure (come preferiamo) che hanno calibro infinito. Grafi con calibro grande sono, in un senso deliberatamente vago, “sparsi”, il che spesso li rende appetibile nelle applicazioni. Il concetto opposto (ma, forse, meno importante) è quello di *circonferenza* di un grafo G , che indica la lunghezza massima di un ciclo di G .

Numero cromatico. Una *colorazione* (dei vertici) di un grafo G è una assegnazione di un colore a ciascun vertice di G in modo che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore (in altri termini: in modo che gli estremi di ogni lato siano colorati con colori diversi). Detto in modo formale, una colorazione di $G = (V, E)$ è una applicazione $\gamma : V \rightarrow S$, dove S è un insieme non vuoto (i cui elementi sono detti *colori*), tale che per ogni $u, v \in V$, se u e v sono adiacenti allora $\gamma(u) \neq \gamma(v)$.

Sia $1 \leq k \in \mathbb{N}$; un grafo G si dice k -colorabile se esiste una colorazione di G con k colori. Banalmente, un grafo è 1-colorabile se e solo se non contiene alcun arco. Un grafo è 2-colorabile se l'insieme dei suoi vertici si può decomporre come l'unione di due sottoinsiemi disgiunti tali che nessun arco ha entrambi gli estremi appartenenti allo stesso sottoinsieme (Si tratta dei *grafi bipartiti*, che studieremo nel prossimo capitolo). Più in generale, è chiaro che un dire che un grafo è k -colorabile equivale a dire che ammette una k -partizione dell'insieme dei vertici con tale proprietà.

È ovvio che ogni grafo finito G ammette una colorazione con un numero finito di colori, ed è altresì ovvio che esiste un numero *minimo* di colori mediante i quali è possibile colorare G : tale numero è detto **numero cromatico** di G e si indica con $\chi(G)$. Dunque, dato un grafo G , $\chi(G) = k$ se e solo se G è k -colorabile e non è $(k-1)$ -colorabile.

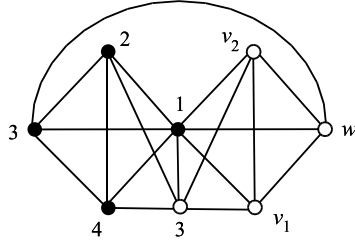
Ad esempio, è chiaro che $\chi(K_n) = n$ (dove K_n è il grafo completo con n vertici), ed è piuttosto facile vedere che, se C_n è il ciclo di lunghezza n , si ha

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad (1.1)$$

Il numero cromatico del grafo di Petersen è 3 (lo si dimostri), mentre quello del grafo del cubo è 2 (si veda, più avanti, la figura 2.10).

Per provare che un grafo ha numero cromatico k , occorre in sostanza provare due cose: che esiste una colorazione di mediante k colori, e che non è possibile colorare il grafo con meno di k colori.

Consideriamo, ad esempio il seguente grafo



La figura mostra una possibile colorazione con 5 colori (rappresentati da numeri), dove i vertici v_1, v_2, w hanno, rispettivamente, colori 4, 2 e 5. Supponiamo ora di voler colorare il grafo con 4 colori $\{1, 2, 3, 4\}$; allora è chiaro che, essendo a due a due adiacenti, i vertici segnati in nero devono avere colori diversi, che indichiamo con 1, 2, 3, 4 come nella figura. Il vertice in basso al centro, adiacente ai vertici già colorati con 1, 2, 4 deve pertanto avere colore 3 (come nella figura). Ora, i vertici v_1 e v_2 non possono essere colorati con 3 e nemmeno con 1, inoltre devono avere colori diversi; quindi i loro colori devono essere 2 e 4, il che forza ad assegnare al vertice w il colore 3, e questo non è consentito dato che w è adiacente al vertice di colore 3 all'estremità sinistra del grafo.

Chiaramente, il numero cromatico di un grafo è maggiore o uguale a quello di ogni suo sottografo; e, come anche suggerito dall'esempio di sopra, un limite inferiore al numero cromatico di un grafo è certamente dato dall'esistenza di sottografi completi: se infatti G contiene un sottografo isomorfo al grafo completo K_n , allora $\chi(G) \geq \chi(K_n) = n$. D'altra parte, tale limite è in generale lontano dall'effettivo valore di $\chi(G)$: esistono grafi privi di triangoli il cui numero cromatico è arbitrariamente grande (come vedremo più avanti). Più in generale, Erdős e Lovász hanno dimostrato, con metodi probabilistici, che per ogni $k, g \geq 4$ esiste un grafo con calibro g e numero cromatico k .

Indice di stabilità. Un sottoinsieme S dell'insieme dei vertici di un grafo G si dice *stabile* (o *indipendente*) se nessuna coppia di elementi di S è adiacente in G . L'*indice di stabilità* (o *indice di indipendenza*) di un grafo G è la massima cardinalità di un suo sottoinsieme stabile di vertici; lo denoteremo con $\alpha(G)$ (quindi, $\alpha(G)$ è il massimo intero n tale che il grafo complementare \overline{G} contiene un sottografo completo K_n). È immediato che $\alpha(G) = 1$ se e soltanto se G è un grafo completo; mentre nel caso dei cicli si ha (lo si dimostri),

$$\alpha(C_n) = \lceil n/2 \rceil \quad (1.2)$$

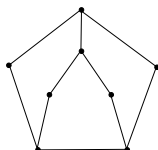
(parentesi quadre denotano la parte intera). L'indice di stabilità del grafo di Petersen è 4. C'è un semplice legame tra indice di stabilità e numero cromatico; infatti, se il grafo G ammette una colorazione allora l'insieme (chiamiamolo X) dei vertici di uno stesso colore è,

per definizione, un sottoinsieme stabile di G , e dunque $|X| \leq \alpha(G)$. da questa osservazione segue subito il fatto seguente.

Proposizione 1.10. *Sia G un grafo con n vertici. Allora $\alpha(G)\chi(G) \geq n$.*

Abbiamo così introdotto solo alcuni tra i principali invarianti numerici mediante i quali si cerca di descrivere i grafi, e che approfondiremo nel seguito. Altri, come quelli riguardanti misure di connettività (di cui la 2-connessione nel Teorema 1.9 è un caso), li incontreremo più avanti.

Esercizio 1.17. Si determini il diametro del seguente grafo. Qual è il minimo numero di lati che occorre aggiungere in modo da ottenere un grafo di diametro 2?



Esercizio 1.18. Per ogni $n \geq 2$, sia $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Sia quindi $B_n = (V, E)$ il grafo con $V = I_n$, e per $a, b \in V$, $\{a, b\} \in E$ se e solo se $a - b$ è dispari. Si provi che B_n è connesso, che ha diametro 2, e che è regolare se e soltanto se n è pari.

Esercizio 1.19. Sia G un grafo connesso di diametro q e calibro g . Si provi che, se G non è un albero, $g \leq 2q + 1$.

Esercizio 1.20. Si provi che il grafo di Grötzsch ha numero cromatico 4.

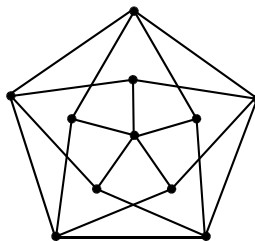


Figura 1.22: il grafo di Grötzsch

Esercizio 1.21. Si determini il numero cromatico e l'indice di stabilità dei grafi dei solidi regolari (figura 1.15).

Esempio: i grafi di Kneser. Illustriamo alcune delle definizioni date in questa e nelle precedenti sezioni esaminando una classe di grafi piuttosto interessante, quella appunto dei grafi di Kneser.

Siano $1 \leq k < n$, con $n \geq 2k$. Il grafo di Kneser $K(n, k)$ è il grafo i cui vertici sono tutti i sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (quindi il numero dei vertici è $\binom{n}{k}$),

e due vertici sono adiacenti se e solo se la loro intersezione è vuota. Chiaramente, $K(n, 1)$ coincide con il grafo completo K_n ; quindi i casi interessanti si hanno per $k \geq 2$, cosa che implicitamente assumeremo da qui in avanti.

Esercizio 1.22. Si provi che il grafo di Kneser $K(5, 2)$ è isomorfo al grafo di Petersen.

Fissati n, k come sopra, sia $I = \{1, 2, \dots, n\}$ e $K = K(n, k)$ il grafo di Kneser (l'insieme dei vertici di K è quindi $I^{[k]}$). Sia $\sigma \in I^{[k]}$ un vertice di K ; allora i vertici adiacenti a σ in K sono tutti e soli i sottoinsiemi di ordine k dell'insieme complementare $I \setminus \sigma$. Quindi il grado di σ è

$$d_K(\sigma) = \binom{n-k}{k}$$

che non dipende da σ . Dunque K è regolare di grado $\binom{n-k}{k}$. Poiché il numero dei vertici è $\binom{n}{k}$, concludiamo per (1.1) che il numero di archi di $K = K(n, k)$ è

$$\frac{1}{2} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k}.$$

Studiamo ora il calibro $g(K)$ di $K = K(n, k)$, con $k \geq 2$. Se $n = 2k$, K è un insieme di $\frac{1}{2} \binom{n}{k}$ archi a due a due non adiacenti (cioè, K non è connesso, ed ogni componente connessa è composta da un solo arco) e non ha calibro.

Se $n \geq 3k$, allora esistono tre elementi di $I^{[k]}$ che sono a due a due disgiunti e che quindi costituiscono i vertici di un triangolo in K , dunque $g(K) = 3$.

Supponiamo ora $2k+1 < n < 3k$. Consideriamo i seguenti elementi di $I^{[k]}$: $\sigma_0 = \{1, 2, \dots, k\}$, $\sigma_1 = \{k+1, k+2, \dots, 2k\}$, $\sigma_2 = \{2, \dots, k, 2k+2\}$, $\sigma_3 = \{k+2, \dots, 2k, 2k+1\}$; allora $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0$ sono i vertici di un ciclo di lunghezza 4 in K ; poichè in questo caso non esistono cicli di lunghezza 3 (dato che non esistono tre elementi di $I^{[k]}$ a due a due disgiunti), si conclude che $g(K) = 4$.

Sia, infine, $n = 2k+1$. Se $k = 2$, K è il grafo di Petersen ed ha calibro 5. Sia quindi $k \geq 3$. Si verifica allora che K non ha cicli di lunghezza 5 o meno (lo si dimostri per esercizio), e che i vertici

$$\begin{array}{lll} \{1, 2, \dots, k\}, & \{k+2, \dots, 2k, 2k+1\}, & \{2, \dots, k, k+1\}, \\ \{1, k+2, \dots, 2k\}, & \{2, \dots, k, 2k+1\}, & \{k+1, \dots, 2k\}, \end{array}$$

sono i vertici consecutivi di un 6-ciclo di K .

Riassumendo, abbiamo provato che, se $n \geq 2k+1$,

$$g(K(n, k)) = \begin{cases} 5 & \text{se } (n, k) = (5, 2) \\ 6 & \text{se } n = 2k+1, k \geq 3 \\ 4 & \text{se } 2k+1 < n < 3k \\ 3 & \text{se } n \geq 3k \end{cases} \quad (1.3)$$

Determinare il diametro dei grafi di Kneser è meno immediato; recentemente, è stato provato che (per $n > 2k$)

$$\text{diam}(K(n, k)) = \left\lceil \frac{k-1}{n-2k} \right\rceil + 1. \quad (1.4)$$

Dove per ogni numero reale a , $\lceil a \rceil$ denota il minimo numero intero maggiore o uguale ad a .

Per quanto riguarda il numero cromatico, ci fermiamo alla seguente limitazione. Sia ancora $K = K(n, k)$ con $n \geq 2k + 1$, e $V = \{1, 2, \dots, n\}^{[k]}$ l'insieme dei vertici di K . Per ciascun $i = 1, \dots, n - 2k + 1$, sia $X_i = \{\sigma \in V \mid \min \sigma = i\}$, e sia $X_\infty = \{\sigma \in V \mid \min \sigma > n - 2k + 1\}$; quindi

$$V = X_1 \cup \dots \cup X_{n-2k+1} \cup X_\infty \quad (1.5)$$

(dove l'unione è disgiunta). Ora, per $i = 1, \dots, n - 2k + 1$, ogni elemento di X_i , visto come sottoinsieme di $\{1, 2, \dots, n\}$, contiene i e dunque X_i è stabile; lo stesso è vero per X_∞ , infatti X_∞ coincide con l'insieme dei sottoinsiemi di ordine k dell'insieme $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$, la cui cardinalità è $2k - 1$; pertanto ogni coppia di elementi di X_∞ ha intersezione non banale, e dunque X_∞ è stabile. Quindi la partizione (1.5) è in sottoinsiemi stabili; assegnando un colore ad ognuno di essi si ottiene una colorazione di K . In conclusione,

$$\chi(K) \leq n - 2k + 2. \quad (1.6)$$

Osserviamo anche che $\alpha(K) \geq |X_1| = \binom{n-1}{k-1}$. Che il numero cromatico di $K(n, k)$ sia effettivamente $n - 2k + 2$ fu congetturato da Kneser nel 1955, è stato provato da Lovasz nel 1972, e la dimostrazione è tutt'altro che banale. Così come non è banale provare che $\binom{n-1}{k-1}$ è l'indice di stabilità di $K(n, k)$ (un risultato dovuto a Erdős, Ko e Rado)

I grafi di Kneser e le loro generalizzazioni sono tuttora un attivo oggetto di studio. In particolare, è ancora aperta la congettura che (per $n \geq 2k + 1$), ogni grafo di Kneser, con l'esclusione del grafo di Petersen $K(5, 2)$, è hamiltoniano (questo fatto è stato provato per $n \geq 3k$).

1.5 Esercizi e complementi.

Esercizio 1.23. Ciascuno dei sette agenti segreti 001, 002, \dots , 007 è incaricato di controllare l'operato di tre dei suoi colleghi. Si dimostri che almeno uno dei sette agenti non è controllato dagli stessi tre colleghi che egli controlla.

Esercizio 1.24. Prescindendo da qualsiasi limitazione di natura chimico-fisica o di orientazione, dire quante sono le possibili diverse molecole con formula chimica H_4C_2O in cui tutti i legami atomici sono semplici. Quante sono se si ammettono anche legami bivalenti? (si ricordi che atomi di idrogeno, carbonio e ossigeno hanno, rispettivamente, valenza 1, 4 e 2).

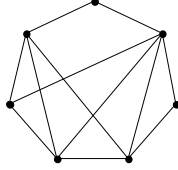
Esercizio 1.25. Sia G un grafo connesso in cui ogni vertice è pari. Si provi che per ogni lato e di G , il sottografo $G - e$ è connesso.

Esercizio 1.26. Sia G un grafo con n vertici e tale che per ogni coppia di vertici v, w non adiacenti si ha $d_G(v) + d_G(w) \geq n - 1$. Si provi che G è connesso.

Esercizio 1.27. Sia G un grafo con n vertici e tale che il suo grafo complementare \overline{G} sia isomorfo a G . Si dica quanti lati ha G (in funzione di n), mostrando inoltre che si ha $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Si costruiscano grafi con 4 e con 5 vertici che siano isomorfi al loro grafo complementare.

Esercizio 1.28. Sia G un grafo non connesso. Si provi che il suo grafo complementare è connesso. Sia $G = (V, E)$ un grafo con n vertici. Si provi che se $|E| > \binom{n-1}{2}$ allora G è connesso. Cosa si può dire se $|E| = \binom{n-1}{2}$?

Esercizio 1.29. Qual è il minimo numero di lati che è necessario aggiungere al seguente grafo per ottenere un grafo euleriano?



Esercizio 1.30. Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso euleriano, e sia $v \in V$. Si consideri il grafo $G - v = (V \setminus \{v\}, E')$, dove E' è ottenuto togliendo da E i lati incidenti a v . Si provi che $G - v$ è connesso, che non ha circuiti euleriani, e che ha cammini euleriani se e solo se $d_G(v) = 2$.

Esercizio 1.31. Si dica quali tra i grafi B_n definiti nell'esercizio 1.18 sono euleriani. Provare che B_n è hamiltoniano se e soltanto se n è pari.

Esercizio 1.32. Per $1 \leq n \in \mathbb{N}$, sia

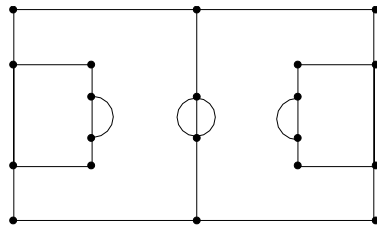
$$h(n) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-3) = \frac{n^2 - 3n + 6}{2}.$$

Sia $G = (V, E)$ un grafo con n vertici; si provi che se $|E| \geq h(n)$ allora G è hamiltoniano.

Esercizio 1.33. (Nash–Williams) Sia $k \geq 2$, e sia G un grafo regolare k -valente con $2k + 1$ vertici. Si provi che G è hamiltoniano.

Esercizio 1.34. Sia G un grafo connesso con n vertici, e sia $3 \leq k \leq n$. Assumendo che per ogni coppia di vertici v, w non adiacenti di G sia $d_G(v) + d_G(w) \geq k$, provare che G ha un ciclo di lunghezza almeno $\frac{k+2}{2}$.

Esercizio 1.35. L'addetto alla manutenzione di un campo di calcio deve ripassare con l'apposita macchina la vernice bianca sulle linee del campo:



Si dica qual è il minimo numero di volte che egli deve interrompere l'erogazione della vernice (ed eventualmente spostarsi in un altro punto del campo).

Esercizio 1.36. Si formuli in termini di esistenza di cammini hamiltoniani in un opportuno grafo il famoso *problema del cavallo*: è possibile, partendo da una opportuna casella, e procedendo mediante successive mosse del cavallo, toccare una ed una sola volta tutte le caselle di una scacchiera? Dire se, nel caso di scacchiere di ordine 3×4 e 4×4 , il problema ha soluzione affermativa.

Esercizio 1.37. Sia C_n il grafo che rappresenta il problema del cavallo (vedi esercizio precedente) su una scacchiera quadrata di n caselle per lato. Al variare di $n \geq 4$ si dica se C_n ha un circuito o un cammino euleriano. La cosa cambia se la scacchiera, invece che su un piano, viene disegnata su un nastro (cioè se si identificano due lati opposti)?

Esercizio 1.38. Si costruisca un grafo G , connesso e con 7 vertici, tale che $d_G(v) + d_G(w) \geq 6$ per ogni coppia di vertici v e w , ma che non ha sottografi isomorfi a cicli di lunghezza maggiore o uguale a 5.

Esercizio 1.39. Sia $n \geq 2$, e siano G e G' due grafi completi su n vertici. Supponiamo che i due insiemi di vertici siano disgiunti: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme dei vertici di G , e $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ quello dei vertici di G' . Sia $\Delta_n = (V, E)$ il grafo definito nella maniera seguente: $V = V \cup V'$ ed E è costituito da tutti i lati di G e di G' con l'aggiunta dei lati del tipo $\{v_i, v'_i\}$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Si dica per quali valori di n il grafo Δ_n è euleriano.

Esercizio 1.40. Sia G un grafo tale che per ogni terna di vertici distinti esiste almeno un arco che congiunge due di tali vertici. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

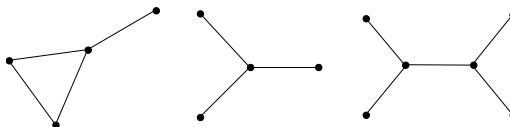
- (1) G è connesso.
- (2) Se G non è connesso allora G ha due componenti connesse che sono grafi regolari.
- (3) Se G è connesso, allora $\text{diam}(G) \leq 2$.
- (4) Se G è connesso, allora $\text{diam}(G) \leq 3$.
- (5) G è hamiltoniano.

Esercizio 1.41. Costruire un grafo con sette vertici e calibro tre con il massimo numero di lati. Stesso problema per un grafo con sette vertici e calibro quattro.

Esercizio 1.42. Costruire un grafo connesso con 8 lati, calibro 4, ed il minimo numero possibile di vertici (a meno di isomorfismo ci sono due grafi possibili).

Esercizio 1.43. Sia G un grafo con n vertici ed m lati. Si provi che $\alpha(G)^2 \leq n^2 - 2m$ (ricordo che $\alpha(G)$ è l'indice di stabilità di G).

Esercizio 1.44. Si dia la definizione di automorfismo, e quindi quella di gruppo degli automorfismi, di un grafo. Si descriva quindi il gruppo degli automorfismi dei seguenti grafi



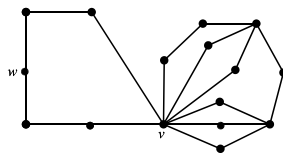
Esercizio 1.45. Dopo aver osservato che il gruppo degli automorfismi di un grafo con n vertici è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo simmetrico S_n , si dimostri che i soli grafi con n vertici il cui gruppo degli automorfismi è isomorfo a S_n sono il grafo banale (cioè quello privo di lati) ed il grafo completo K_n .

Esercizio 1.46. Sia $k \geq 1$, $n \geq 2k$ e $K = K(n, k)$ il grafo Kneser. Si provi che il gruppo simmetrico S_n (su n oggetti) è isomorfo ad un sottogruppo di $\text{Aut}(K)$ (di fatto si può provare che, se $n \geq 2k + 1$, allora $\text{Aut}(K) = S_n$).

Esercizio 1.47. Si provi che il grafo di Kneser $K(6, 2)$ ha numero cromatico 4.

Complementi.

1. *Grafi casualmente euleriani.* Il piano di un museo o di una esposizione può facilmente essere rappresentato mediante un grafo, i cui lati sono le varie gallerie o corridoi del museo, ed i vertici sono le congiunzioni di due o più gallerie. Un visitatore che sia interessato a esaminare l'intera collezione dovrà percorrere almeno una volta tutte le gallerie del museo (archi del grafo), e presumibilmente vorrà percorrerne ciascuna soltanto una volta. In termini del grafo sopra descritto, ciò è possibile se e soltanto se esso ammette un cammino euleriano tra i vertici corrispondenti all'entrata ed all'uscita del museo; nel caso in cui l'entrata e l'uscita coincidano, se e solo se si tratta di un grafo euleriano. In tal caso, la direzione del museo potrebbe fornire una mappa con l'indicazione del circuito euleriano. Ma se tali mappe fossero momentaneamente esaurite, quello che il nostro visitatore auspicherebbe è di poter comunque effettuare una visita "euleriana" mediante la semplice strategia di scegliere casualmente un nuova galleria (lato del grafo) ad ogni congiunzione (vertice) con la sola condizione che questa non sia già stata percorsa in precedenza. Naturalmente, ciò è possibile solo se il grafo del museo gode di proprietà piuttosto forti; ed è quello che viene chiamato un grafo casualmente euleriano (si tratta della solita pessima traduzione dell'inglese *randomly eulerian graph*). Più precisamente, se G è un grafo semplice e v un suo vertice, G si dice *casualmente euleriano* per v se ogni circuito massimale di G che includa il vertice v è un circuito euleriano (ci si convinca che questa definizione, posto v il vertice di entrata-uscita del museo, è equivalente a quella più "operativa" data di sopra). La figura seguente è un esempio di grafo casualmente euleriano per v .



Esercizio 1.48. Sia G un grafo e v un suo vertice. Si provi che G è casualmente euleriano per v se e solo se G è euleriano e ogni ciclo di G contiene v .

Esercizio 1.49. Sia G_0 una foresta. Si costruisca un grafo G aggiungendo un nuovo vertice v a G_0 , e congiungendo v con tutti e soli i vertici di grado dispari di G_0 . Si provi che G è un grafo casualmente euleriano per v .

2. *Line-graph.* Dato un grafo semplice $G = (V, E)$, definiamo il grafo $L(G) = (V_c, E_c)$ (detto *line graph* associato a G) nel modo seguente. I vertici di $L(G)$ sono i lati di G (cioè $V_c = E$), e due elementi $e, e' \in E$ sono congiunti da un lato di $L(G)$ se e solo se hanno un vertice in comune (cioè se $e \cap e' \neq \emptyset$).

Esercizio 1.50. Si provi che se G è privo di punti isolati, allora $L(G)$ è connesso se e solo se G è connesso.

Esercizio 1.51. Sia G un grafo; si provi che se G è euleriano, allora $L(G)$ è euleriano.

Esercizio 1.52. Con le notazioni di sopra, si provi che

$$|E_c| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_G(v)(d_G(v) - 1).$$

Si provi quindi che G è isomorfo a $L(G)$ se e soltanto se G è un ciclo C_n , dove $n = |V|$.

Capitolo 2

Alcune classi di grafi

Questo capitolo è un'introduzione a tre importanti classi di grafi: gli alberi, i grafi planari e i grafi bipartiti. Si tratta di tipi di grafi che hanno un molteplice interesse nelle applicazioni, per cui esporremo anche alcuni semplici ma importanti algoritmi che li riguardano.

2.1 Alberi.

Ricordiamo che un **albero** è un grafo connesso *privo di circuiti non banali* (il che equivale all'essere connesso e privo di cicli). Un grafo privo di cicli (ma non necessariamente connesso) si chiama una **foresta**. Una foresta è dunque un grafo in cui ogni componente connessa è un albero.

Iniziamo lo studio degli alberi ricordando il lemma 1.4, che afferma che un albero, che non sia costituito da un solo vertice isolato, possiede almeno due vertici di grado 1.

Tra i grafi connessi, gli alberi sono caratterizzati da una semplice proprietà numerica.

Teorema 2.1. *Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. Allora G è un albero se e solo se $|E| = |V| - 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. Se G non è un albero, G contiene un circuito non banale. Sia e uno dei lati di un fissato circuito di G ; allora il sottografo $G' = G - e$ è connesso (infatti, da un cammino in G che congiunga i vertici u e v e contenga il lato e , si può ricavare un cammino da u a v che non utilizza e semplicemente percorrendo, al punto giusto, invece di e il resto del circuito a cui e appartiene). Dunque, per la Proposizione 1.3, il numero di lati di G' è maggiore o uguale al numero dei suoi vertici meno 1, cioè $|E \setminus \{e\}| \geq |V| - 1$, da cui $|E| > |V| - 1$. Viceversa, supponiamo che G sia un albero, e proviamo l'uguaglianza dell'enunciato per induzione sul numero n di vertici di G . Se $n = 1$ non c'è nulla da provare. Sia dunque $n \geq 2$. Per il Lemma 1.4, G ha almeno un vertice v di grado 1; sia e il solo lato di G incidente a v , e consideriamo il sottografo $G - v$. Chiaramente $G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\})$ è ancora un albero, e dunque, per ipotesi induttiva, $|E \setminus \{e\}| = |V \setminus \{v\}| - 1$, da cui si ricava $|E| = |V| - 1$. ■

Poiché una foresta G è priva di circuiti, ogni sua componente connessa è un albero, e dunque, per l'esercizio 2.1 contribuisce con 1 al valore di $|V| - |E|$. Pertanto abbiamo il seguente

Corollario 2.2. *Sia $G = (V, E)$ una foresta. Allora, il numero di componenti connesse di G è $|V| - |E|$.*

Si possono dare altre utili caratterizzazioni degli alberi, che non sono difficili da provare. Alcune sono suggerite dalla proposizione seguente.

Proposizione 2.3. *Sia G un grafo. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) G è un albero;
- (ii) per ogni coppia di vertici di G esiste uno ed un solo cammino che li congiunge;
- (iii) G è connesso e, per ogni suo lato e , $G - e$ è non-connesso.

DIMOSTRAZIONE. (i) \Rightarrow (ii). Sia G un albero, e siano u, v vertici distinti di G . Poiché G è connesso, esiste un cammino $\mathcal{C} : u = v_0 e_1 v_1 \dots v_{d-1} e_d v_d = v$. Osserviamo che, poiché G non ha cicli non banali, \mathcal{C} è semplice. Supponiamo, per assurdo, che $\mathcal{C}' : u = w_0 f_1 w_1 f_2 w_2 \dots$ sia un altro cammino da u a v , distinto da \mathcal{C} . Allora esiste un minimo indice $i = 1, \dots, d$ tale che $e_i \neq f_i$ (e quindi $v_i \neq w_i$), ed un minimo $j > i$ tale che $v_j \in \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots\}$. Ma allora G conterrebbe un ciclo non banale che inizia e termina in v_{i-1} , il che è contro l'ipotesi.

(ii) \Rightarrow (iii). Sia G un grafo che soddisfa (ii), e sia $e = \{u, v\}$ un lato di G . Se $G - e$ fosse connesso, allora esisterebbe un cammino da u a v che non utilizza il lato e , dunque ci sarebbero due cammini distinti tra u e v , che è assurdo.

(iii) \Rightarrow (i). Sia G un grafo che soddisfa (iii). Allora G è connesso per ipotesi. Supponiamo che G contenga un circuito non banale, e sia e un lato di tale circuito. Allora $G - e$ è connesso, che è contro l'ipotesi. ■

Spanning Trees. Sia G un grafo: uno **spanning-tree** di G è un sottografo che è un albero ed il cui insieme dei vertici coincide con quello di G . La figura 2.3 mostra alcuni spanning-trees di uno stesso grafo. È chiaro che uno spanning-tree non è univocamente individuato, nemmeno a meno di isomorfismo; anzi, in molte applicazioni (come vedremo tra poco) ci si pone il problema di trovare, dato un grafo, degli spanning-trees "migliori" di altri.

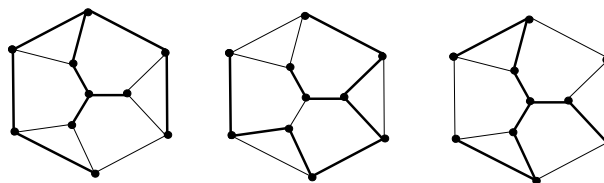


Figura 2.1: spanning trees

Proposizione 2.4. *Ogni grafo connesso ammette almeno uno spanning-tree.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso, e sia $T = (S, E')$ un sottoalbero di G con il massimo numero possibile di lati (certamente, un tale T esiste). Proviamo che $S = V$ e dunque che T è uno spanning-tree di G . Poiché T è un albero, $|S| = |E'| + 1$. Supponiamo, per assurdo, $S \neq V$; allora, poiché G è connesso, esiste un lato $e = \{v, w\}$ di G tale che $v \in S$

e $w \notin S$. Ma allora il sottografo $T' = (S \cup \{w\}, E' \cup \{e\})$ è connesso, e, per il teorema 2.1, è un albero dato che $|S \cup \{w\}| = |S| + 1 = |E'| + 2 = |E' \cup \{e\}| + 1$, e ciò va contro la scelta di T . ■

La dimostrazione che abbiamo dato della Proposizione 2.4 non è costruttiva, e non è la più intuitivamente semplice, ma ha il pregio di poter essere estesa a grafi connessi infiniti. Il solo vero problema, in tal caso, è quello dell'esistenza di un sottoalbero massimale, e questa può essere dedotta dal Lemma di Zorn. Nel caso di grafi finiti, una maniera più semplice è quella di partire dal grafo dato G : se G è un albero non c'è bisogno di far nulla; altrimenti G ha un circuito, e si considera allora il grafo ricavato da G togliendo uno dei lati di tale circuito, si ottiene così un grafo connesso G' che ha gli stessi vertici di G ed un lato in meno. Se G' è un albero siamo a posto; altrimenti si procede togliendo a G' un lato appartenente ad un circuito e così via: procedendo in questo modo si perviene dopo un numero finito di passi ad uno spanning-tree del grafo iniziale G . Un'altra maniera è quella, viceversa, di partire dal grafo privo di lati e con gli stessi vertici di G e di aggiungervi uno alla volta opportuni lati di G che non facciano chiudere un circuito. Spiegheremo meglio questo metodo affrontando un problema più elaborato, che introduciamo mediante un esempio.

Supponiamo che una banca di una grande città intenda realizzare una connessione tramite fibra ottica tra le sue diverse filiali: la situazione può essere schematizzata mediante un grafo, i cui vertici sono le filiali della banca, ed i lati le eventuali connessioni tra di esse che sarebbe effettivamente possibile realizzare nella pratica. Nella sua formulazione più semplice, il problema è quindi quello di trovare uno spanning-tree di tale grafo. Ma occorre considerare che il costo, preventivamente valutato, della realizzazione di ciascun ipotetico tratto di fibra ottica varia in dipendenza di diversi fattori (e non esclusivamente dalla sua lunghezza: attraversare una strada a grande scorrimento può essere più oneroso che attraversare un terreno aperto per un tratto di lunghezza molto maggiore); quindi, nel grafo delle possibili connessioni, ad ogni lato è assegnato un costo di realizzazione, ed allora il problema diventa quello di trovare uno spanning-tree il cui costo complessivo (la somma dei costi dei lati che lo compongono) sia il minimo possibile. Vediamo come esista un semplice algoritmo che risolve questo problema.

Dunque, abbiamo dati un grafo connesso $G = (V, E)$, ed una funzione (detta di solito una *funzione di costo*) $\mathbf{c} : E \rightarrow \mathbb{R}$, che ad ogni lato e di G associa un numero reale non negativo $\mathbf{c}(e)$; ed il problema è quello di trovare uno spanning-tree $T = (V, S)$ di G tale che il suo costo totale

$$\mathbf{c}(T) = \sum_{e \in S} \mathbf{c}(e)$$

sia il minore possibile. È chiaro che, essendo finito il numero di spanning-trees di G , un tale T esiste. L'algoritmo per trovarne uno è il seguente:

- si parte dal grafo $G_0 = (V, \emptyset)$;
- si sceglie un lato e_1 di G di costo minimo, e si considera il grafo $G_1 = (V, \{e_1\})$;
- se G_1 è connesso (cioè se G ha solo due vertici) ci si ferma, e $T = G_1$; altrimenti si sceglie un lato $e_2 \in E \setminus \{e_1\}$ di costo minimo e si considera il grafo $G_2 = (V, \{e_1, e_2\})$;
- se G_2 è connesso, $G_2 = T$; altrimenti si sceglie in $E \setminus \{e_1, e_2\}$ un lato e_3 che aggiunto a G_2 non chiuda un circuito e sia di costo minimo tra quelli che soddisfano tale condizione;

- si pone $G_3 = (V, \{e_1, e_2, e_3\})$; se G_3 è connesso $G_3 = T$; altrimenti si continua scegliendo un lato e_4 di G non ancora utilizzato che non chiuda un circuito di G_3 e di costo minimo;
- si procede in questa maniera, ottenendo ad ogni passo un grafo G_k con gli stessi vertici di G e k lati; se G_k è connesso allora $G_k = T$; altrimenti si sceglie, tra i lati di G non ancora utilizzati, uno di costo minimo tra quelli che non chiudono circuiti in G_k , e lo si aggiunge a G_k , ottenendo il grafo G_{k+1} ;

Dopo un numero finito di passi questa procedura si arresta ad uno spanning-tree T di G che, come proveremo tra poco, ha costo minimo.

Per questa volta (ma solo per questa volta, dato che non si tratta del pane quotidiano di chi scrive), descriviamo in modo formale l'algoritmo:

Algoritmo per spanning-tree minimali

Input: un grafo connesso $G = (V, E)$ ed una funzione di costo \mathbf{c} su E .

SET $S = \emptyset$.

WHILE (V, S) è non-connesso

scegli $e \in E$ i cui estremi sono in componenti connesse distinte di (V, S)
e con costo $\mathbf{c}(e)$ minimo;

$S \leftarrow S \cup \{e\}$;

RETURN (V, S)

Proviamo che questo algoritmo funziona, e fornisce in output uno spanning-tree di costo minimo. Sia $T = (V, S)$ il grafo finale prodotto dall'algoritmo. Per costruzione, T è privo di circuiti: infatti, ad ogni passo, la procedura aggiunge un lato i cui estremi giacevano in componenti connesse distinte del grafo al passo precedente, e quindi non può generare circuiti. L'algoritmo si arresta quando è pervenuto ad un grafo connesso che, poiché contiene gli stessi vertici di G , è uno spanning-tree di quest'ultimo. Dobbiamo ora verificare che T è uno spanning-tree di costo minimo. Siano e_1, e_2, \dots, e_{n-1} i lati di T nell'ordine in cui sono stati scelti ai singoli passi (poiché T è un albero, n è il numero di vertici di T e quindi di G). È chiaro che

$$\mathbf{c}(e_1) \leq \mathbf{c}(e_2) \leq \dots \leq \mathbf{c}(e_{n-1}).$$

Siano f_1, f_2, \dots, f_{n-1} i lati di un altro spanning-tree T' di G , elencati in ordine crescente di costo. Proviamo che

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(e_i) = \mathbf{c}(T) \leq \mathbf{c}(T') = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(f_i)$$

mostrando, per induzione, che per ogni $1 \leq k \leq n-1$ si ha

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{c}(e_i) \leq \sum_{i=1}^k \mathbf{c}(f_i).$$

Per $k = 1$ la cosa è assicurata dalla scelta iniziale di e_1 . Sia $k \geq 2$; per ipotesi induttiva

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(e_i) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(f_i).$$

Al passo k l'algoritmo sceglie il lato e_k . Se $\mathbf{c}(e_k) \leq \mathbf{c}(f_k)$ allora otteniamo immediatamente dall'ipotesi induttiva

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{c}(e_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(e_i) + \mathbf{c}(e_k) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(f_i) + \mathbf{c}(f_k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{c}(f_i).$$

Quindi possiamo assumere $\mathbf{c}(e_k) > \mathbf{c}(f_k)$. In particolare, poiché $\mathbf{c}(f_1) \leq \dots \leq \mathbf{c}(f_k)$, $e_k \notin \{f_1, \dots, f_k\}$. Siccome l'algoritmo sceglie e_k , ciò significa che ognuno dei lati f_1, \dots, f_k deve congiungere vertici che appartengono ad una stessa componente connessa di $T_{k-1} = (V, \{e_1, \dots, e_{k-1}\})$ (detto meglio, ogni f_i appartiene al grafo indotto in G da una componente connessa di T_{k-1}). Questo significa che il numero di componenti connesse di $T'_k = (V, \{f_1, \dots, f_k\})$ è maggiore o uguale di quello delle componenti connesse di T_{k-1} . Ma sia T_{k-1} che T'_k sono grafi privi di circuiti, e dunque (Corollario 2.2) il numero delle loro componenti connesse è dato dalla differenza tra il numero dei vertici e quello dei lati, che è $n - (k - 1)$ per T_{k-1} , e $n - k$ per T'_k , una contraddizione. ■

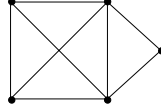
Quello che abbiamo appena descritto è uno degli algoritmi noti come algoritmi *greedy* (ingordi). Si tratta di algoritmi che, disegnati per giungere per passi ripetuti alla determinazione di un certo oggetto, effettuano ad ogni passo, tra le opzioni consentite, la scelta localmente più conveniente, senza guardarsi indietro o più avanti. In effetti, è sorprendente che algoritmi tanto "stupidi" possano in certe situazioni condurre ad un risultato ottimale. Nonostante possa essere confortante apprendere come, a volte, per fare le scelte giuste non sia necessario essere navigati, l'esperienza e la filosofia morale di ogni tempo (e, se vogliamo, anche innumerevoli processi decisionali rigorosamente formalizzabili) ci insegnano che in genere non è così: uno scacchista che applicasse un algoritmo greedy accetterebbe senza riflettere qualunque sacrificio proposto da un avversario appena più astuto, divertendosi forse, ma finendo col venire ignominosamente cacciato, dopo un paio di partite, da qualsiasi circolo di cui non risultasse il principale finanziatore.

L'algoritmo greedy per spanning-tree minimali è anche efficiente. Partendo da un grafo con n -vertici, si devono trovare gli $n - 1$ lati di uno spanning-tree minimale; quindi il numero di passi è $n - 1$. Ciascun passo richiede di scegliere un lato tra un numero di essi che non supera $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$, che abbia peso minimo tra quelli che godono di una certa proprietà; una volta che si sia definito per bene (ma non lo facciamo) cosa si intenda per "singola operazione", non è difficile vedere che questa procedura di scelta richiede un numero di operazioni che è limitato da un polinomio in n . Complessivamente, quindi, il numero totale di operazioni richieste per l'algoritmo per spanning-tree minimali, è limitato da un polinomio in n .

Esercizio 2.1. Si provi che il Teorema 2.1 non vale se $G = (V, E)$ non è connesso (meglio: provare che, senza l'ipotesi di connessione, non è vero che se $|E| = |V| - 1$ allora G è una foresta).

Esercizio 2.2. Siano $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ interi positivi tali che $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$. Si provi che esiste un albero T con n vertici v_1, v_2, \dots, v_n tale che $d_T(v_i) = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Esercizio 2.3. Si determinino, a meno di isomorfismi, tutti gli spanning-trees del grafo



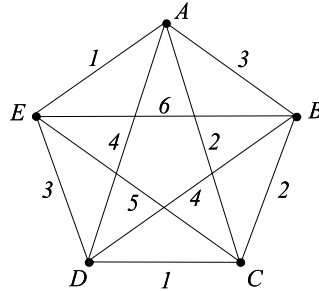
Esercizio 2.4. Provare che ogni albero con n vertici è isomorfo ad uno spanning-tree del grafo completo K_n .

Esercizio 2.5. Sia G il grafo costruito nella maniera seguente. I vertici di G sono tutti i punti a coordinate intere contenuti nel quadrato $[0, 3] \times [0, 3]$ in un piano cartesiano, ed i lati di G congiungono due punti se e solo se la distanza euclidea tra questi è 1. Si calcoli il costo minimo complessivo di uno spanning-tree di G , nei due casi seguenti.

- 1) Ad ogni lato $e = \{(a, b), (a', b')\}$ è assegnato un costo $\mathbf{c}(e) = \min\{a + b, a' + b'\}$.
- 2) Il costo dei lati è 1 per tutti i lati "verticali", mentre è uguale ad $a + 1$ per i lati del tipo $\{(a, b), (a + 1, b)\}$.

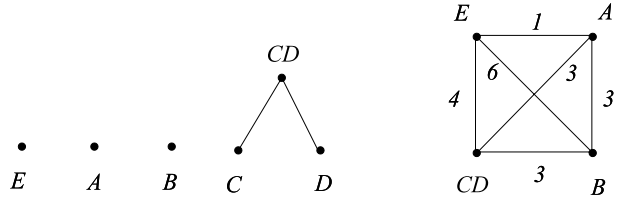
Digressione: alberi evolutivi. Supponiamo di aver dato un insieme finito di n oggetti (punti) e che per ogni coppia di essi sia definita una "distanza" (un numero reale positivo). Questo, dal punto di vista dei grafi, significa avere dato un grafo completo K_n con una funzione di costo sui lati (anche se nei casi che abbiamo in mente il costo di un lato esprime in realtà una misura della diversità tra i due oggetti rappresentati dagli estremi del lato stesso). Vogliamo ora costruire un albero che schematizzi un'ipotesi di come le varie differenze possano essere derivate temporalmente (partendo cioè dall'assunto evolucionistico che la somiglianza implica un percorso comune più lungo: cosa che, mi pare, non ha alcun fondamento matematico). Illustriamo il metodo di base più semplice mediante un esempio.

Supponiamo che gli oggetti dati siano A, B, C, D ed E , e che la distanza tra ciascuna coppia di essi sia codificata dalla funzione di costo su K_5 indicata nella Figura seguente.

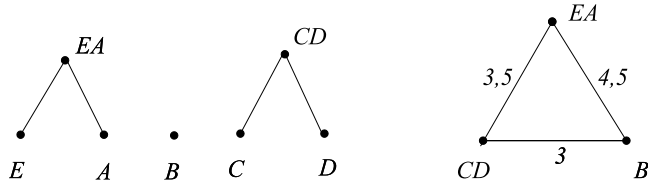


Si disegnano su un altro foglio i cinque punti A, B, C, D, E isolati. Si sceglie in K_5 un albero di peso minimo, ad esempio $\{D, C\}$, e sull'altro foglio si inserisce un nuovo punto CD , e due lati

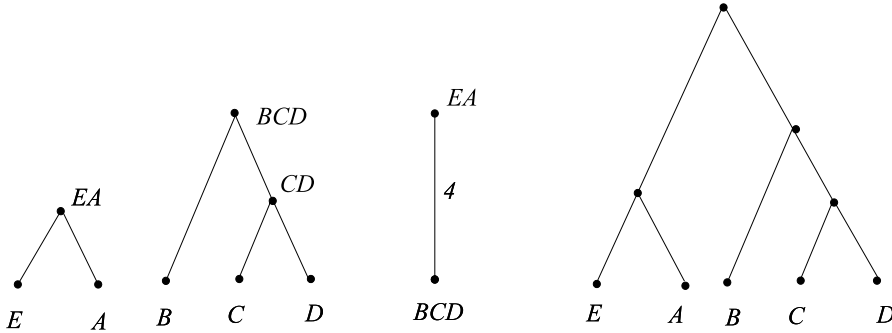
che lo congiungono a C ed a D ; quindi sul primo foglio si costruisce un grafo K_4 "fondendo" i vertici C e D , e pesando i lati con il peso precedente (nel grafo K_5 di partenza) se i loro estremi sono entrambi diversi da C e D , mentre i lati del tipo $\{X, CD\}$ vengono pesati con la media aritmetica dei pesi dei lati originari $\{X, C\}$ e $\{X, D\}$.



Si ripete la procedura a partire dal nuovo grafo pesato K_4 e, sull'altro foglio, dal grafo sui vertici A, B, E e CD . In questo caso scegliendo il lato $\{E, A\}$.



Quindi si procede allo stesso modo sul triangolo rimasto, scegliendo il lato $\{CD, B\}$, ed infine contraendo l'ultimo lato residuo, ed ottenendo sull'altro foglio l'albero a destra in figura.



Questo metodo può essere applicato a partire da qualunque grafo completo pesato K_n , e produce, dopo esattamente $k - 1$ passi un albero nel quale le "foglie" (cioè i vertici di grado 1) sono in corrispondenza biunivoca con i vertici dal grafo iniziale K_n , c'è un solo vertice di grado 2 (l'ultimo che viene inserito), ed ogni altro vertice ha grado 3. Un albero di questo tipo si chiama albero binario con radice (la radice è l'unico vertice di grado 2). La verifica di queste affermazioni è lasciata per esercizio: osserviamo però che può essere necessario in alcuni passi effettuare delle scelte non deterministiche (dato che - come al primo passo del

nostro esempio - è possibile che ci sia più di un lato di peso minimo); le diverse scelte danno luogo ad alberi diversi.

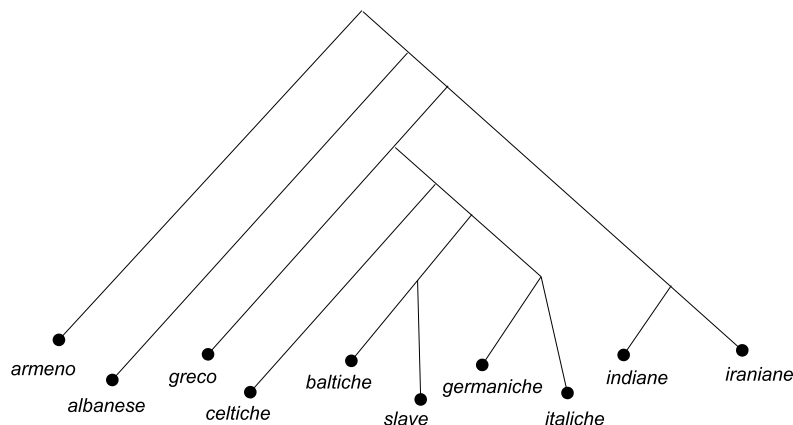


Figura 2.2: albero presunto di derivazione di alcune lingue indoeuropee

Quella che abbiamo illustrato è una versione molto elementare di metodi che sono effettivamente utilizzati per ricostruire a posteriori alberi evolutivi di vario genere. Ad esempio, l'albero della Figura 1.16 è ricavato con metodi di questo tipo a partire dal confronto del genoma delle specie in esame, che fornisce le distanze iniziali. Ma procedure del genere si possono applicare in svariati ambiti (posto che si sia in grado di stabilire in modo appropriato una misura delle differenze): ad esempio, come nella figura 2.2, nello studio della presunta evoluzione delle lingue¹.

Naturalmente, nella pratica è spesso necessario modificare l'approccio più ingenuo: ad esempio potrebbe essere più realistico assegnare il peso dei nuovi lati non semplicemente calcolando una media locale, ma tenendo anche conto di tutti i pesi complessivi, o di più sottili ragioni statistiche. Ma ci fermiamo qui, dato che intendevamo soltanto suggerire una delle tante applicazioni del concetto di albero.

2.2 Grafi planari.

Possiamo introdurre anche questa classe di grafi ricordando un ben noto problema di matematica ricreativa.

Problema dei villaggi e dei pozzi. Gli abitanti di tre villaggi attingono acqua da tre pozzi situati ad una certa distanza da tutti e tre i villaggi. A causa di ricorrenti siccità, un antico accordo stabilisce che ognuno dei villaggi possa utilizzare tutti e tre i pozzi, e quindi da

¹Quest'esempio e quello della figura 1.16 sono tratti dal libro L. L. Cavalli-Sforza, *Geni, popoli e lingue* (Adelphi), un capitolo del quale è intitolato "Una passeggiata nella foresta".

ogni villaggio partono tre sentieri che arrivano a ciascuno dei pozzi. La situazione è dunque schematizzata dal seguente grafo:

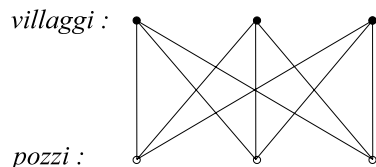


Figura 2.3: villaggi e pozzi

Col tempo si è però sviluppata un'inimicizia tra le tre comunità, per cui possono verificarsi incidenti qualora abitanti di diversi villaggi si incontrino negli incroci tra i sentieri. Un antropologo europeo, giunto da quelle parti, e compiaciuto di poter risolvere tanto facilmente (grazie alla propria cultura superiore) il problema di quei bravi selvaggi, propone allora agli anziani dei tre villaggi di tracciare nuovi sentieri che non si incontrino se non in prossimità dei pozzi (luoghi sacri e quindi sicuri). Gli anziani lo fissano accondiscendenti per qualche secondo e, quindi, scoppiano a ridere. Perché?

Qui, la questione è se il grafo della figura 2.3 possa essere disegnato su un piano in modo che i nove lati non si intersechino in alcun punto (ad eccezione, ovviamente, dei vertici). Si vede facilmente (sperimentando ad esempio su K_5 che non tutti i grafi possono essere disegnati in questo modo su un piano, e ciò conduce alla definizione di grafi planari, come quei grafi che ammettono una rappresentazione sul piano in cui i lati si incontrano soltanto nei vertici.

Introduciamo la cosa in modo più formale.

Un multigrafo $G = (V, E, \phi)$ è un **multigrafo piano** se V è un sottoinsieme di punti del piano euclideo \mathbb{R}^2 ed E è un insieme di archi semplici (curve di Jordan) i cui estremi appartengono a V (quindi ogni $e \in E$ può essere inteso come (l'immagine di) un'applicazione continua e iniettiva $e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $e(0), e(1)$ sono vertici del grafo).

Un (multi)grafo G si dirà quindi **planare** se è isomorfo ad un (multi)grafo piano. Se G è un grafo planare, ogni grafo piano isomorfo ad esso lo chiameremo una *realizzazione* di G .

Per esempio, un circuito stampato è naturalmente associato ad un grafo planare, a differenza di un circuito realizzato mediante cavi isolati (i quali si possono sovrapporre) che potrebbe non esserlo. I grafi dei poliedri regolari sono planari (si guardino i disegni della Figura 1.7). Più in generale, ogni grafo che può essere disegnato su una sfera senza che i lati si incrocino (come può essere fatto per i poliedri regolari, o per il grafo del pallone da calcio) è planare: per convincersene basta immaginare di tagliare la sfera in un punto che non appartenga al diagramma del grafo disegnato su di essa e quindi di "aprirla"; oppure, più scientificamente, si proietta stereograficamente la sfera, a partire da un punto di essa che non appartiene al diagramma, su un piano tangente al punto opposto. Come ultimo esempio osserviamo che ogni albero è planare (lo si dimostri facendo induzione sul numero dei suoi vertici ed utilizzando il Lemma 1.4).

È importante sottolineare che, mentre i grafi piani sono ben precisi oggetti geometrici (in particolare, ereditano una topologia da quella di \mathbb{R}^2), la proprietà d'essere planare è una

proprietà che appartiene al grafo, e non ad un suo particolare diagramma.

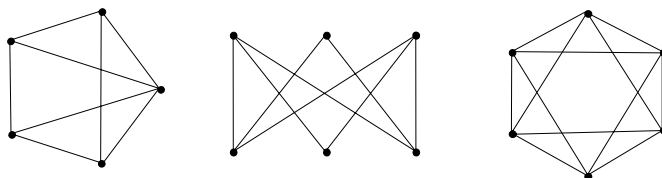
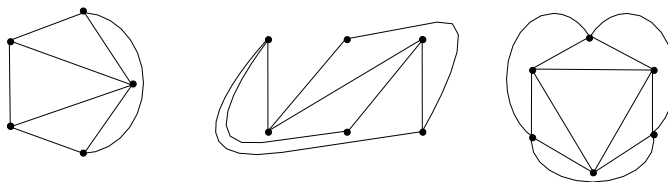


Figura 2.4: esempi di grafi planari

Ad esempio i grafi della figura 2.4 sono planari, dato che possono, nello stesso ordine, essere disegnati nella maniera seguente:



Per le ragioni che tra poco chiariremo, due casi particolarmente significativi di grafi *non planari* (visibili nella Figura 2.3) sono il grafo completo K_5 ed il grafo dei villaggi e dei pozzi $K_{3,3}$ (il cui nome ufficiale è *grafo completo bipartito* di tipo $(3,3)$).

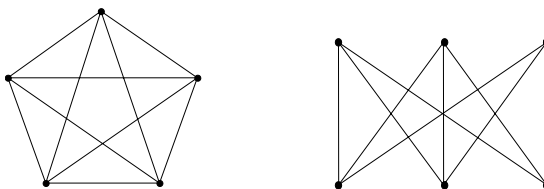


Figura 2.5: grafi non planari

Torniamo ai grafi piani. Un grafo piano è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 costituito da un insieme finito V di punti (i vertici del grafo) e da un insieme di archi semplici che congiungono punti i cui vertici corrispondenti sono uniti da un lato del grafo, e non si intersecano se non agli estremi. Avvisando che non tratteremo questi aspetti in modo rigoroso, non possiamo fare a meno di citare il famoso Teorema di Jordan sulle curve semplici chiuse, il cui enunciato è intuitivo, ma la cui dimostrazione è tutt'altro che banale.

Teorema della curva di Jordan. *Ogni curva semplice chiusa sul piano separa il piano in due regioni semplicemente connesse, una interna ed una esterna.*

Una conseguenza, che non dimostreremo, piuttosto intuitiva di questo Teorema, è che, dato un grafo piano G , il piano euclideo \mathbb{R}^2 risulta suddiviso in un numero finito di regioni connesse,

chiamate le **facce** del grafo G , di cui una di area infinita (la regione "esterna") e le altre limitate e racchiuse da un perimetro costituito da un numero finito di curve, corrispondenti ai lati di un ciclo del grafo (naturalmente, anche la faccia infinita esterna è delimitata allo stesso modo da quello che chiameremo ugualmente il suo perimetro).

Accettato questo, la dimostrazione del risultato (anche questo dovuto a Eulero) che sta alla base di tutta la teoria dei grafi piani è sorprendentemente breve.

Teorema 2.5. (Eulero) *Sia G un grafo piano connesso con n vertici ed m lati e sia c il numero delle sue facce. Allora*

$$c - m + n = 2.$$

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione sul numero m di lati. Se $m = 0$ allora G è costituito da un unico vertice, $c = 1$ e la formula è banalmente soddisfatta. Lo stesso avviene se G è un albero; in tal caso, infatti, un disegno planare di G ha un'unica faccia, e per il Teorema 2.1 si ha $m = n - 1$, quindi $c - m + n = 1 - (n - 1) + n = 2$. Se G non è un albero, allora ha un circuito \mathcal{C} . Per il Teorema della curva di Jordan, \mathcal{C} divide il piano in una regione interna ed una esterna; quindi, se e è un lato di \mathcal{C} , e separa esattamente due facce di G , una che giace nella regione interna di \mathcal{C} e l'altra in quella esterna. Nel disegno del sottografo $G - e$ queste due regioni vengono 'fuse' in una. Pertanto, il numero di facce nel disegno del sottografo $G - e$ è $c - 1$. D'altra parte, $G - e$ è connesso, ha gli stessi vertici di G ed un lato in meno; quindi, per ipotesi induttiva

$$2 = (c - 1) - (m - 1) + n = c - m + n$$

provando così il Teorema. ■

Come prima applicazione, vediamo come da questo risultato discenda subito una forte limitazione al numero dei lati di un grafo piano.

Teorema 2.6. *Sia G un grafo planare con m lati e $n \geq 2$ vertici: allora $m \leq 3n - 6$. Se G non è un albero, e $g = g(G)$ è il suo calibro (vedi sezione 1.4), allora*

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia G un grafo planare come nelle ipotesi. Se G non è connesso, l'aggiungere un nuovo lato i cui estremi appartengono a componenti connesse distinte dà chiaramente luogo ancora ad un grafo piano, con gli stessi vertici di G ed un lato in più. Ai fini dell'enunciato, possiamo perciò assumere che G sia connesso. Se G è un albero allora $m = n - 1 \leq 3n - 6$ (perché $n \geq 2$). Possiamo quindi assumere che G non sia un albero, e dimostrare la seconda parte dell'enunciato, avendo posto g il calibro di G . Indichiamo con G' una realizzazione di G . A questo punto, l'argomento è analogo a quello utilizzato nella dimostrazione del teorema 1.1. Sia G' una realizzazione di G , e per ogni faccia α di G' denotiamo con $d(\alpha)$ il numero di lati distinti che compongono il perimetro di α . Poiché ogni lato è parte del perimetro di al più due facce, si ha

$$\sum_{\alpha \text{ faccia}} d(\alpha) \leq 2m. \quad (2.1)$$

D'altra parte, per definizione di calibro, il perimetro di ogni faccia è composto da almeno g archi, (infatti il perimetro di ogni faccia contiene un ciclo non banale), ovvero $d(\alpha) \geq g$, per

ogni faccia α . Quindi la (2.1) implica la disuguaglianza $gc \leq 2m$, dove c è il numero di facce di G' . Poiché, per il Teorema di Eulero, $c = m - n + 2$, si ottiene

$$g(m - n + 2) \leq 2m$$

da cui segue subito la disuguaglianza dell'enunciato. Per quanto osservato sugli alberi e tenendo conto che (poiché $g \geq 3$) $\frac{g}{g-2} \leq 3$, si conclude che $m \leq 3n - 6$ vale in ogni caso. ■

Corollario 2.7. *Un grafo planare ha almeno un vertice di grado al più 5.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V, E)$ un grafo piano con n vertici e m lati, e supponiamo per assurdo che ogni vertice abbia grado almeno 6. Allora, per il Teorema 1.1

$$6n \leq \sum_{v \in V} d_G(v) = 2m$$

e quindi $m \geq 3n$, cosa che contraddice il Teorema 2.6. ■

Osserviamo ora che né il grafo completo K_5 né il grafo dei pozzi $K_{3,3}$ verificano la limitazione del Teorema 2.6: infatti, K_5 (che ha calibro 3), ha 10 lati e 5 vertici, mentre $K_{3,3}$ ha calibro 4, 6 vertici, 9 lati, e $9 > \frac{4}{4-2}(6-2)$. Quindi

Proposizione 2.8. *I grafi K_5 e $K_{3,3}$ non sono planari.*

Chiaramente, ogni sottografo di un grafo planare è planare. Dunque un grafo che ha un sottografo isomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ non è planare. Questa osservazione non si inverte direttamente (esistono grafi non planari che non contengono alcun sottografo isomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$), ma potremmo dire che si inverte nella sostanza. Per chiarire il senso di questa affermazione, è utile introdurre il concetto di suddivisione di un grafo.

Sia $e = \{u, v\}$ un lato del grafo G ; possiamo costruire un grafo G^e aggiungendo a G un nuovo vertice a , togliendo il lato e , e rimpiazzandolo con i due lati $\{u, a\}$, $\{a, v\}$. Dato un diagramma di G , per ottenere un diagramma di G^e si utilizzano le stesse linee, e semplicemente si aggiunge un vertice in mezzo alla linea che rappresenta e nel disegno di G ; quindi G è piano se e soltanto se G^e è piano. Un grafo G' è detto una *suddivisione* del grafo G se è ottenuto da G mediante un numero finito di applicazioni successive della procedura appena descritta.

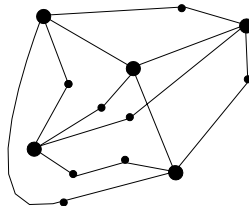


Figura 2.6: una suddivisione di K_5

La figura 2.6 illustra una suddivisione di K_5 (dove i pallini grossi sono i vertici originari di K_5 e quelli piccoli i vertici aggiunti).

Si osserva quindi che un grafo G è planare se e solo se ogni sua suddivisione è tale. Inoltre, un grafo che ha un sottografo isomorfo ad una suddivisione di K_5 o di $K_{3,3}$ non è planare (per la Proposizione 2.8).

Un importante risultato di Kuratowski (a cui si alludeva in precedenza), la cui dimostrazione, pur non richiedendo strumenti particolarmente sofisticati, è troppo complicata per essere affrontata in queste note, afferma che vale anche il viceversa.

Teorema 2.9. (Kuratowski) *Un grafo è planare se e soltanto se non ha sottografi isomorfi ad una suddivisione di K_5 o di $K_{3,3}$.*

Il Teorema dei quattro colori. Un problema di colorazione di grafi planari è quello che forse è il risultato più diffusamente noto di teoria dei grafi, ovvero quella della colorazione di una carta geografica politica (che, per brevità, conveniamo di chiamare "mappa"): qual è il minimo numero di colori distinti necessario per colorare una mappa in modo che non vi siano nazioni confinanti dello stesso colore?

È facile tradurre il problema della mappa in termini di grafi: ad una data mappa si associa un grafo i cui vertici sono le diverse nazioni e due vertici sono adiacenti se e solo se le corrispondenti nazioni sono confinanti.

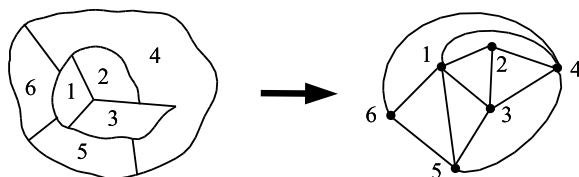


Figura 2.7: una mappa e il suo grafo

È intuitivo, e non è difficile da provare, che il grafo così ottenuto è un grafo planare (avendo ovviamente definito con precisione cosa si intende con "mappa"). La domanda diventa allora la seguente: qual è il minimo numero di colori con cui è possibile colorare i vertici di un grafo piano? La congettura che siano sempre sufficienti quattro colori ha una storia quasi mitica; comunque, pare (si veda Biggs, Lloyd e Wilson, *Graph Theory 1736–1936*) sia stata esplicitamente formulata per la prima volta da un certo Francis Guthrie, che, tramite il fratello, l'avrebbe comunicata ad Augustus de Morgan, suo professore di matematica al University College di Londra². Mentre dimostrare che cinque colori sono sempre sufficienti (Heawood 1890) è oggi relativamente semplice, la congettura dei quattro colori ha resistito (nonostante numerosi tentativi in entrambi i sensi) sino al 1976 quando è stata provata da Appel e Haken ed è quindi diventata il *Teorema dei quattro colori*³ (si osservi che la mappa della figura 2.7 richiede effettivamente quattro colori), che può dunque essere formulato nel modo seguente

Teorema 2.10. *Ogni grafo planare è 4-colorabile.*

²Se poi qualche cinese, o turco, o indiano, per non dire una donna, l'abbia pensata prima e magari l'abbia anche messa per iscritto è una questione che non ha rilevanza per la storiografia occidentale.

³La dimostrazione ha richiesto un impiego massiccio del calcolatore, e non potrebbe essere verificata da esseri umani (nemmeno se ci si mettesse tutti insieme a lavorare per qualche anno); pertanto è stata ed è oggetto di una certa discussione.

Esercizio 2.6. Dire quali tra i grafi dell'esercizio 1.11 sono planari.

Esercizio 2.7. Sia g la lunghezza minima di un ciclo non banale di un grafo piano (che non sia un albero) con n vertici, m lati e c facce. Si provi che

$$c \leq \frac{2}{g-2}(n-2).$$

Esercizio 2.8. Provare che in un grafo planare con più di 3 vertici ci sono almeno 3 vertici di grado al più 5 (sugg.: si può supporre in partenza che non ci siano vertici di grado 1).

Esercizio 2.9. Sia G un grafo connesso con $n \geq 3$ vertici, e sia $L(G)$ il suo line graph. Si provi che se $L(G)$ è planare, allora G è planare, non ha vertici di grado ≥ 5 , ed ha almeno 4 vertici di grado minore o uguale a 3 [utilizzare l'esercizio 1.52].

2.3 Grafi regolari.

Ricordiamo che un grafo G si dice *regolare* se i suoi vertici hanno tutti lo stesso grado; se tale grado comune è uguale a d si dice che G è un grafo d -regolare.

È chiaro che un grafo è 1-regolare se e soltanto se ogni sua componente connessa è composta da due vertici ed un solo lato (abbiamo visto che un grafo di questo tipo si chiama anche un 1-fattore). Anche i grafi 2-regolari si descrivono facilmente: infatti un grafo connesso è 2-regolare se e soltanto se è un ciclo (vedi esercizio 1.10, per dimostrarlo si provi ad esempio a considerare un cammino massimale in un grafo connesso 2-regolare e che cosa se ne può dire). Dunque un grafo è 2-regolare se e soltanto se ogni sua componente connessa è un ciclo. Il primo caso davvero significativo è quello dei grafi 3-regolari, che chiameremo *grafi cubici*. Di fatto è molto più che un caso "significativo": la complessità della classe dei grafi cubici è notevole, ed è frequente che un problema difficile in teoria dei grafi rimanga difficile anche se ci si limita a considerare i grafi cubici. Esempi di grafi cubici sono i grafi del tetraedro, del cubo, del dodecaedro, e il grafo di Petersen.

Sia $G = (V, E)$ un grafo cubico; usando la formula del Teorema 1.1 si ottiene $3|V| = 2|E|$; in particolare il numero di vertici di un grafo cubico (o, più in generale, di un grafo regolare di valenza dispari) è pari. La figura 1.14 suggerisce come trovare, per ogni $n \geq 3$, un grafo cubico con $2n$ vertici. È stato calcolato che il numero di grafi cubici (a meno di isomorfismo) rispettivamente con 10, 12, 14 e 16 vertici è 21, 94, 540, 4207.⁴

Ricordiamo che se $v \in V$ è un vertice del grafo connesso G , e $0 \leq q$ un numero intero, la *palla* $B_G(v, q)$ di raggio q e centro v è l'insieme di tutti i vertici di G la cui distanza da v non supera q ; ovvero

$$B_G(v, q) = \{w \in V \mid d_G(v, w) \leq q\}.$$

Quindi, $B_G(v, 0) = \{v\}$ e, se d è il grado di v , $B_G(v, 1)$ contiene esattamente $d + 1$ elementi.

⁴Il numero di grafi cubici è stato determinato fino a 40 vertici; i grafi cubici con 40 vertici sono circa 8×10^{18} . Sono cubici anche i grafi di alcune interessantissime molecole composte da atomi di carbonio, come i fullereni: assomigliano ai vecchi palloni da calcio, e potete vederle, ad esempio, al sito <http://www.sussex.ac.uk/Users/kroto/FullereneCentre/main.html>

Lemma 2.11. *Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso d -regolare, con $d \geq 3$. Allora, per ogni $v \in V$ ed ogni $q \geq 1$*

$$|B_G(v, q)| \leq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}.$$

In particolare, se G è cubico, $|B_G(v, q)| \leq 1 + 3(2^q - 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Procedendo per induzione su q proviamo che il numero di vertici di G la cui distanza da v è esattamente q è al più $d(d-1)^{q-1}$.

Per $q = 1$ la cosa è ovvia, dato che v ha grado $d = d(d-1)^0$.

Sia $q \geq 2$. Osserviamo che ogni vertice la cui distanza da v è uguale a q è adiacente ad un vertice la cui distanza da v è uguale a $q-1$; inoltre ogni vertice w a distanza $q-1$ da v è adiacente ad almeno un vertice di distanza minore, e pertanto, avendo grado d , w può essere adiacente ad al più $(d-1)$ vertici di distanza q da v . Poiché il numero di vertici di distanza $q-1$ è, per ipotesi induttiva, minore o uguale a $d(d-1)^{q-2}$, si ricava che il numero di vertici a distanza q da v è al più $d(d-1)^{q-2}(d-1) = d(d-1)^{q-1}$, che è quello che si voleva.

A questo punto, siccome la palla $B_G(v, q)$ è costituita da tutti i vertici la cui distanza da v è compresa tra 0 e q , si ha

$$|B_G(v, q)| \leq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \dots + d(d-1)^{q-1} = 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}$$

che è l'enunciato del Lemma. ■

Un'immediata conseguenza è il seguente risultato.

Corollario 2.12. *Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso d -regolare (con $d \geq 3$) di diametro q . Allora,*

$$|V| \leq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}.$$

In particolare, un grafo d -regolare di diametro 2 ha al più $d^2 + 1$ vertici; e un grafo cubico di diametro q ha al più $1 + 3(2^q - 1)$ vertici.

Analogamente a quanto provato per il diametro, anche il valore del calibro di un grafo regolare implica un limite al numero dei vertici (ma in questo caso la limitazione che si ottiene è inferiore).

Proposizione 2.13. *Sia $G = (V, E)$ un grafo d -regolare con calibro $g \geq 3$, e poniamo $e = \lfloor (g-1)/2 \rfloor$ (la parte intera). Allora*

$$|V| \geq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^e - 1}{d-2}.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si svolge mediante una procedura analoga a quelle utilizzate per il Lemma 2.11, e si invita il lettore a cercare di esporla rigorosamente. Fissato un vertice v di G , si tratta di provare che due vertici $u_1 \neq u_2$ tali che le loro distanze da v non superano il valore $e-1$ (dove e è quello nell'enunciato) non possono essere adiacenti ad uno stesso vertice (che non sia eventualmente v), perché in tal caso si troverebbe un ciclo la cui lunghezza viola il limite inferiore imposto dal calibro g . Tenendo conto della regolarità di G ,

con un semplice passo induttivo si prova quindi che, per $1 \leq k \leq e$, il numero di vertici di G la cui distanza da v è k è $d(d-1)^{k-1}$. Procedendo poi come nella dimostrazione del Lemma 2.11 si trova che $|B_G(v, e)| = 1 + d \cdot \frac{(d-1)^e - 1}{d-2}$, valore che ovviamente limita inferiormente il numero di vertici di G . ■

Gabbie. Una classe di grafi cubici che riveste un certo interesse, è quella delle cosiddette gabbie. Un grafo cubico con calibro g è detto una *gabbia cubica* se ha il minimo numero possibile di vertici tra tutti i grafi cubici di calibro g . Si dimostra facilmente che il grafo completo K_4 è la sola gabbia cubica di calibro 3, e non è difficile, ma richiede un po' più di lavoro, provare che il grafo di Petersen è l'unica gabbia cubica di calibro 5. L'unica gabbia cubica di calibro 6 è il grafo di Heawood (1890):

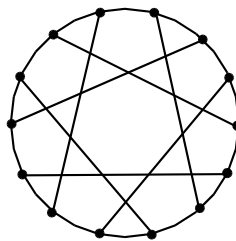


Figura 2.8: il grafo di Heawood

La Proposizione 2.13 fornisce un limite inferiore al numero di vertici di una gabbia cubica, che con qualche considerazione aggiuntiva non difficile, può essere leggermente migliorato, ottenendo la stima seguente:

Il numero di vertici di un grafo cubico di calibro g è almeno

$$n(3, g) = \begin{cases} 1 + 3(2^{(g-1)/2} - 1) & g \text{ dispari} \\ 2(2^{g/2} - 1) & g \text{ pari} \end{cases}$$

Tuttavia, tranne per i casi in cui g è piccola, questa stima inferiore non coincide con il valore minimo esatto del numero di vertici (cioè quello delle corrispondenti gabbie cubiche), che in genere è più grande. La tabella seguente riassume quanto sino ad oggi noto intorno alle gabbie cubiche. La prima colonna g è il valore del calibro, la colonna $|V|$ il numero di vertici della gabbia (che il lettore può confrontare con il limite inferiore $n(3, g)$), la colonna $\#$ indica il numero di gabbie distinte per un certo calibro, e l'ultima colonna fornisce l'indicazione del grafo oppure dei nomi degli scopritori (quando vi siano due date, la prima si riferisce alla costruzione della gabbia, la seconda alla dimostrazione della sua unicità, o alla determinazione del numero esatto di gabbie). Per valori di g maggiori di 12 non si conosce alcuna gabbia, anche se vi sono diverse costruzioni di grafi che forniscono un limite superiore per il numero di vertici di una gabbia.

g	$ V $	#	grafo
3	4	1	K_4
4	6	1	$K_{3,3}$
5	10	1	Petersen
6	14	1	Heawood
7	24	1	McGee
8	30	1	Tutte, Levi
9	58	18	Biggs/Hoare (1980), Brinkmann, McKay, Saager (1995)
10	70	3	O'Keefe, Wong (1980)
11	112	1	Balaban (1973), McKay, Myrvold (2003)
12	126	1	esagono generalizzato

Esercizio 2.10. Avvalendosi di una opportuna variante del Lemma 2.11, si provi che il Corollario 2.12 sussiste sostituendo l'ipotesi che G sia regolare con quella che d sia il massimo fra i gradi dei vertici di G . Si osservi poi che l'eguaglianza nell'enunciato si può verificare solo nel caso di grafi regolari.

Esercizio 2.11. Sia G un grafo d -regolare, di diametro q e $1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}$ vertici. Si provi che per ogni coppia di vertici x, y esiste in G uno ed un unico cammino che congiunge x a y la cui lunghezza è minore o uguale a q . Si provi quindi che $g(G) = 2d + 1$ (grafi di questo tipo sono detti grafi di Moore, e torneremo diffusamente su di essi più avanti).

Esercizio 2.12. Si provi che $K_{3,3}$ è l'unica gabbia cubica di calibro 4. Si provi che il grafo di Petersen è l'unica gabbia cubica di calibro 5.

2.4 Grafi bipartiti.

Un grafo il cui numero cromatico è 2, si dice **bipartito**. In altre parole, un grafo è bipartito se esiste una partizione $V = A \cup B$, dell'insieme V dei vertici, in due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti A e B , tale che non esiste alcun arco del grafo i cui estremi giacciono in uno stesso termine della partizione (quindi ogni lato congiunge un vertice in A con un vertice in B). In generale, per $k \geq 1$, si dice che un grafo $G(V, E)$ è k -partito se esiste una partizione $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ dell'insieme V dei vertici in k -sottoinsiemi non-vuoti, tale che i vertici estremi di ogni lato appartengono a termini distinti della partizione. Torneremo sui grafi k -partiti nel prossimo capitolo. In questo ci occupiamo dei grafi bipartiti, che costituiscono un'altra importante classe di grafi utile nelle applicazioni (in particolare per i cosiddetti "problemi di assegnazione" che approfondiremo nella prossima sezione).

Abbiamo già incontrato grafi bipartiti in alcune occasioni; ad esempio sono bipartiti i grafi dell'esercizio 1.18. Il grafo $K_{3,3}$, introdotto nella sezione 2.2, è un esempio di grafo bipartito completo.

Siano n, m interi maggiori o uguali ad 1. Il grafo *completo bipartito* $K_{n,m} = (V, E)$ è il grafo definito nel modo seguente: l'insieme dei vertici $V = V_1 \cup V_2$ è unione disgiunta di due sottoinsiemi di ordine rispettivamente n ed m , ed i lati in E sono tutti e soli quelli che

congiungono vertici di V_1 con vertici in V_2 ; ovvero $E = \{\{u, v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}$.

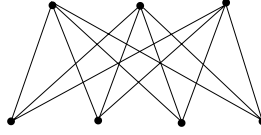


Figura 2.9: $K_{4,3}$

Di fatto, i grafi bipartiti sono più di quelli che a prima vista si direbbe guardando qualche diagramma. Ad esempio il grafo del cubo è bipartito: la figura che segue mostra una possibile partizione dei vertici.

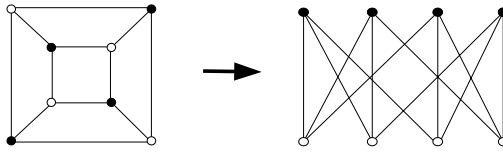


Figura 2.10: bipartizione del cubo

Mentre è chiaro che un grafo che contiene un triangolo o un pentagono (cioè un 5-ciclo) non è bipartito, e dunque gli altri grafi dei solidi platonici non sono bipartiti. Ogni albero è bipartito; questa affermazione è una conseguenza del prossimo Teorema, si cerchi tuttavia di provarla per esercizio facendo induzione sul numero di vertici.

Teorema 2.14. *Un grafo con almeno due vertici è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.*

Alla dimostrazione premettiamo la seguente osservazione (ricordando che una *passeggiata* di lunghezza n in un grafo è una sequenza $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$, di vertici e lati, sottoposta alla sola condizione che ogni lato e_i congiunge i vertici v_{i-1} e v_i).

Lemma 2.15. *Un grafo in cui è possibile trovare una passeggiata chiusa di lunghezza dispari ha un ciclo di lunghezza dispari.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{P} : u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n = u$ una passeggiata chiusa di lunghezza dispari n in G , e procediamo per induzione su n (chiaramente $n \geq 3$). Se \mathcal{P} è un ciclo (cosa che, in particolare, avviene se $n = 3$) non c'è nulla da provare. Supponiamo quindi che $n \geq 5$ e che \mathcal{P} non sia un ciclo. Allora vi sono in essa almeno due vertici ripetuti (di cui almeno uno non agli estremi), diciamo $v_i = v_j$, con $0 \leq i < j \leq n$ (e $(i, j) \neq (0, n)$). Se $j - i$ è pari, allora la passeggiata chiusa

$$u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_i e_{j+1} v_{j+1} \dots v_{n-1} e_n v_n = u$$

ha una lunghezza dispari strettamente minore di quella di \mathcal{P} , e dunque concludiamo per ipotesi induttiva che esiste un ciclo di lunghezza dispari in G . Se invece $j - i$ è dispari, allora

$$v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots v_{j-1} e_j v_j = v_i$$

è una passeggiata chiusa di lunghezza dispari strettamente inferiore ad n , e di nuovo si conclude applicando l'ipotesi induttiva. ■

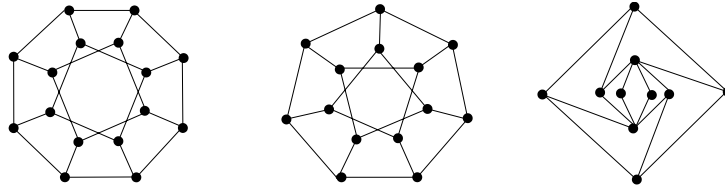
DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.14 Possiamo chiaramente assumere che G sia connesso. Se G è bipartito sull'insieme $V = A \cup B$ di vertici, allora i vertici di ogni ciclo di G , nell'ordine in cui compaiono nel ciclo, appartengono alternativamente ai due insiemi disgiunti A e B . Poiché il ciclo si deve chiudere allo stesso vertice da cui inizia, si conclude che il numero dei suoi lati (cioè di 'salti' tra A e B) deve essere pari.

Viceversa, supponiamo che G non contenga cicli di lunghezza dispari. Poiché G è connesso, per ogni coppia a e b di vertici è definita la distanza $d_G(a, b)$. Sull'insieme V dei vertici di G definiamo una relazione \sim ponendo $a \sim b$ se $d_G(a, b)$ è pari. Chiaramente, la relazione \sim è riflessiva e simmetrica. Supponiamo che per $a, b, c \in V$ sia $a \sim b$ e $b \sim c$. Allora esistono due cammini semplici di lunghezza pari, C_2 e C_1 , rispettivamente tra a e b , e tra b e c . Supponiamo, per assurdo, che la distanza tra a e c sia dispari; allora esiste un cammino semplice C_3 tra c e a di lunghezza dispari. Percorrendo di seguito i cammini C_1 , C_2 e C_3 si ottiene una passeggiata chiusa di lunghezza dispari. Per il Lemma 2.15 esiste allora un ciclo di lunghezza dispari in G , e questo contraddice l'ipotesi su G . Dunque \sim è una relazione d'equivalenza su V .

Sia ora $e = \{a, b\}$ un lato di G (esiste perché G ha almeno due vertici ed è connesso), e siano, rispettivamente A e B le classi di equivalenza di a e di b . Poiché $a \not\sim b$, $A \cap B = \emptyset$. Sia $u \in V$, e supponiamo, per assurdo, che u abbia distanza dispari sia da a che da b . Siano C_1 e C_2 cammini di lunghezza minima, rispettivamente tra a e u , e tra u e b . Percorrendo di seguito C_1 , C_2 ed il lato e , si ottiene allora una passeggiata chiusa di lunghezza dispari che inizia e termina in a , il che per l'ipotesi su G ed il Lemma 2.15, è una contraddizione. Dunque u ha distanza pari o da a o da b , e dunque $u \in A \cup B$. Pertanto $V = A \cup B$. Chiaramente, infine, nessun lato di G congiunge vertici che stanno entrambi in A o in B (perché in tal caso questi avrebbero distanza 1 e non sarebbero quindi in relazione). In conclusione, G è bipartito negli insiemi di vertici A e B . ■

Esercizio 2.13. Dati $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$, dire quanti archi ha $K_{n,m}$? Si discuta, al variare di n ed m l'esistenza di un cammino o di un circuito euleriano in $K_{n,m}$.

Esercizio 2.14. Si dica quali tra i seguenti grafi sono bipartiti:



Accoppiamenti: Teoremi di König e di Hall. Dodici nobili cavalieri vengono incaricati da Re Artù di mettersi al servizio di altrettante indifese (ma fortunate?) damigelle. Durante un'animata seduta della Tavola Rotonda, ogni cavaliere esprime la propria preferenza per

quattro delle dame. Ne nasce un pandemonio, e alla fine Artù assegna al Mago Merlino il compito di associare ad ogni cavaliere una damigella in modo che ad ognuno vada una delle sue predilette. È possibile fare ciò?

È chiaro che non sempre questo è possibile. Ad esempio, ovviamente non lo è se una delle dame non è nella rosa di favorite di alcun cavaliere (per quale motivo sentiamo che nella vita reale sarà proprio una circostanza del genere a verificarsi⁵, è un caso particolare di uno dei problemi fondamentali delle società umane, e non ci aspettiamo che sia la matematica a risolverlo. Un'altra questione è perché non vengano prese in considerazione anche le eventuali preferenze delle dodici fanciulle, ma, come da verbale risulta che ebbe a dichiarare Lancillotto, "Se dobbiamo tener conto anche dei desideri delle donne, dove mai andremo a finire?").

Comunque sia, i dati del problema possono essere convenientemente codificati mediante un grafo bipartito, nel quale l'insieme dei vertici si ripartisce nell'insieme C dei cavalieri e quello D delle dame, ed i lati indicano le preferenze di ciascun cavaliere (nel nostro esempio specifico, ogni vertice di C è adiacente a quattro vertici di D) Il problema del Mago Merlino, una volta disegnato il grafo, è quello di trovare dodici lati che accoppiano tutti e ventiquattro i vertici del grafo.

Abbiamo osservato che un'ovvia condizione necessaria a che ad ogni dama sia assegnato un diverso cavaliere è che ognuna sia tra le favorite di almeno uno dei cavalieri. Estendendo in modo altrettanto ovvio questa osservazione, si comprende che una condizione necessaria affinché possa essere fatta una assegnazione completa è che per ogni sottoinsieme S di dame un numero almeno uguale di cavalieri indichi una dama di S tra le proprie favorite.

Come non sempre accade in matematica, questa ovvia condizione necessaria risulta anche sufficiente a che si possa stabilire una assegnazione ("accoppiamento") completo. Questo è il contenuto del famoso *Teorema dei matrimoni* di P.Hall (1936), che proveremo in questa sezione. Si chiama così, perché in genere viene introdotto evocando un'idilliaca riunione di un certo numero di ragazzi e ragazze, ove ciascuna ragazza prova sentimenti di ammirazione, inclinazione o, almeno, di simpatia, verso alcuni dei ragazzi, e viceversa; e la questione è quale sia il massimo numero di matrimoni (etero) che è possibile combinare rispettando le reciproche simpatie.

Cominciamo dunque con il formalizzare il problema. Un **accoppiamento** in un grafo G (non necessariamente bipartito) è un insieme di lati di G che a due a due non hanno estremi in comune. Un accoppiamento A di G si dice *massimo* se non esistono accoppiamenti di G costituiti da un numero maggiore di lati.

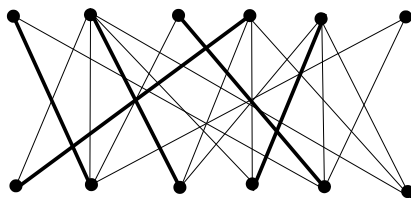


Figura 2.11: un accoppiamento massimo in un grafo bipartito

⁵in ogni caso con una frequenza superiore alla sua probabilità matematica, che è circa 1/11.

Sia $V_1 \cup V_2$ la partizione dell'insieme dei vertici di un grafo bipartito G , e supponiamo $|V_1| \leq |V_2|$. Un accoppiamento A di G si dice **completo** se $|A| = |V_1|$. Poiché G è bipartito, questo significa che ogni vertice di V_1 appartiene ad uno (ed un solo) lato dell'accoppiamento. Quindi, i lati di un accoppiamento completo realizzano una applicazione iniettiva tra l'insieme dei vertici V_1 e V_2 .

Dedurremo il Teorema di Hall da un teorema di König del 1916 (e che oggi è più noto di quanto fosse ai tempi del lavoro di Hall, il quale produsse una propria e complicata dimostrazione), per enunciare il quale abbiamo bisogno di introdurre una nuova definizione.

Una **copertura** di un grafo (non necessariamente bipartito) G è un sottoinsieme U di vertici tale che ogni lato di G è incidente ad almeno un vertice appartenente ad U . Si denota con $\beta(G)$ (*indice di copertura* di G) il minimo numero di vertici che è necessario impiegare per avere una copertura di G .

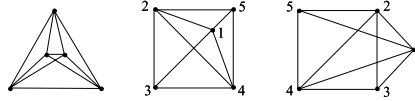


Figura 2.12: una copertura minima in un grafo bipartito.

L'indice di copertura $\beta(G)$ e l'indice di stabilità $\alpha(G)$ (vedi sezione 1.4) di un grafo (non necessariamente bipartito) G , sono legati dalla seguente relazione.

Proposizione 2.16. *Sia G un grafo con n vertici. Allora*

$$\alpha(G) + \beta(G) = n.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che, un sottoinsieme S dell'insieme V dei vertici di G è un sottoinsieme stabile se e solo se $V \setminus S$ è una copertura di G . Segue $\alpha(G) \geq n - \beta(G)$ e $n - \alpha(G) \geq \beta(G)$. Quindi $\alpha(G) + \beta(G) = n$. ■

Teorema 2.17. (König) *Sia G un grafo bipartito con almeno due vertici. Il massimo numero di lati di un accoppiamento di G coincide con $\beta(G)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito; e siano $A \subseteq E$ un accoppiamento di G , e $U \subset V$ una copertura di G . Allora, per definizione di copertura, ogni lato $e \in A$ ha almeno un estremo in U ; possiamo quindi associare ad ogni elemento e di A un vertice $v(e) \in U$, tale che $v(e)$ è un estremo di e . Poiché i lati di A a due a due non hanno estremi in comune, ciò definisce una iniezione da A in U , e dunque prova che $|A| \leq |U|$. In particolare, se A è un accoppiamento massimo e U una copertura minima si ha $|A| \leq |U| = \beta(G)$.

Proviamo ora che se A è un accoppiamento massimo di G , allora è possibile scegliere un vertice di ciascun lato di A in modo da ottenere una copertura, che ha quindi lo stesso numero di elementi di A . Quindi $\beta(G) \leq |A|$, che insieme con la disuguaglianza provata prima fornisce la validità dell'enunciato.

Sia dunque A un accoppiamento massimo di $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Diciamo che un vertice è saturato (da A) se appartiene a qualche (e quindi ad uno solo) lato in A , e diciamo che un cammino semplice, con almeno un lato, di G ,

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

è alterno, se il primo lato e_1 non appartiene ad A , e i lati successivi appartengono alternativamente ad A e ad $E \setminus A$. Supponiamo che C sia un cammino alterno che inizia e termina con vertici v_0 e v_k non saturati da A . Allora anche l'ultimo lato di C non appartiene ad A , e C non è un ciclo (dato che ha un numero dispari di lati); si vede quindi che togliendo da A i lati che compaiono in C , e rimpiazzandoli con i restanti lati di C (che non appartengono ad A), si ottiene un accoppiamento A' che ha un numero di lati maggiore, contro la nostra assunzione sulla massimalità dell'ordine di A . Possiamo quindi concludere che: *non esistono cammini alterni che iniziano e terminano in vertici entrambi non saturati*.

Da ciò segue che se $e \in A$, allora non è possibile che da entrambi gli estremi di e partano cammini alterni che terminano in vertici non saturati (perché in tal caso, congiungendo i due cammini si troverebbe da qualche parte nel cammino ottenuto un cammino alterno che viola la condizione di sopra). Associamo ora ad ogni $e \in A$ un estremo $u(e)$ nella maniera seguente: $u(e)$ è il solo estremo di e dal quale parte un cammino alterno che termina in un vertice non saturato, se questo esiste, altrimenti si pone $u(e)$ il vertice di e che appartiene a V_1 . Proviamo che l'insieme di vertici $C = \{u(e) \mid e \in A\}$ così ottenuto è una copertura di G . Sia $f = \{u, w\}$ un lato di G . Se $f \in A$, f è incidente a $u(f) \in C$. Supponiamo quindi che $f \notin A$. Se uno dei due estremi (diciamo u) di f non è saturato, allora w deve esserlo (altrimenti potremmo aggiungere il lato f all'accoppiamento A), quindi w è estremo di un lato $e' \in A$; ma allora (poiché $w f u$ è un cammino alterno che termina in un vertice non saturato) $w = u(e')$. Supponiamo infine che u e w siano entrambi saturati; uno dei due appartiene a V_1 ; sia $u \in V_1$ e sia $e_1 = \{u, u'\} \in A$. Se $u = u(e')$, siamo a posto; altrimenti $u(e') = u'$, e quindi, per la definizione di $u(e')$, si ha che da u' parte un cammino alterno $u' e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ che termina in un vertice non saturato v_k . Ma allora anche $w f u' e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ è un cammino alterno che termina in un vertice non saturato e quindi, se e_2 è il lato di A che contiene w , è per definizione, $w = u(e_2)$. Questo mostra che C è una copertura di G , e completa la dimostrazione del Teorema. ■

Come promesso, dal Teorema di König possiamo ora dedurre abbastanza facilmente quello di Hall. Prima, dobbiamo introdurre ancora nuove notazioni.

Sia v un vertice del grafo $G = (V, E)$; denotiamo con $N_G(v)$ l'insieme dei vertici di G adiacenti a v , cioè l'insieme dei $w \in V$ tali che $\{v, w\} \in E$. Se S è un sottoinsieme dell'insieme V dei vertici di G , denotiamo con $N_G(S)$ l'insieme dei vertici di G che sono adiacenti ad almeno un elemento di S , ovvero $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$.

Teorema 2.18. *Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| \leq |V_2|$. Allora G ha un accoppiamento completo se e soltanto se $|N_G(S)| \geq |S|$ per ogni sottoinsieme S di V_1 .*

DIMOSTRAZIONE. Se G ha un accoppiamento completo, è chiaro che la condizione dell'enunciato è soddisfatta.

Viceversa, supponiamo che $|N_G(S)| \geq |S|$ per ogni sottoinsieme S di V_1 , e sia U una copertura di G . Sia $S = V_1 \setminus U$; allora, poiché ogni lato di G ha almeno un estremo in U , $N_G(S) \subseteq U \cap V_2$.

Dunque $|U \cap V_2| \geq |N_G(S)| \geq |S| = |V_1| - |U \cap V_1|$, e quindi

$$|U| = |U \cap V_1| + |U \cap V_2| \geq |U \cap V_1| + (|V_1| - |U \cap V_1|) = |V_1|.$$

Pertanto $\beta(G) \geq |V_1|$, e per il Teorema di König si conclude che G ha un accoppiamento completo. ■

Di solito, si parla dei teoremi di König e di Hall come di teoremi "equivalenti"; intendendo con ciò che ciascuno si può dedurre in modo abbastanza agevole dall'altro (esercizio 2.42 – mentre nell'esercizio 2.43 si tratteggia una dimostrazione diretta del teorema di Hall). Entrambi poi discendono piuttosto facilmente dal Teorema di Menger, che vedremo più avanti.

Il teorema di Hall ha applicazioni in varie parti della matematica e, a seconda del contesto, può assumere diverse formulazioni, a volte apparentemente lontane dalla teoria dei grafi. Vediamone una delle più comuni. Sia $\mathcal{F} = A_1, A_2, \dots, A_n$ una famiglia di sottoinsiemi (non necessariamente distinti) di un insieme X ; un *sistema di rappresentanti distinti* (SDR) di \mathcal{F} è una n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) di elementi distinti di X tale che $a_i \in A_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Teorema 2.19. (P. Hall) *Una famiglia A_1, A_2, \dots, A_n di sottoinsiemi dell'insieme X ammette un sistema di rappresentanti distinti se e soltanto se*

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S| \quad \text{per ogni } \emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se (a_1, a_2, \dots, a_n) è un sistema di rappresentanti distinti della famiglia di insiemi, allora per ogni $\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ si ha $\bigcup_{i \in S} A_i \supseteq \{a_i \mid i \in S\}$, e poiché gli a_i sono a due a due distinti la condizione di Hall è soddisfatta. Per il viceversa, consideriamo il grafo bipartito G sui vertici $V_1 = X$ e $V_2 = \{1, 2, \dots, n\}$, dove due vertici $x \in X$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ sono adiacenti se e solo se $x \in A_i$. Allora, per ogni $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|\bigcup_{i \in S} A_i| = N_G(S)$, e la condizione di Hall implica, per il Teorema 2.18, che esiste un accoppiamento completo di G . I vertici in X dei lati che formano tale accoppiamento costituiscono un sistema di rappresentanti distinti per la famiglia A_1, \dots, A_n . ■

Alla teoria che abbiamo sviluppato sugli accoppiamenti nei grafi bipartiti, si possono ricondurre anche altri problemi di assegnazione, solo apparentemente più complessi. Come, ad esempio, quelli in cui sono ammesse assegnazioni multiple. Un caso tipico è quello del giorno libero. All'inizio dell'anno scolastico il preside di una scuola predispone l'orario delle lezioni, assegnando ad ogni insegnante un giorno libero settimanale (scelto dal Lunedì al Sabato); preventivamente, egli chiede ad ogni insegnante di indicare una preferenza per due fra i sei giorni disponibili. Qual'è il massimo numero di docenti che il preside è in grado di soddisfare, tenendo conto che per ciascun giorno della settimana al più cinque insegnanti possono avere quello come giorno libero? Il preside può procedere in questo modo: disegna un grafo bipartito in cui da una parte mette i docenti della scuola, e dall'altra parte sistema *cinque diversi punti* per ciascun giorno della settimana, per un totale quindi di 30 vertici; quindi traccia i lati che rappresentano le preferenze degli insegnanti, avendo cura, se ad esempio l'insegnante x desidera il Martedì, di congiungere il vertice x con tutti e cinque i vertici del Martedì. In questa maniera egli riconduce il suo problema a quello di un grafo bipartito, e può usare la teoria di questo paragrafo (e l'algoritmo che trovate nella sezione degli esercizi).

Di fatto, sulla base di questa osservazione, il preside può anche disegnare solo un grafo con un solo vertice per ogni giorno della settimana, ed applicare la seguente proposizione, che non è difficile dedurre dal teorema di Hall.

Proposizione 2.20. *Sia G un grafo bipartito sull'insieme di vertici $V_1 \cup V_2$, allora condizione necessaria e sufficiente per poter associare ogni elemento di V_1 ad un vertice di V_2 in modo che ciascun elemento di V_2 risulti assegnato a non più di d elementi di V_1 , è che, per ogni sottoinsieme S di V_1 , si abbia:*

$$|N_G(S)| \geq \frac{1}{d}|S|.$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. ■

Esercizio 2.15. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| = n$, e tale che per ogni $1 \leq k \leq n$ esiste un vertice $v_k \in V_2$ il cui grado è k . Si provi che G ammette un accoppiamento completo.

Esercizio 2.16. Sia A una matrice a coefficienti in $\{0, 1\}$. Si provi che il minimo numero di linee (righe o colonne) che contengono tutti gli 1 della matrice è uguale al massimo numero di 1 che compaiono a due a due in linee diverse (così a volte viene enunciato il Teorema di König).

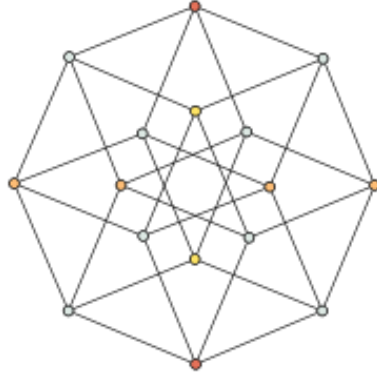
Esercizio 2.17. Sia H un sottogruppo di indice finito n del gruppo G . Un insieme di n elementi $\mathcal{S} = \{g_1, \dots, g_n\}$ di G è detto un *sistema di rappresentanti* delle classi laterali destre modulo H , se $\{Hg_i \mid i = 1, \dots, n\}$ è l'insieme di tutte le classi laterali destre di G modulo H (ovvero, se G è l'unione disgiunta $G = Hg_1 \cup \dots \cup Hg_n$). Analogamente, \mathcal{S} si dirà un sistema di rappresentanti delle classi laterali sinistre modulo H , se $\{g_iH \mid i = 1, \dots, n\}$ è l'insieme di tutte le classi laterali sinistre di G modulo H . Si provi che, per ogni sottogruppo H di indice finito n in G , esiste un insieme di n elementi di G che è contemporaneamente un sistema di rappresentanti delle classi laterali destre, ed un sistema di rappresentanti delle classi laterali sinistre modulo H .

Esercizio 2.18. Si provi che un grafo bipartito regolare ammette sempre un accoppiamento completo. Più in generale, sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito tale che tutti i vertici di V_1 hanno lo stesso grado, così come tutti quelli di V_2 (ma i due gradi possono essere diversi); si provi che G ammette un accoppiamento completo.

Esempio: gli ipercubi. Dato $n \geq 2$, il grafo Q_n , n -ipercubo (o anche n -cubo), è il grafo i cui vertici sono le n -uple a coefficienti in $\{0, 1\}$, ed i cui lati sono tutte e sole le coppie di tali n -uple che differiscono esattamente per una componente. Q_3 non è altro che l'usuale cubo. Sia $Q_n = (V, E)$, allora $V = \{0, 1\}^n$ ha cardinalità 2^n ; inoltre, Q_n è regolare di valenza n , quindi, in particolare, $2|E| = 2^n n$, e dunque $|E| = n2^{n-1}$.

Se $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ sono vertici di Q_n , allora $d_{Q_n}(x, y)$ è il numero di componenti di x diverse dalle corrispondenti in y , cioè la cosiddetta *distanza di Hamming* $d_{Q_n}(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$ (lo si dimostri formalmente). Quindi $\text{diam}(Q_n) = n$; si osservi che il numero di archi di Q_n è inferiore a quello massimo ammesso dal Corollario 2.12.

Esercizio 2.19. Si provi che $g(Q_n) = 4$ per ogni $n \geq 2$, e che Q_n è planare se e solo se $n = 2, 3$.

Figura 2.13: il grafo Q_4

È facile vedere che Q_n è un grafo bipartito; infatti una bipartizione dei vertici è data da V_0 , l'insieme dei vertici la cui somma delle coordinate è pari, e da V_1 quello dei vertici la cui somma delle coordinate è dispari. Un accoppiamento completo (che esiste perchè Q_n è bipartito e regolare), formato da 2^{n-1} archi, si ottiene considerando gli archi costituiti da vertici che differiscono in una fissata coordinata (ad esempio, la prima). Una copertura di Q_n si ottiene prendendo tutti i vertici con una delle coordinate fissata, ad esempi quelli la cui prima coordinata è 0. L'indice di stabilità di Q_n è chiaramente $\alpha(Q_n) = 2^{n-1}$.

Proviamo ora che: *per ogni $n \geq 2$, Q_n è hamiltoniano*. Procediamo per induzione su n ; l'affermazione essendo banale per $n = 2$. Assumiamo quindi $n \geq 3$ e supponiamo che Q_{n-1} sia hamiltoniano. Sia $v_1 = (0, 0, \dots, 0)$ vertice di Q_n . Siano A e B i sottografi indotti in Q_n , rispettivamente, dai vertici la cui prima coordinata è 0, e da quelli la cui prima coordinata è 1. In particolare, esiste un cammino hamiltoniano v_1, \dots, v_N in A (con $N = 2^{n-1}$); considerando la sequenza dei vertici u_1, \dots, u_N , che si ottengono, per ogni $i = 1, \dots, N$, sostituendo con 1 la prima coordinata di v_i , si ottiene un cammino hamiltoniano in B . Ora, un ciclo hamiltoniano in Q_n si costruisce percorrendo il cammino v_1, \dots, v_N , passando quindi a u_N, u_{N-1}, \dots, u_1 e quindi chiudendo in v_1 .

Digressione: perché i sessi sono due. Supponiamo che gli abitanti di un diverso pianeta, che (per non sprecare fantasia) chiameremo Olosac, si suddividano in tre sessi, e che i rapporti sentimentali e le "storie" avvengano necessariamente per triadi, e non per coppie, di individui appartenenti ciascuno ad uno dei tre diversi sessi⁶. Il problema dei matrimoni su Olosac sarebbe quindi esposto nel modo seguente:

Sia G un grafo in cui l'insieme dei vertici è ripartito in tre sottoinsiemi A , B , e C (i tre sessi), ed i cui lati (le reciproche simpatie individuali tra vertici di sesso diverso) hanno gli estremi in due insiemi diversi della partizione (un grafo del genere si chiama grafo *tripartito*). Qual è il massimo numero di triangoli indipendenti (cioè, a due a due privi di vertici in comune) che

⁶In verità, anche su Olosac si formano triadi omo- o bi-sessuali: ma sempre a tre a tre ci si mette. Il due è aborrito dagli abitanti di quel lontano pianeta.

è possibile trovare nel grafo? Supponendo - per semplicità - che ci sia lo stesso numero n di individui di ciascun sesso, esistono condizioni necessarie e sufficienti facilmente controllabili affinché si trovino n triangoli indipendenti (e che quindi ognuno si possa alternare secondo le proprie inclinazioni)?

Innanzitutto osserviamo che, su Olosac, combinare anche *un solo* matrimonio (a tre) può essere un problema persino per la matematica. Con due sessi, è sufficiente una reciproca simpatia tra due individui. Su Olosac le cose possono essere molto più infelici che da noi: la Figura 3.5 mostra un caso in cui tra 9 individui (3 per sesso) vi sono 13 simpatie tra coppie, ma nessun triangolo (con gli stessi vertici e la stessa tripartizione, è possibile anche trovare grafi con 18 lati e nessun triangolo - se ne cerchi uno per esercizio - i quali però presentano dei comportamenti 'anomali', ad esempio che ogni vertice in A sia connesso soltanto a vertici di B o di C).

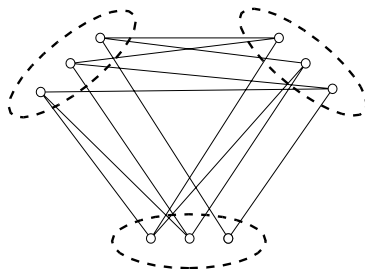


Figura 2.14: un caso di malasorte su Olosac

Detto questo, ci viene, però, il dubbio che forse la psicologia degli abitanti di Olosac sia strutturata in modo che le simpatie tra individui non derivino dalla sovrapposizione fortunata di preesistenti simpatie a coppie, ma nascano quasi naturalmente soltanto come simpatie tra terne, e che anzi le simpatie tra coppie di individui di diverso sesso siano viste come disdicevoli (per quanto in genere tollerate durante l'età adolescenziale). Possiamo, continuando di questo passo, immaginare allora che gli olosacchiani (sempre che ne rimanga loro il tempo) abbiano sviluppato una matematica meno 'binaria' della nostra; nella quale un triangolo sia una cosa del tutto naturale, almeno quanto, e forse anche più, che un segmento. Se così è, la 'nostra' definizione di grafo deve apparire bizzarra agli occhi degli olosacchiani, per i quali la definizione naturale potrebbe invece essere:

- un *olografo* $\Delta = (V, T)$, è un insieme di vertici V ed un insieme di terne $\{v_1, v_2, v_3\}$ di elementi distinti di V dette *triadi*, etc. etc.

Un olografo arriva dunque già provvisto di triangoli (o, per usare il termine olosacchiano, triadi), altrimenti è banale (dal nostro punto di vista, un olografo non ha lati che non siano nel bordo di un triangolo). In un testo di teoria degli olografi il primo teorema è:

Teorema. Per ogni vertice v di un olografo $\Delta = (V, T)$, sia $d_\Delta(v)$ il numero di triadi incidenti a v . Allora $\sum_{v \in V} d_\Delta(v) = 3|T|$.

A questo punto, un olografo Δ si dice tripartito se l'insieme dei suoi vertici è unione disgiunta di tre sottoinsiemi non vuoti $A \cup B \cup C$, ed ogni triade di Δ ha esattamente un vertice in ogni componente. Un *interzamento* di un olografo tripartito Δ è una famiglia di triadi di

Δ che a due a due non hanno vertici in comune. È possibile trovare (come nel teorema di König) in altro modo quale sia il numero di triadi di un interzamento massimo in un olografo tripartito?

L'idea di copertura si può anche definire allo stesso modo: una *copertura* di un olografo è un insieme U di vertici tale che ogni triade dell'olografo è incidente ad almeno un vertice di U . Con questa definizione, l'analogo del teorema di König non funziona: la figura 3.6 mostra un olografo tripartito in cui gli interzamenti massimi sono costituiti da un'unica triade, ma in cui il minimo numero di vertici di una copertura è 2.

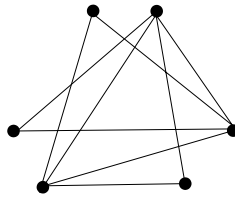


Figura 2.15: un olografo tripartito

Personalmente, non sono riuscito a trovare un possibile corrispondente del teorema di König per gli olografi. Per quanto riguarda il teorema di Hall, l'ovvia (per noi, non sappiamo quanto per un olosacchiano) condizione necessaria per l'esistenza di un interzamento completo, cioè che per ogni sottoinsieme di vertici (di ciascun sesso) esistano almeno un pari numero di triadi che sono incidenti a vertici di quell'insieme, non è sufficiente: l'esempio in figura 3.6 lo dimostra.

Ma il peggio deve ancora venire. Anche se noi non siamo in grado di trovare delle condizioni esprimibili in modo semplice che siano equivalenti all'esistenza di un interzamento completo, possiamo chiederci se esiste un algoritmo efficiente, del genere dell'algoritmo ungherese che, dato un olografo tripartito ne determina un interzamento massimo. È stato provato che questo problema è NP-completo; ovvero dello stesso tipo di complessità del problema del cammino hamiltoniano. Qualcosa di presumibilmente intrattabile dal punto di vista di un algoritmo ottimale, e comunque concettualmente assai diverso dal caso, tutto sommato semplice, degli accoppiamenti. Nell'eventualità che qualcuno avesse intenzione di lagnarsi di come vanno le cose sulla terra.

2.5 Grafi estremi. Teorema di Turán.

In questo paragrafo torniamo a considerazioni di carattere più astratto intorno ai grafi bipartiti, caratterizzandone alcuni come i grafi con il massimo numero di lati con la proprietà di essere privi di triangoli (ovviamente: fissato il numero dei vertici).

In effetti, ciò che proveremo è un caso particolare di un teorema più generale (dovuto a Turán, ed al quale accenneremo alla fine), ma ci serve come esempio di un tipo di problemi che costituiscono quella che viene chiamata *teoria estrema* dei grafi. Naturalmente, non vi è una definizione precisa di che cosa consista la teoria estrema; il tipico problema di cui si occupa è: fissata una certa proprietà \mathcal{P} , cosa si può dire dei grafi che hanno il massimo (o,

a volte, minimo) numero di lati tra quelli che (con lo stesso numero di vertici) soddisfano la proprietà \mathcal{P} ? I grafi di questo tipo si chiamano *estremali* rispetto a \mathcal{P} ; è possibile determinarli completamente? È intuibile che molto spesso si tratta di problemi molto difficili. Altri esempi di problemi estremali sono la classificazione dei grafi di Moore, e quella delle gabbie cubiche, a cui abbiamo accennato nella sezione 2.4.

La proprietà che qui ci interessa è quella di non possedere sottografi isomorfi al triangolo K_3 (oppure, nella versione generale, sottografi isomorfi ad un grafo completo K_r). Chiaramente, ogni grafo bipartito soddisfa questa proprietà; quindi, come primo passo, cerchiamo, fissato il numero n di vertici, quali siano i grafi bipartiti su un n vertici che possiedono il massimo numero di lati. Ovviamente possiamo restringere la nostra ricerca ai grafi bipartiti completi K_{n_1, n_2} con $n = n_1 + n_2$.

Dato un numero reale x , denotiamo con $\lfloor x \rfloor$ il massimo numero intero m tale che $m \leq x$ ($\lfloor x \rfloor$ si chiama la *parte intera* di x). Notiamo quindi un semplice proprietà numerica.

Lemma 2.21. *Siano n_1, n_2 interi positivi e $n = n_1 + n_2$. Allora $n_1 n_2 \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$n^2 \geq n^2 - (n_1 - n_2)^2 = (n_1 + n_2)^2 - (n_1 - n_2)^2 = 4n_1 n_2,$$

e quindi $n_1 n_2 \leq n^2/4$. Poiché $n_1 n_2$ è un intero si ha $n_1 n_2 \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$. ■

Ora, usando ad esempio l'argomento di questa dimostrazione, si vede facilmente che se $n = 2m$ è pari, allora si ha l'uguaglianza $n_1 n_2 = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se e soltanto se $n_1 = m = n_2$; mentre se $n = 2m + 1$ è dispari, allora l'uguaglianza si ottiene per $n_1 = m + 1$ e $n_2 = m$.

Se $G = K_{n_1, n_2}$ è il grafo bipartito completo con $n = n_1 + n_2$ vertici, allora il numero di lati di G è $n_1 n_2$. Definiamo il *Grafo di Turán* $T_2(n)$, nel modo seguente

$$T_2(n) = \begin{cases} K_{m, m} & \text{se } n = 2m \text{ è pari} \\ K_{m+1, m} & \text{se } n = 2m + 1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Da quanto osservato e provato sopra si ricava subito la seguente conclusione.

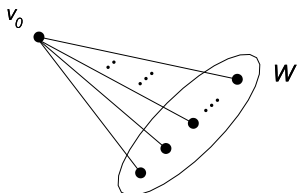
Proposizione 2.22. *Sia $n \geq 2$, e sia G un grafo bipartito con n vertici ed il massimo numero possibile di lati. Allora il numero di lati di G è $\lfloor n^2/4 \rfloor$, e G è $T_2(n)$.*

Ora, in questa analisi abbiamo considerato i grafi bipartiti perché essi sono certamente privi di triangoli. Ma, chiaramente, vi sono molti grafi privi di triangoli che non sono bipartiti. Il Teorema di Turán (1941) mostra che il prendere in considerazione tutti questi, invece dei soli grafi bipartiti, non cambia la situazione.

Teorema 2.23. (Turán). *Sia $n \geq 2$, e sia G un grafo privo di triangoli, con n vertici ed il massimo numero possibile di lati. Allora G è (isomorfo a) $T_2(n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato l'intero $n \geq 2$, Sia $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$, ed il massimo numero possibile $q = |E|$ di lati, essendo soggetto alla condizione di non contenere triangoli. Poiché il grafo di Turán $T_2(n)$ ha n vertici e non contiene triangoli, il numero di lati di G è almeno uguale a quello di $T_2(n)$; quindi $q \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Sia $v_0 \in V$ un vertice di grado massimo in G , e sia W l'insieme dei vertici adiacenti a v_0 in G (quindi $|W| = d_G(v_0)$). Consideriamo ora il grafo bipartito completo con insieme dei vertici bipartito da $W \cup (V \setminus W)$, e lo chiamiamo T . G e T sono grafi sullo stesso insieme V di vertici; proviamo che per ogni $v \in V$ si ha $d_G(v) \leq d_T(v)$. Supponiamo prima $v \in W$; allora v non può essere adiacente ad altri vertici di W , perché in tal caso G conterrebbe un triangolo.



Quindi $d_G(v) \leq |V \setminus W| = d_T(v)$. Supponiamo che $v \notin W$; allora, per la scelta di v_0 ,

$$d_G(v) \leq d_G(v_0) = |W| = d_T(v).$$

Dunque, per ogni $v \in V$, $d_G(v) \leq d_T(v)$. Ciò in particolare comporta (Teorema 1.1) che il numero q di lati di G non supera quello dei lati di T . Poiché T è bipartito su n vertici, la Proposizione 2.22 assicura che quest'ultimo è al più $\lfloor n^2/4 \rfloor$. Ma $q \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$, e quindi $q = \lfloor n^2/4 \rfloor$, che è quindi anche il numero di lati di T . Questo implica che

$$d_G(v) = d_T(v)$$

per ogni $v \in V$. Pertanto, se $v \in W$, allora il numero di lati in G incidenti a v è uguale a $d_T(v) = |V \setminus W|$; poiché, come abbiamo osservato in precedenza, v non è adiacente ad alcun altro vertice in W , si conclude che v è adiacente a tutti i vertici di $V \setminus W$. Considerando i lati di G adiacenti a v , al variare di v in W , otteniamo dunque tutti i lati di T . Quindi T è un sottografo di G ; ma T e G hanno lo stesso numero di lati, e dunque $T = G$. A questo punto, per concludere basta osservare che, essendo massimo il numero di lati di T , per la Proposizione 2.22 si ha $T = T_2(n)$. ■

Per comprendere l'enunciato della forma generale del Teorema di Turán occorre innanzi tutto generalizzare nella maniera naturale l'idea di grafo bipartito.

Sia $r \geq 2$, un grafo si dice **r -partito** se l'insieme V dei suoi vertici ammette una partizione in r sottoinsiemi non vuoti V_1, \dots, V_r tale che gli estremi di ogni lato del grafo appartengono a due diversi elementi della partizione.

Se n_1, n_2, \dots, n_r sono interi positivi il grafo (*completo r -partito*) K_{n_1, n_2, \dots, n_r} è il grafo il cui insieme dei vertici è l'unione disgiunta (r -partizione) $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$, dove $|V_i| = n_i$, per ogni $i = 1, \dots, r$, ed i cui lati sono tutti e soli quelli i cui estremi appartengono a termini diversi della partizione sui vertici. Si verifica facilmente che il numero di lati di questo grafo è

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i n_j. \quad (2.2)$$

La figura 3.5 mostra il grafo completo 3-partito $K_{4,3,3}$, che è uno dei grafi di Turán, dato che ha il massimo numero di lati tra tutti i grafi 3-partiti con 10 vertici.

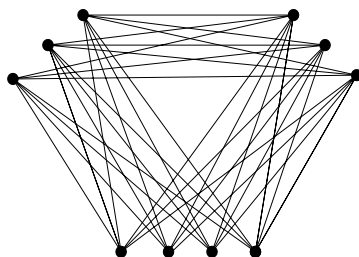


Figura 3.7: il grafo di Turán $T_3(10)$.

Dati i numeri n (numero di vertici) e r (numero di elementi nella partizione dei vertici), con $n \geq r$, dividiamo il primo per il secondo: $n = rm + s$, dove m ed $0 \leq s \leq r - 1$ sono univocamente determinati. Allora

$$n = (r - s)m + s(m + 1)$$

(osserviamo che $m = \lfloor n/r \rfloor$). Il grafo di Turán $T_r(n)$ è il grafo completo r -partito $K_{m,m,\dots,m+1,m+1}$, dove m compare $(r - s)$ volte, e $m + 1$ compare s volte. Il numero di vertici di $T_r(n)$ è quindi n ; con un poco di conti (vedi esercizio 2.48), si trova che, se s è il resto della divisione di n per r , il numero di lati è

$$q(n, r) = \frac{1}{2r} ((r - 1)n^2 - s(r - s)). \quad (2.3)$$

La proprietà rispetto alla quale intendiamo ora descrivere i grafi estremali, è quella di non possedere sottografi isomorfi al grafo completo K_{r+1} ($r \geq 2$). Chiaramente ogni grafo r -partito soddisfa questa proprietà, ma, ancora, ne esistono molti altri.

Teorema 2.24. (Turán). *Siano $n \geq r \geq 2$, e sia G un grafo con n vertici, q lati, e privo di sottografi completi K_{r+1} . Allora $q \leq q(n, r)$. Se $q = q(n, r)$ allora G è il grafo $T_r(n)$.*

La dimostrazione di questo risultato è, come da aspettarsi, tecnicamente più complicata di quella del caso $r = 2$ (Teorema 2.23), ma concettualmente usa gli stessi metodi (più induzione su r). Essa è suggerita negli esercizi 2.49. 2.50.

Un problema simile a quello risolto da Turán riguarda i grafi bipartiti, ed è il problema di Zarankiewicz. Nella sua forma generale chiede qual è il massimo numero di lati di un grafo bipartito che non contenga sottografi isomorfi al grafo completo bipartito $K_{r,s}$. Se G è un grafo bipartito con uno stesso numero di vertici m su entrambi i blocchi della bipartizione, e $2 \leq r \leq m$, si denota con $z(m, r)$ il massimo numero di lati che G può avere in modo da non contenere sottografi isomorfi a $K_{r,r}$. Vi sono diversi lavori sull'argomento, ma il valore esatto di $z(m, r)$ in generale non è noto, neppure per $r = 2$ (si veda la digressione più avanti per alcuni casi in cui il valore esatto può essere trovato).

Digressione: piani proiettivi finiti. Cominciamo con il trovare un limitazione superiore al numero di Zarankiewicz $z(m, 2)$. Osserviamo innanzi tutto che se d_1, \dots, d_m sono numeri reali positivi allora

$$(d_1 + \dots + d_m)^2 \leq m(d_1^2 + \dots + d_m^2). \quad (2.4)$$

(lo si dimostri, ad esempio facendo induzione su m).

Proposizione 2.25. *Sia $m \geq 2$; allora $z(m, 2) \leq \frac{m}{2}(1 + \sqrt{4m - 3})$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ sia un grafo bipartito, con $|V_1| = |V_2| = m$, $q = |E|$, e supponiamo che G non contenga sottografi isomorfi a $K_{2,2}$. Ciò significa che ogni coppia di vertici distinti di V_2 è adiacente ad al più un vertice di V_1 . Ora, il numero di coppie di vertici di V_2 adiacenti ad un $x \in V_1$ è chiaramente uguale a $\binom{d_G(x)}{2}$, mentre il numero totale di coppie di vertici distinti di V_2 è $\binom{m}{2}$. Quanto abbiamo sopra osservato implica dunque che

$$\sum_{x \in V_1} \binom{d_G(x)}{2} \leq \binom{m}{2}.$$

Pertanto, tenendo conto che $\sum_{x \in V_1} d_G(x) = q$, ed applicando la diseuguaglianza (2.4),

$$m(m-1) = 2 \binom{m}{2} \geq \sum_{x \in V_1} d_G(x)^2 - \sum_{x \in V_1} d_G(x) \geq \frac{1}{m} q^2 - q,$$

da cui segue $q(q-m) \leq m^2(m-1)$, e quindi, con un poco di conti,

$$q \leq \frac{m}{2}(1 + \sqrt{4m - 3})$$

che è quello che volevamo. ■

Proviamo ora che, per infiniti valori di m , tale limitazione è la migliore possibile.

Sia $F = GF(p)$ un campo finito con p elementi (dalla teoria generale si sa che p è la potenza di un numero primo), e sia $V \simeq F^3$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo F . Allora, il numero di elementi di F è p^3 . Se v è un vettore non nullo di V , il sottospazio vettoriale (unidimensionale) generato da v è $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in F\}$, e contiene $|F| = p$ elementi, di cui $p-1$ non nulli. Poiché ogni vettore non nullo appartiene ad uno ed un solo sottospazio unidimensionale (quello da esso generato), si conclude che il numero di sottospazi unidimensionali di V è

$$m = \frac{|V| - 1}{p - 1} = \frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1.$$

Il numero di sottospazi di dimensione 2 di V è lo stesso m . Questo si può vedere osservando che, siccome V ha dimensione 3, i sottospazi di dimensione 2 sono in corrispondenza biunivoca con i sottospazi di dimensione 1 del duale V^* che è isomorfo a V come spazio vettoriale; oppure contando le coppie di vettori indipendenti di V (che sono in numero di $(p^3 - 1)(p^2 - 1)$, ed osservando che ogni sottospazio di dimensione 2 contiene esattamente $(p^2 - 1)(p - 1)$ coppie di vettori indipendenti (le sue possibili basi). Denotiamo, rispettivamente con V_1 e V_2 , l'insieme dei sottospazi di dimensione 1 di V e quello dei sottospazi di dimensione 2. Quindi

$$|V_1| = |V_2| = p^2 + p + 1 = m.$$

L'insieme $V_1 \cup V_2$ insieme con la relazione d'incidenza definita dall'inclusione, si chiama *piano proiettivo* su $GF(p)$, e viene denotato con $P(2, p)$: gli elementi di V_1 sono detti *punti* e quelli

di V_2 le rette; e $x \in V_1$ è incidente a $y \in V_2$ se, come sottoinsiemi di V , $x \subseteq y$. Denotiamo con G il grafo sui vertici $V_1 \cup V_2$, definito da tale relazione d'incidenza; G è bipartito su V_1 e V_2 , e non contiene $K_{2,2}$; infatti, ogni coppia di elementi distinti $x = \langle u \rangle, y = \langle v \rangle$ di V_1 è incidente ad uno ed un solo elemento di V_2 (che è lo spazio generato da u e v). Infine, poiché ogni spazio di dimensione 2 contiene esattamente $(p^2 - 1)/(p - 1) = p + 1$ sottospazi di dimensione 1, si ha che G è regolare di valenza $p + 1$. Dunque il numero q di lati di G è:

$$q = \sum_{y \in V_2} d_G(y) = (p + 1)|V_2| = (p + 1)m = (p + 1)(p^2 + p + 1).$$

Si vede quindi che, in questo caso, $q(q - m) = m^2(m - 1)$, e che pertanto $q = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{4m - 3})$. Dunque, se $m = p^2 + p + 1$ dove p è la potenza di un numero primo, la limitazione della Proposizione 2.25 è raggiungibile, e quindi, se p è la potenza di un numero primo:

$$z(p^2 + p + 1, 2) = (p + 1)(p^2 + p + 1).$$

2.6 Esercizi e complementi.

Esercizio 2.20. Si trovino, a meno di isomorfismi, tutti gli alberi con 6 e con 7 vertici.

Esercizio 2.21. Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso e tale che $\sum_{v \in V} d_G(v) > 2|V|$. Si provi che G ha almeno due cicli distinti.

Esercizio 2.22. Sia G un albero con 45 vertici, dei quali 3 sono di grado 5, 4 di grado 4, 5 di grado 3, e nessuno di grado superiore. Quanti sono in G i vertici di grado 1, e quanti quelli di grado 2?

Esercizio 2.23. Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. Siano V_1 l'insieme dei vertici di grado 1, e W quello dei vertici di grado maggiore o uguale a 3. Si provi che se

$$|V_1| \geq \sum_{v \in W} d_G(v)$$

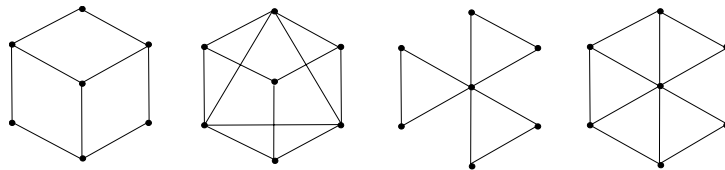
allora $|W| = 1$ e G è un albero con un solo vertice di grado 3, oppure $|W| = 0$ e G è un albero con due vertici di grado 1 (e quindi è un grafo P_n) o è isomorfo al ciclo C_n .

Esercizio 2.24. Sia G un albero, e denotiamo con κ la lunghezza massima di un cammino (semplice) di G . Sia quindi

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{\kappa-1} e_{\kappa} v_{\kappa}$$

un cammino di lunghezza massima in G . Si provi che v_0 e v_{κ} sono vertici di grado 1. Si supponga quindi che $\kappa = 2t$ sia pari, e sia $v = v_t$ il vertice "centrale" del cammino dato; si provi che ogni altro cammino di lunghezza κ di G passa per v . Cosa si può dire se κ è dispari?

Esercizio 2.25. Per ciascuno dei seguenti grafi dire (giustificando le risposte); i) se è vero che il grafo ammette almeno tre spanning-trees tra loro non isomorfi; ii) se è possibile decomporre il grafo in due spanning-trees che non abbiano lati in comune.



Esercizio 2.26. Sia G un grafo. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

- 1) gli spanning-tree di G hanno tutti lo stesso numero di vertici di grado 1;
- 2) gli spanning-tree di G hanno tutti lo stesso numero di lati;
- 3) gli spanning-tree di G hanno tutti lo stesso diametro.

Esercizio 2.27. Sia G un grafo connesso, e siano $T_1 = (V, E_1)$ e $T_2 = (V, E_2)$ due spanning-trees distinti di G . Sia e_1 un lato di T_1 che non appartiene a T_2 ; provare che esiste un lato e_2 , appartenente a T_2 ma non a T_1 , tale che $T = (V, (E_2 \setminus \{e_2\}) \cup \{e_1\})$ è uno spanning-tree di G .

Esercizio 2.28. Sia G un grafo semplice connesso e finito, e sia v un vertice fissato di G . Si provi che G ammette uno spanning-tree A tale che $d_G(v, x) = d_A(v, x)$ per ogni altro vertice x di G .

Esercizio 2.29. Si provi che un grafo connesso in cui ogni vertice ha grado pari ha uno spanning-tree in cui ogni vertice ha grado 1 o pari. Si dia un esempio di un grafo connesso con tutti i vertici di grado dispari tale che ogni suo spanning-tree ha almeno un vertice di grado pari.

Esercizio 2.30. Supponiamo di aver colorato ogni lato di un grafo completo K_n con uno di due colori dati (diciamo: rosso o verde). Si provi che esiste uno spanning-tree di K_n monocromo.

Esercizio 2.31. Siano n, k interi positivi non nulli, e sia V l'insieme delle parole di lunghezza k in un alfabeto con n simboli. Ad ogni lato del grafo completo il cui insieme dei vertici è V assegnamo un costo pari al numero di posizioni in cui le lettere che compongono le due parole agli estremi del lato sono diverse. Qual è il costo di uno spanning-tree minimo?

Esercizio 2.32. Si provi che non esiste una mappa con cinque regioni a due a due confinanti (questo è il problema posto nel 1840 da Móbius, al quale è a volte erroneamente attribuita la congettura dei quattro colori).

Esercizio 2.33. Si provi che $K_{n,m}$ è hamiltoniano se e soltanto se $n = m$. Si provi che se $|n - m| = 1$ allora $K_{n,m}$ ha un cammino (ma non un circuito) hamiltoniano.

Esercizio 2.34. In quanti modi diversi è possibile disporre 4 donne e 4 uomini attorno ad un tavolo, in modo che ognuno abbia accanto a sé persone dell'altro sesso? (ovvero: quanti sono i circuiti hamiltoniani distinti nel grafo bipartito completo $K_{4,4}$?).

Esercizio 2.35. Si provi che il grafo di Heawood è l'unica gabbia cubica di calibro 6.

Esercizio 2.36. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito regolare k -regolare con almeno 3 vertici. Si provino le seguenti affermazioni:

- 1) $|V_1| = |V_2|$;
- 2) Se $k = 2$, allora ogni componente connessa di G è un ciclo di lunghezza pari;
- 3) Se G è connesso, allora $G - e$ è connesso per ogni lato $e \in E$.

Esercizio 2.37. Si costruisca un grafo bipartito planare regolare 3-regolare con 12 vertici. Si provi che per ogni n pari esiste un un grafo bipartito planare regolare 3-regolare con $2n$ vertici.

Esercizio 2.38. Sia G un grafo connesso e bipartito. Si provi che esiste una sola partizione dell'insieme V dei vertici rispetto alla quale G è bipartito.

Esercizio 2.39. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito *bilanciato*, cioè tale che $|V_1| = |V_2|$, e sia $d \geq 2$ il minimo tra i gradi dei vertici di G . Si provi che G ha un ciclo di lunghezza almeno $d + 1$.

Esercizio 2.40. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| \leq |V_2|$, e sia $0 \leq d \leq |V_1|$ tale che $|N_G(S)| \geq |S| - d$ per ogni $S \subseteq V_1$. Si provi che G ammette un accoppiamento formato da $|V_1| - d$ lati.

Esercizio 2.41. Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito, e sia d il massimo grado dei suoi vertici. Si provi che l'insieme E dei lati si può ripartire in d accoppiamenti (parziali) disgiunti.

Esercizio 2.42. Assumendo il Teorema di Hall, si deduca la seguente forma semplificata del Teorema di König. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| \leq |V_2|$; allora G ha un accoppiamento completo se e soltanto se $\beta(G) = |V_1|$. Si cerchi quindi di provare la forma generale del Teorema di König.

Esercizio 2.43. La seguente dimostrazione del teorema di Hall è dovuta ad Halmos e Vaughan; se ne completino i dettagli. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| \leq |V_2|$, e tale che $|N_G(S)| \geq |S|$ per ogni sottoinsieme S di V_1 . Si provi che G ammette un accoppiamento completo procedendo per induzione su $n = |V_1|$. Osservato che per $n = 1$ l'affermazione è banale, si assuma quindi che ogni grafo bipartito con un numero minore di vertici in uno dei due termini della ripartizione verifica il teorema.

- Supponiamo che per ogni $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$ sia $|N_G(S)| \geq |S| + 1$. Si provi che allora G ha un accoppiamento.

- Supponiamo dunque che esista $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$ tale che $|N_G(S)| = |S|$. Si provi che allora sia il grafo indotto da $S \cup N_G(S)$, che quello indotto da $(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus N_G(S))$, soddisfano le ipotesi del teorema. Si concluda applicando l'ipotesi induttiva.

Esercizio 2.44. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito con $|V_1| = m \leq n = |V_2|$, $|E| = q$, che non ammette un accoppiamento completo. Si trovi quel è il massimo valore che può assumere q . Si provi che se, inoltre, G è connesso, allora $q \leq m(n - 2) + 2$, e che tale limitazione è la migliore possibile.

Esercizio 2.45. I circoli scacchistici \mathbb{A} e \mathbb{B} si affrontano in una sfida tra due squadre di sette giocatori ciascuna. I punteggi ELO dei componenti le due squadre sono i seguenti:

squadra A:	a	1825	squadra B:	α	1918
	b	2040		β	2024
	c	1912		γ	1892
	d	1768		δ	1844
	e	1884		ϵ	1758
	f	2012		ϕ	2030
	g	1944		χ	1919

Vengono giocati di seguito tre turni, ognuno dei quali comprende sette partite. Preparare la lista delle partite dei tre turni, tenendo conto che in ogni turno si devono giocare (tra quelle possibili: cioè tra avversari che non si sono ancora incontrati) le partite che minimizzano la media delle differenze dei punteggi ELO (in valore assoluto) sulle sette scacchiere.

Esercizio 2.46. Sia G un grafo con 10 vertici e q lati. Si dica qual è il massimo valore possibile per q , in modo che:

- i) G non contenga triangoli.
- ii) G contenga esattamente un triangolo;
- iii) G contenga esattamente due triangoli;

Esercizio 2.47. Si trovi un grafo G con 8 vertici e diametro 4 che ha il massimo numero di lati. Si provi che G è unico a meno di isomorfismo.

Esercizio 2.48. Si dimostri l'uguaglianza (2.3) [si utilizzi la formula (2.2) e si facciano i conti, oppure, meglio, si provi, utilizzando possibilmente un ragionamento sui grafi che $q(n+r, r) - q(n, r) = (r-1)(n-r) + \binom{r}{2}$ e si applichi l'induzione].

Esercizio 2.49. Sia $G = (V, E)$ un grafo r -partito sull'insieme di n vertici $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$. Si fissi un elemento $v_i \in V_i$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Il sottografo indotto da $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ è un grafo completo K_p (e quindi ha $\binom{r}{2}$ lati), ed ogni vertice che non appartiene ad S è adiacente a $r-1$ vertici di S . Dunque il numero di lati che connettono vertici in S con vertici fuori di S è $(n-r)(r-1)$. Sia G' il sottografo indotto da $V \setminus S$; esso è r -partito con $n-r$ vertici, sia q' il numero dei suoi lati. Si ha allora che $|E| = q' + \binom{r}{2} + (n-r)(r-1)$. Si utilizzi quindi l'induzione e l'esercizio 2.48 per provare che il massimo numero di lati di un grafo r -partito con n vertici è $q(n, r)$.

Esercizio 2.50. 1) Sia $r \geq 2$, e sia $G = (V, E)$ un grafo privo di sottografi isomorfi al grafo completo K_{r+1} . Generalizzando la dimostrazione della prima parte del Teorema 2.23, e facendo induzione su r (il caso iniziale $r = 2$ è già stato provato), si dimostri che esiste un grafo r -partito T sullo stesso insieme di vertici V , tale che, per ogni $v \in V$, $d_G(v) \leq d_T(v)$.

2) Si provi il Teorema 2.24.

Esercizio 2.51. Sia G un grafo con n vertici e tale che, per ogni vertice v , si ha $d_G(v) > \frac{3}{4}n$. Si provi che G contiene un sottografo isomorfo a K_5 .

Esercizio 2.52. Si provi che il grafo dell'ottaedro (Figura 1.7) è un grafo di Turán. Si provi che il grafo del dodecaedro è un grafo 3-partito, e che è un sottografo di un grafo di Turán.

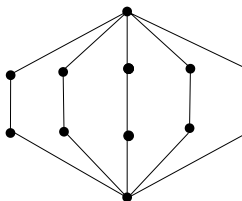
Esercizio 2.53. Sia G un grafo tripartito con $n = 3m$ vertici ripartiti in tre classi con m vertici ciascuna. Assumendo che G non contenga triangoli, dire qual è il massimo numero di lati che G può avere.

Esercizio 2.54. Provare che un grafo con n vertici e privo di cicli di ordine pari ha al più $\frac{3}{2}(n-1)$ lati. Si provi che per ogni n esiste un grafo con n vertici e $\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \rfloor$ lati, privo di cicli di ordine dispari.

Esercizio 2.55. Si dica qual è il massimo numero di lati che può avere un grafo bipartito con 10 o 12 vertici e privo di sottografi isomorfi a $K_{3,3}$.

Esercizio 2.56. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito con $|V_1| = |V_2| = m$, q lati, e privo di cicli di lunghezza minore o uguale a 6. Si provi che $q \leq \frac{m}{2}(1 + \sqrt{1 + 2m})$. Si provi che se b è un numero dispari, e $m = (b^2 - 1)/2$, allora esiste un grafo bipartito con $2m$ vertici, regolare di valenza $(b + 1)/2$, privo di cicli di lunghezza minore o uguale a 6, che ha esattamente $\frac{m}{2}(1 + \sqrt{1 + 2m}) = \frac{(b^2 - 1)(b + 1)}{4}$ lati. [sugg.: si definisca un grafo su V_1 congiungendo due vertici se questi sono adiacenti ad uno stesso vertice di V_2 , si osservi che tale grafo è privo di triangoli].

Esercizio 2.57. Ricordiamo che il *calibro* di un grafo G è la lunghezza minima di un ciclo in esso contenuto, ed è denotato con $g = g(G)$. Diciamo che un grafo connesso con n vertici è *chiatto* se $g \geq n/2$ (ovvero se non è un albero, e tutti i suoi cicli contengono almeno la metà dei vertici); ad esempio, il grafo di Petersen è chiatto; un altro esempio (con 12 vertici) è nella figura seguente:



Si costruiscano grafi chiatti con 6, 8, 10 e 12 vertici che abbiano il massimo numero possibile di lati. Si provi quindi a formulare una congettura sul numero di lati di un grafo chiatto con n vertici, per $n \geq 20$ (ad esempio una buona limitazione superiore), e si cerchi di dimostrarla.

Complementi.

1. *Grafi planari massimali.* Un grafo planare si dice *massimale* se non è possibile aggiungervi alcun nuovo lato e ottenere ancora un grafo planare.

Esercizio 2.58. Sia G un grafo planare, con $n \geq 2$ vertici e m lati, e si supponga che $m < 3n - 6$. Provare che G non è massimale.

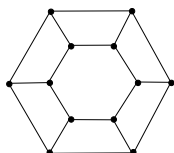
Esercizio 2.59. Sia G un grafo piano con $n \geq 2$ vertici, m lati e c facce.

- 1) Provare che G è massimale se e soltanto se una delle due seguenti uguaglianze è soddisfatta:
 - i) $m = 3n - 6$;
 - ii) $c = 2n - 4$.
- 2) Assumendo che G sia massimale e regolare di grado 5, trovare n , m e c .
- 3) Provare che il grafo dell'icosaedro è piano massimale.

Esercizio 2.60. Per ogni $n \geq 2$ costruire un grafo piano massimale con n vertici. Costruire due grafi piani massimali con 6 vertici che non siano isomorfi.

Esercizio 2.61. Provare che ogni faccia di un grafo piano massimale è un triangolo [sfruttare il fatto che K_5 non è planare].

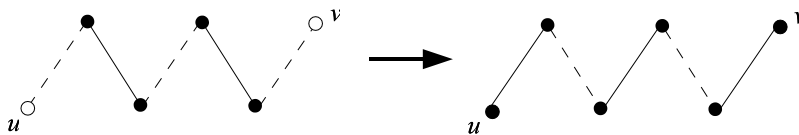
Esercizio 2.62. Provare che il seguente grafo può essere esteso (aggiungendovi degli opportuni archi) ad un grafo piano massimale regolare 5-regolare.



Dire quindi se è vero che ogni grafo piano massimale regolare di grado 5 è isomorfo al grafo dell'icosaedro.

2. *Accoppiamenti: L'algoritmo ungherese.* Descriviamo ora un efficiente algoritmo (chiamato *algoritmo ungherese*, e sviluppato da Kuhn negli anni '50), per trovare un accoppiamento massimo in un grafo bipartito. L'idea essenziale (e che già compare nei lavori di König) è quella di utilizzare i cammini alterni, ai quali non a caso abbiamo già ricorso per la dimostrazione del teorema di König, come passo per produrre, a partire da un accoppiamento dato, un altro (se esiste) con un maggior numero di lati. Ricordiamo la definizione: sia A un insieme di lati del grafo $G(V, E)$. Un A -cammino *alternato* è un cammino semplice di G , con almeno un lato, ed i cui lati appartengono alternativamente a $E \setminus A$ e ad A , ed il primo lato appartiene a $E \setminus A$ (quest'ultima condizione in genere non viene richiesta, ma a noi è comoda, visto l'uso che intendiamo fare dei cammini alterni).

D'ora in avanti, assumeremo che G sia bipartito, e che A sia un suo accoppiamento (non necessariamente massimo). Indichiamo con $V(A)$ l'insieme dei vertici di G che sono estremi di qualche lato di A ; li chiameremo vertici *saturati* da A . L'osservazione fondamentale (che abbiamo già adoperato per dimostrare il teorema 2.17) è che se un A -cammino alternato di G inizia e termina con vertici v_0 e v_k non saturati da A , allora togliendo da A i lati che compaiono in C , e rimpiazzandoli con i restanti lati di C , si ottiene un accoppiamento A' che ha un numero di lati maggiore di quello di A .



In particolare quindi, se A è un accoppiamento massimo, allora non esistono A -cammini alterni i cui vertici estremi sono entrambi non saturati da A . L'algoritmo ungherese consiste in ripetute applicazioni di questa procedura. Prima di descriverlo formalmente, vediamo come funziona con un esempio.

Supponiamo di voler trovare un accoppiamento massimo del grafo bipartito della Figura 1. Il primo passo è quello di trovare un qualsiasi accoppiamento iniziale A_0 . Per fare questo si possono listare i vertici, separatamente per entrambi i due blocchi V_1 e V_2 di vertici della bipartizione (supponiamo

$|V_1| \leq |V_2|$), e quindi accoppiare il primo vertice di V_1 con il primo vertice di V_2 a cui esso è adiacente; poi passare al secondo vertice di V_1 ed accoppiarlo al primo vertice ancora disponibile di V_2 e così via: in questo modo, nel nostro esempio, si trova l'accoppiamento di Figura 2. Se in questo modo tutti i vertici di V_1 vengono saturati, allora l'accoppiamento A_0 è già completo e dunque massimo.

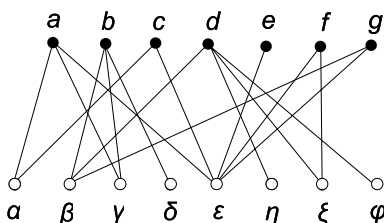


Figura 1

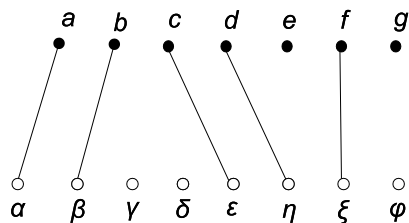


Figura 2

Altrimenti, si considera un vertice (il primo in una delle due liste) che non sia saturato dall'accoppiamento: ad esempio, il vertice γ . Si cerca quindi, a partire dal vertice γ , un A_0 -cammino alternato che termini in un altro vertice (nel nostro caso g) non saturato da A_0 (Figura 3). Si rimpiazza quindi A_0 , mediante la procedura descritta sopra, con un nuovo accoppiamento A_1 (Figura 4), che ha un lato in più.

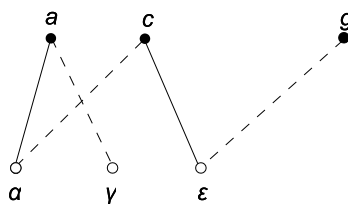


Figura 3

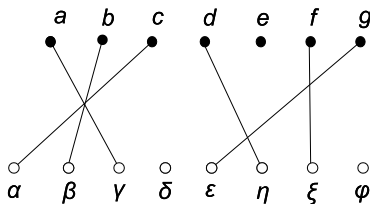


Figura 4

Se è ancora possibile (come nel nostro esempio), si ripete la procedura: troviamo che dal vertice e , non saturato da A_1 , inizia un cammino A_1 -alternato che termina nel vertice non saturato δ .

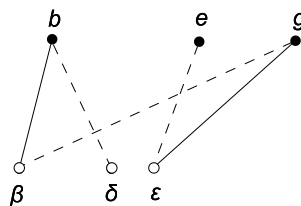


Figura 5

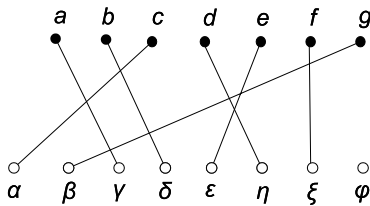


Figura 6

Si rimpiazzano i lati di tale cammino che appartengono ad A_1 con quelli che non vi appartengono, e si ottiene un nuovo e più grande accoppiamento, quello della figura 6. Tale accoppiamento è completo (dato che tutti i vertici di un blocco sono saturati) e quindi è massimo.

In questo esempio, il risultato finale è stato un accoppiamento completo. Non è sempre questo il caso, ma l'algoritmo ungherese fornisce comunque un accoppiamento massimo. Per

convincerene, dobbiamo provare che quando esso si arresta, l'accoppiamento al quale è pervenuto è massimale. Ora, l'algoritmo si arresta quando da nessun vertice non saturato inizia un cammino alterno che termina in un altro vertice non saturato. Da questo, l'argomento utilizzato nella dimostrazione del Teorema di König mostra che l'accoppiamento è massimale.

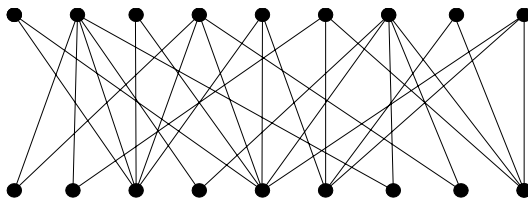
Diamo ora una descrizione più formale dell'algoritmo. Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito con almeno un lato. Se A è un accoppiamento e v un vertice non saturato, chiamiamo albero A -alterno passante da v , un sottoalbero di G in cui tutti i cammini che partono da v sono A -alterni. Dato un vertice v di G è sempre possibile costruire un albero A -alterno passante da v e che sia massimale con queste proprietà (si può usare un algoritmo tipo spanning-tree).

Algoritmo ungherese

PASSO 1	Costruisci un qualsiasi accoppiamento A di G , e poni $S = V$.
PASSO 2	Se ogni $v \in S$ è saturato da A , stop e dai A in output. Altrimenti vai al passo 3.
PASSO 3	Dato $v \in S$ non saturato da A , costruisci un albero A -alterno massimale passante per v . <ul style="list-style-type: none"> – Se l'albero contiene un A-cammino alterno in cui entrambi gli estremi non sono saturati, sostituisci in A i lati che appartengono al cammino con gli altri lati del cammino; poni $S = V$, quindi torna al passo 2. – Se l'albero non contiene A-cammini alterni, poni $S = S \setminus \{v\}$, e torna al passo 2.

In alcune applicazioni è possibile che ad ogni lato del grafo bipartito sia assegnato un "costo". In tal caso l'algoritmo ungherese può essere adattato ad un algoritmo che determina un accoppiamento massimale di costo minimo.

Esercizio 2.63. Utilizzando l'algoritmo ungherese trovare un accoppiamento massimo per il seguente grafo:



Esercizio 2.64. Tra ciascuno dei cavalieri Orlando, Rinaldo, Ruggiero, Brandimarte, Oliviero, Ferrau, e ciascuna delle ragazze Angelica, Bradamante, Fiordiligi, Doralice, Alcina e Morgana, corre un reciproco interesse sentimentale se (e solo se) nei loro nomi vi è una sequenza uguale di due lettere. Dire se è possibile combinare 6 fidanzamenti. Se Ferrau si fida con Doralice, con chi si deve fidanzare Orlando?

Esercizio 2.65. Si delinea un algoritmo che, a partire da una qualunque copertura di un grafo bipartito, trovi una copertura minima (senza ricorrere direttamente all'algoritmo ungherese).

Esercizio 2.66. Otto studenti intendono leggere almeno uno tra i libri $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, dei quali la biblioteca possiede una copia ciascuno, secondo la seguente tabella di preferenze.

	Aldo	Bice	Ciro	Dina	Elsa	Febo	Gina	Hulk
libri	$\alpha \delta$	$\beta \epsilon$	$\gamma \delta$	$\alpha \epsilon$	$\beta \delta$	$\delta \epsilon$	$\alpha \beta$	$\gamma \epsilon$

Sapendo che il prezzo dei libri è di 10 Euro per α e β , 13 Euro per γ , 16 per δ , e 19 per ϵ , dire con quale minima spesa la biblioteca è in grado di assecondare tutti e otto gli studenti. Qual'è la spesa minima per poter soddisfare, in due turni di prestito, entrambe le scelte di ogni studente?

Capitolo 3

Grafi diretti e connettività

Nei capitoli precedenti abbiamo considerato quasi esclusivamente grafi semplici: ovvero quelli in cui i lati sono definiti come insiemi di due vertici distinti, e non come coppie ordinate. Se si vuole, un grafo semplice è una relazione binaria *simmetrica* sull'insieme dei vertici (e tale che nessun vertice è in relazione con se stesso). Intendendo invece rappresentare una relazione binaria non necessariamente simmetrica, lo strumento è quello dei *grafi diretti*: ovvero grafi in cui i lati (che anche in questo caso chiameremo sovente archi) sono coppie ordinate di vertici. Nel senso naturale, ogni arco ha dunque un vertice *iniziale* ed un vertice *finale*, ed è quindi più propriamente rappresentato mediante una freccia.

La prima sezione di questo capitolo è una breve esposizione della terminologia di base per i grafi diretti. Potremo essere relativamente sbrigativi dato che si tratta per lo più di naturali estensioni di analoghi concetti già discussi per i grafi semplici.

Nella seconda sezione introdurremo invece il concetto nuovo di *flusso* in un grafo diretto e dimostreremo il teorema fondamentale che lo riguarda (Teorema Maxflow–Mincut).

Nella terza e quarta sezione ritorneremo allo studio dei grafi non diretti, trattando in forma più generale questioni relative all'esistenza di "molti" cammini nei grafi e discutendo l'estensione a grafi qualsiasi del concetto di accoppiamento. Tali argomenti sono inseriti a questo punto perché, in particolare nella terza sezione, per dimostrare alcuni risultati classici e fondamentali in questo ambito (come il Teorema di Menger), utilizzeremo proprio i teoremi sul flusso in un grafo diretto provati nella seconda sezione.

3.1 Grafi diretti

Sia V un insieme non vuoto, denotiamo con $D(V) = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w\}$ l'insieme di tutte le coppie *ordinate* di elementi distinti di V .

Un **grafo diretto** (detto anche **di-grafo**) (in inglese: *directed graph* o *digraph*) è una coppia $G = (V, A)$, dove V (l'insieme dei vertici) è un insieme non vuoto, ed A è un sottoinsieme (che può anche essere vuoto) dell'insieme $D(V)$; gli elementi di A sono detti gli **archi** del grafo diretto G .

Un grafo diretto G è **connesso** se è connesso (nel senso indiretto) il multigrafo (detto multigrafo indotto) che si ottiene "togliendo le frecce" dagli archi di G ; mentre G si dice **fortemente connesso** se per ogni coppia di vertici distinti u e v di G esiste un cammino diretto in G da u a v . Un **isomorfismo** tra grafi diretti (V, A) e (V', A') è una biezione $\phi : V \rightarrow V'$ tale che, per ogni $u, v \in V$,

$$(u, w) \in A \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(w)) \in A'.$$

Ad esempio, i grafi diretti nella figura seguente non sono isomorfi:

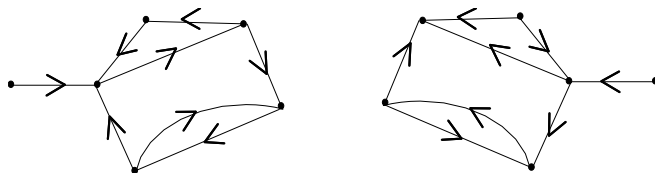
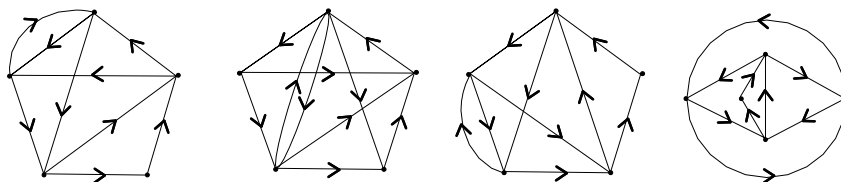


Figura 3.2: grafi diretti non isomorfi.

Esercizio 3.1. Si faccia un esempio di grafo diretto connesso ma non fortemente connesso. Per ogni $n \geq 1$ si faccia un esempio di grafo diretto con n vertici che non sia fortemente connesso, ma il cui multigrafo indotto abbia un circuito semplice di lunghezza n .

Esercizio 3.2. Si dica quanti sono, a meno di isomorfismo, i grafi diretti con tre vertici, e quanti quelli con quattro vertici.

Esercizio 3.3. Si dica quali tra i seguenti grafi diretti sono tra loro isomorfi.



Esercizio 3.4. Si dimostri che in un grafo diretto fortemente connesso il numero degli archi è maggiore o uguale al numero dei vertici. Si dica quali sono (a meno di isomorfismo) i grafi diretti fortemente connessi in cui il numero degli archi è uguale a quello dei vertici.

3.2 Reti e flussi.

L'idea di rete nasce (fin dai lavori di Kirchoff del 1845 sulle reti elettriche¹) da una suggestione di carattere assolutamente pratico: quella di introdurre un modello matematico essenziale

¹Ci crediate o no, Gustav R. Kirchoff era nato a Königsberg.

per trattare sistemi di trasporto realizzati mediante tratti di condutture ed un certo numero di giunzioni nelle quali due o più condutture confluiscono. Ogni singolo tratto di conduttura ha un predeterminato verso ed una capacità massima; infine, "qualcosa" scorre nella rete. L'aspetto sorprendente della teoria sviluppatasi è che tecniche nate per descrivere situazioni eminentemente pratiche abbiano suggerito uno strumento molto versatile e potente per lo studio astratto dei grafi (diretti o no) e non soltanto, come cercheremo di mostrare nella sezione successiva (finora abbiamo suggerito applicazioni "pratiche" di strumenti nati dalla teoria: nelle prossime pagine, in un certo senso, avverrà qualcosa di contrario).

Se $R = (V, A)$ è un grafo diretto, e $v \in V$ è un vertice di R , denotiamo con $E(v)$ ed $U(v)$, rispettivamente, l'insieme degli archi di R il cui vertice finale è v , e quello degli archi dei quali v è il vertice iniziale.

Una **rete** è un grafo diretto $R = (V, A, s, t)$, in cui sono evidenziati due vertici s e t detti, rispettivamente, la *sorgente* ed il *termine*, e in cui gli archi sono pesati: ovvero è data una funzione $\mathbf{c} : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, che ad ogni arco e associa un numero reale positivo $\mathbf{c}(e)$ detta *capacità* di e .

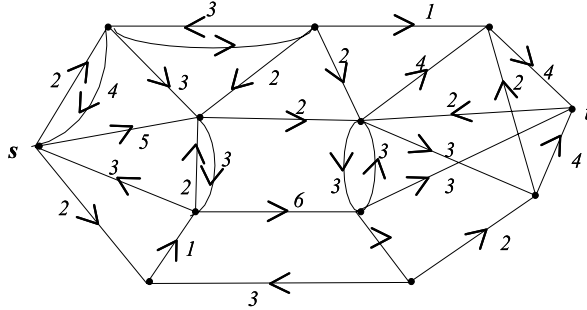


Figura 3.3: una rete

Un **flusso** (in inglese *flow*) per la rete $R = (V, A, s, t)$ è un'applicazione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa alle condizioni

- i) $0 \leq f(e) \leq \mathbf{c}(e)$, per ogni arco $e \in A$
- ii) $\sum_{e \in E(v)} f(e) = \sum_{e \in U(v)} f(e)$, per ogni vertice $v \in V$, $v \neq s, t$.

Il **valore** del flusso f è definito come

$$v(f) = \sum_{e \in U(s)} f(e) - \sum_{e \in E(s)} f(e).$$

Il valore può essere inteso come la misura della quantità di flusso netta che scaturisce (o vi è immessa dall'esterno) alla sorgente. È naturale pensare che questo valore debba coincidere con quello del flusso netto che arriva (o esce) dal termine della rete.

Così è infatti. Per convincercene, osserviamo innanzi tutto che, poiché ogni arco e ha un solo vertice iniziale ed un solo vertice finale, si ha

$$\sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{v \in V} \sum_{e \in U(v)} f(e) = 0.$$

Quindi, per la proprietà (ii) di f :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f(e) &= \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f(e) + \sum_{v \neq \mathbf{s}, \mathbf{t}} \left(\sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) = \\ &= \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) + v(f) = v(f) \end{aligned}$$

È conveniente generalizzare questa osservazione. Sia S un sottoinsieme non vuoto dei vertici di una rete $R = (V, A, s, t)$. Denotiamo con $U(S)$ l'insieme degli archi che "escono" da S , cioè il cui termine iniziale appartiene a S ma non quello finale; similmente con $E(S)$ denotiamo l'insieme degli archi che "entrano" in S . Formalmente:

$$U(S) = \{ (u, v) \in A \mid u \in S, v \notin S \}$$

$$E(S) = \{ (u, v) \in A \mid u \notin S, v \in S \}$$

Lemma 3.2. *Sia S un sottoinsieme di vertici della rete $R = (V, A, s, t)$. Se $\mathbf{s} \in S$ ma $\mathbf{t} \notin S$, allora per ogni flusso f per R si ha*

$$\sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e) = v(f).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni arco e della rete R denotiamo con $i(e)$ e $t(e)$ rispettivamente il vertice iniziale e quello finale di e , ovvero $e = (i(e), t(e))$. Sia ora S un insieme di vertici contenente \mathbf{s} ma non \mathbf{t} , ed f un flusso per R . Allora, per la proprietà (ii) dei flussi, e siccome $\mathbf{t} \notin S$:

$$v(f) = \sum_{e \in U(\mathbf{s})} f(e) - \sum_{e \in E(\mathbf{s})} f(e) = \sum_{v \in S} \left(\sum_{e \in U(v)} f(e) - \sum_{e \in E(v)} f(e) \right);$$

quindi, riscrivendo la somma del membro di destra,

$$v(f) = \sum_{i(e) \in S} f(e) - \sum_{t(e) \in S} f(e).$$

Ora, in ciascuna delle due sommatorie del membro di destra, possiamo considerare solo il contributo degli archi che non hanno entrambi gli estremi in S ; questi ultimi, infatti contribuiscono con un $f(e)$ ad entrambe le somme, e quindi contribuiscono con 0 alla loro differenza. Pertanto

$$v(f) = \sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e)$$

come si voleva. ■

ATTENZIONE: d'ora in avanti assumeremo che nelle reti R che consideriamo esista almeno un cammino diretto dalla sorgente s al termine t , e quindi che le sezioni di R non possano essere vuote. Da un punto di vista pratico, questa è un'assunzione del tutto scontata, e da quello astratto non è molto limitativa: avremmo potuto facilmente farne a meno, ma questo ci avrebbe costretto ad allungare le dimostrazioni in diversi punti per discutere (in genere in modo banale, ma noioso) il caso di sezioni vuote.

Una **sezione** (in inglese *cut*) della rete R è un insieme C di archi tale che ogni cammino diretto da s a t attraversa un arco di C .

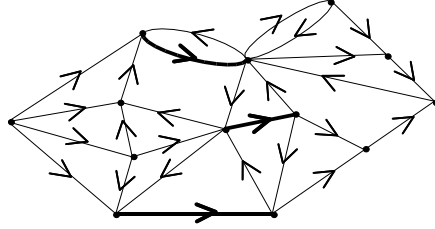


Figura 3.4: un sezione in una rete

La *capacità* $\mathbf{c}(C)$ della sezione C è la somma delle capacità degli archi che le appartengono:

$$\mathbf{c}(C) = \sum_{e \in C} \mathbf{c}(e).$$

Il problema fondamentale nella teoria dei flussi in una rete è quale sia il valore massimo di un flusso per una data rete R . È piuttosto intuitivo che il valore di un flusso non possa superare quello che una sezione è in grado di sopportare. Con l'aiuto del lemma 3.2, questo fatto si prova abbastanza agevolmente.

Lemma 3.3. *Sia f un flusso per la rete R , e sia C una sezione di R . Allora*

$$v(f) \leq \mathbf{c}(C).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia C una sezione della rete R , e sia S l'insieme dei vertici di R che possono essere raggiunti a partire dalla sorgente s mediante cammini diretti che non impiegano archi di C . Per definizione di sezione S , non contiene t (mentre ovviamente contiene s). Sia $e = (u, w) \in U(S)$ un arco uscente da S ; allora (poiché $u \in S$) esiste un cammino diretto da s ad u che non contiene archi di C ; prolungando tale cammino mediante l'arco e si ottiene un cammino diretto da s a w , che (poiché $w \notin S$) deve, per definizione dell'insieme S , contenere un arco di C : la sola possibilità è che $e \in C$. Dunque $U(S) \subseteq C$. Sia ora f un flusso per R . Per il Lemma 3.2 e quanto appena osservato (tenendo presente che f è a valori positivi),

$$v(f) = \sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e) \leq \sum_{e \in U(S)} f(e) \leq \sum_{e \in C} f(e) = \mathbf{c}(C)$$

che è ciò che volevamo provare. ■

A questo punto notiamo che, essendo finito il numero di archi in una rete R , è finito anche il numero di sezioni di R , e quindi esiste un valore minimo per la capacità di una sezione. Il lemma precedente asserisce che il valore di un qualunque flusso per R non può oltrepassare questa capacità minima delle sezioni. Il fatto che esistano sempre flussi per R il cui valore raggiunge tale limite teorico (Teorema 3.5), è il risultato fondamentale della teoria dei flussi in una rete, ed è chiamato Teorema *Maxflow-Mincut*. Prima di enunciarlo esplicitamente, proviamo un Lemma che enuclea il punto centrale della sua dimostrazione.

Sia f un flusso per la rete R ; denotiamo con S_f l'insieme dei vertici v di R tali che esiste una sequenza di vertici ed archi $\mathbf{s} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{q-1} e_q v_q = v$ con la proprietà che i vertici sono tutti distinti e, per ogni $i = 1, \dots, q$, si ha

$$\begin{aligned} & \bullet e_i = (v_{i-1}, v_i), \text{ e } f(e_i) < \mathbf{c}(e_i); \text{ oppure} \\ & \bullet e_i = (v_i, v_{i-1}), \text{ e } f(e_i) > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lemma 3.4. *Sia f un flusso per la rete R . Se $\mathbf{t} \in S_f$ allora esiste un flusso f' per R tale che $v(f') > v(f)$. Se inoltre la capacità di ogni arco di R è un numero intero ed f è un flusso intero (cioè $f(e) \in \mathbb{N}$ per ogni arco e di R), allora esiste un flusso intero f' con $v(f') > v(f)$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che, dato il flusso f per R , si abbia $\mathbf{t} \in S_f$. Sia allora

$$\mathcal{P}: \quad \mathbf{s} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{q-1} e_q v_q = \mathbf{t}$$

una sequenza di vertici e archi con la proprietà della definizione data sopra.

Denotiamo con \vec{A} l'insieme degli archi di \mathcal{P} che "vanno nella giusta direzione", ovvero $\vec{A} = \{e_i \in \mathcal{P} \mid e_i = (v_{i-1}, v_i)\}$; e con $\overleftarrow{A} = \{e_i \in \mathcal{P} \mid e_i = (v_i, v_{i-1})\}$ l'insieme degli archi di \mathcal{P} che "vanno in direzione contraria". Poniamo, per ogni arco e_i di \mathcal{P} ,

$$\delta(e_i) = \begin{cases} \mathbf{c}(e_i) - f(e_i) & \text{se } e_i \in \vec{A} \\ f(e_i) & \text{se } e_i \in \overleftarrow{A} \end{cases}$$

Per definizione dell'insieme S_f , abbiamo $\delta(e_i) > 0$ per ogni $i = 1, \dots, q$, e dunque $\delta = \min\{\delta(e_i) \mid i = 1, \dots, q\}$ è un numero reale strettamente positivo. Definiamo ora un nuovo flusso f' ponendo, per ogni arco e di R

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & \text{se } e \notin \vec{A} \cup \overleftarrow{A} \\ f(e) + \delta & \text{se } e \in \vec{A} \\ f(e) - \delta & \text{se } e \in \overleftarrow{A} \end{cases}$$

La definizione di δ assicura che la funzione f' soddisfa la condizione (i) di un flusso, ed è chiaro che anche la condizione (ii) è soddisfatta da f' . Osserviamo anche che, se le capacità $\mathbf{c}(e)$ ed il flusso $f(e)$ sono numeri interi (per ogni arco e di R), allora δ è un intero positivo maggiore o uguale a 1, e f' è un flusso intero.

Proviamo infine che $v(f') > v(f)$. Se $e_q \in \vec{A}$, allora $e_q \in E(\mathbf{t})$, e quindi si ha

$$v(f') = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f'(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f'(e) = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) + (f'(e_q) - f(e_q)) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f(e) = v(f) + \delta.$$

Similmente: se $e_q \in \overleftarrow{A}$, allora $e_q \in U(\mathbf{t})$, e quindi

$$v(f') = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{t})} f(e) + (f(e_q) - f'(e_q)) = v(f) + \delta,$$

provando così che $v(f') = v(f) + \delta > v(f)$. ■

Teorema 3.5. (Maxflow–Mincut) *Sia R una rete. Allora il valore massimo di un flusso per R è uguale alla minima capacità delle sezioni di R . Se inoltre le capacità degli archi di R sono espresse da numeri interi, allora il valore massimo è ottenibile mediante un flusso intero.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo prima che le capacità degli archi di R siano espresse da numeri interi, ed utilizziamo il Lemma 3.4 come passo di un algoritmo che porta alla determinazione di un flusso f e di una sezione C tali che $v(f) = \mathbf{c}(C)$. È chiaro allora che, per il Lemma 3.3, f e C sono, rispettivamente, un flusso di valore massimo, ed una sezione di capacità minima.

Si parte da un flusso f_0 (è sempre possibile partire dal flusso nullo: ma partendo da un flusso che abbia già un valore apprezzabile, in genere si diminuisce il numero di passi necessari); se l'insieme S_{f_0} contiene il termine \mathbf{t} della rete, allora la dimostrazione del Lemma 3.4 fornisce un metodo effettivo per costruire un flusso intero f_1 , con $v(f_1) \geq v(f) + 1$. Se $\mathbf{t} \in S_{f_1}$, si procede costruendo un flusso intero f_2 , con $v(f_2) \geq v(f_1) + 1$, e così via. Poiché il valore che può assumere un flusso è limitato (dalla capacità di qualsiasi sezione), questo processo si arresta ad un flusso $f_n = f$, tale che $\mathbf{t} \notin S_f$ (eventualmente, se siamo proprio fortunati, $f = f_0$).

Proviamo che $U(S_f)$ è una sezione di R . Sia $\mathbf{s} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{q-1} e_q v_q = \mathbf{t}$ un cammino diretto da \mathbf{s} a \mathbf{t} . Poiché $\mathbf{t} \notin S_f$, esiste un massimo $i \in \{0, \dots, q-1\}$ tale che $v_i \in S_f$ (eventualmente $i = 0$). Allora $v_{i+1} \notin S_f$ e quindi $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \in U(S_f)$.

Proviamo ora che la capacità di $U(S_f)$ è uguale al valore di f . Osserviamo innanzi tutto che, poiché $\mathbf{s} \in S_f$ e $\mathbf{t} \notin S_f$, il Lemma 3.2 assicura che

$$v(f) = \sum_{e \in U(S_f)} f(e) - \sum_{e \in E(S_f)} f(e).$$

Sia $e = (v, w) \in U(S_f)$; allora, siccome $v \in S_f$, esiste una sequenza di vertici ed archi da \mathbf{s} a v che soddisfa le proprietà (3.1); se fosse $f(e) < \mathbf{c}(e)$, allora tale sequenza potrebbe essere prolungata mediante ew , che darebbe la contraddizione $w \in S_f$. Dunque, per ogni $e \in U(S_f)$, $f(e) = \mathbf{c}(e)$. Un argomento analogo mostra che per ogni $e \in E(S_f)$, $f(e) = 0$. Pertanto

$$v(f) = \sum_{e \in U(S_f)} f(e) - \sum_{e \in E(S_f)} f(e) = \sum_{e \in U(S_f)} \mathbf{c}(e) = \mathbf{c}(C),$$

provando così che f è un flusso (intero) di valore massimo.

Nel caso generale, ci basta provare l'esistenza di un flusso il cui valore coincide con la minima capacità di una sezione di R . Sia γ tale minima capacità, che è possibile determinare mediante un numero finito di operazioni. Ora, possiamo approssimare dal basso mediante numeri razionali le capacità di ogni singolo arco di R ; in tal modo, chiaramente, si approssima anche

il valore γ mediante un numero razionale γ' ; poiché il numero di archi è finito, moltiplicando le capacità degli archi per il loro minimo denominatore comune d otteniamo una rete a capacità intere e capacità minima di una sezione uguale a $d\gamma'$; per il caso precedente esiste un flusso intero per tale rete il cui valore è $d\gamma'$; dividendo tutti i valori di questo flusso per d , si ottiene un flusso per la rete approssimante il cui valore è γ' . A questo punto, un'applicazione dell'analisi assicura che esiste un flusso f per R il cui valore è γ (se non avete ancor studiato la convergenza in uno spazio compatto, potete prendere questo per buono). Infatti, se e_1, e_2, \dots, e_q sono gli archi della rete, ed f è un flusso, allora la q -upla $(f(e_1), \dots, f(e_q))$ è un elemento dello spazio \mathbb{R}^q contenuto nel sottoinsieme compatto $[0, \mathbf{c}(e_1)] \times \dots \times [0, \mathbf{c}(e_q)]$. La procedura di approssimare γ mediante il valore di reti a razionali produce un insieme di punti in tale spazio che, per il Teorema di Bolzano-Weirstrass, contiene una sottosuccessione convergente. ■

È possibile che, in alcune situazioni, si debba trattare grafi in cui vi è una limitazione alla capacità dei vertici piuttosto che a quella degli archi. Non è troppo difficile derivare dal teorema precedente un analogo risultato per questo caso; l'idea è quella di trattare ogni vertice del grafo come un arco in una opportuna rete. Quindi, supponiamo di avere dato un grafo diretto $R = (V, A)$, con due vertici evidenziati s e t , ed una funzione di capacità $\mathbf{c} : V \setminus \{s, t\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. In tal caso, un *flusso* è una funzione f definita sugli archi di R che soddisfi alla condizione

$$\sum_{e \in E(x)} f(e) = \sum_{e \in U(x)} f(e) \leq \mathbf{c}(x)$$

per ogni $x \in V \setminus \{s, t\}$ (ovvero, il flusso che "attraversa" ciascun vertice non può superare la capacità del vertice stesso). Il corrispettivo di sezione è un sottoinsieme $S \subseteq V \setminus \{s, t\}$ di vertici tale che ogni cammino diretto da s a t passa per almeno un vertice di S ; diremo allora che S *separa* s da t .

Teorema 3.6. *Sia $R = (V, A, s, t)$ un grafo diretto con una funzione di capacità sui vertici. Allora, il massimo valore di un flusso per R è uguale alla capacità minima di un insieme di vertici che separa s da t .*

DIMOSTRAZIONE. Ad R associamo una rete nel modo seguente. Sdoppiamo ciascun vertice $x \in V \setminus \{s, t\}$ in due vertici x^- e x^+ , ed introduciamo un nuovo arco (x^-, x^+) . I vertici della rete R' sono dunque s, t e tutti quelli del tipo x^- e x^+ . Se $x, y \in V$ e (x, y) è un arco di R , allora (x^+, y^-) è un arco di R' (dove s'intende $s^+ = s^- = s$ e $t^+ = t^- = t$); gli archi di R' sono tutti questi più tutti quelli del tipo (x^-, x^+) con $x \in V \setminus \{s, t\}$ (dunque ogni vertice $s \neq x \neq t$ di R è stato rimpiazzato da un arco (x^-, x^+) , dove al vertice x^- "arrivano" tutti gli archi che arrivavano in x e dal vertice x^+ "partono" tutti gli archi che partivano da x). Sugli archi di R' definiamo una capacità \mathbf{c}' ponendo

$$\mathbf{c}'((x^-, x^+)) = \mathbf{c}(x) \quad \text{per ogni } x \in V \setminus \{s, t\}$$

e non assegnando alcuna capacità (ovvero, assegnando loro capacità infinita) agli altri lati. Ora, osserviamo che se $S \subseteq V \setminus \{s, t\}$ è un insieme di vertici che separa s da t in R allora $C_S = \{(x^-, x^+) | x \in S\}$ è una sezione di R' . Siccome gli archi di R' diversi da quelli che provengono da vertici di R hanno capacità infinita, è chiaro che le sezioni di capacità minima di R' saranno del tipo C_S appena descritto, con S un insieme di vertici di R che separa s da t . A questo punto, un'applicazione del Maxflow-Mincut completa la dimostrazione. ■

Esercizio 3.5. Siano f e g due flussi per la rete R . Si dica se è vero che l'applicazione $f \wedge g$ definita ponendo, per ogni arco e di R , $(f \wedge g)(e) = \min\{f(e), g(e)\}$, è un flusso per R .

Esercizio 3.6. Si faccia un esempio di una rete in cui le sezioni di minima capacità non sono quelle composte dal minimo numero di archi.

Esercizio 3.7. Trovare un flusso con valore massimo nella rete di Figura 3.3.

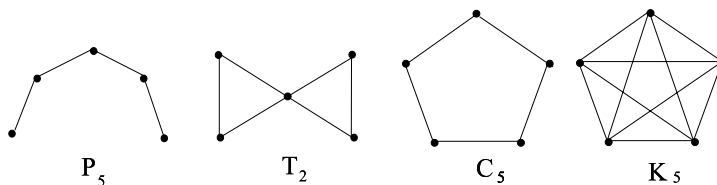
Esercizio 3.8. Sia E un sottoinsieme di archi della rete R , tale che togliendo da R un qualsiasi arco di E si ottiene una rete in cui ogni flusso ha valore nullo. Provare che E contiene una sezione di R .

Esercizio 3.9. Sia f un flusso per la rete R . Provare che se $U(S_f)$ è una sezione di R , allora f è un flusso di valore massimo.

3.3 Connettività e Teorema di Menger.

In questa sezione tratteremo un importante concetto in teoria dei grafi (quello del grado di connessione di un grafo) e dimostreremo il fondamentale teorema di Menger. Si tratta di un risultato classico, che proveremo utilizzando la tecnica introdotta nella sezione precedente. Procederemo per gradi, iniziando con il provare in modo diretto un primo caso del Teorema di Menger, e quindi generalizzando ed estendendo i concetti introdotti fino a provare, utilizzando l'idea di flusso, la forma generale del Teorema.

L'obiettivo generale che ci proponiamo in primo luogo è quello di cercare di graduare in qualche modo il concetto di "connessione" di un grafo. Oltre a semplicemente suddividere i grafi tra quelli connessi e quelli non connessi, vogliamo tradurre in maniera efficace l'idea che, tra i grafi connessi, ce ne siano alcuni "più connessi" di altri, e possibilmente di quantificare un tale "grado di connessione". Ad esempio, consideriamo i seguenti grafi su 5 vertici: un cammino semplice P_5 , il grafo T_2 costituito da due triangoli con un solo vertice in comune, il ciclo C_5 ed il grafo completo K_5 .



Ora, ci sembra abbastanza naturale dire che questi grafi siano stati disegnati (da sinistra a destra) in un ordine crescente di connettività; ovvero che, ad esempio, il grafo completo K_5 sia un grafo altamente connesso, che il ciclo C_5 sia abbastanza connesso ma non quanto K_5 , e che P_5 sia connesso in un grado ancora inferiore.

Possiamo cercare di precisare questa idea ancor vaga in due direzioni. Nella prima possiamo valutare come "grado di connessione" di un grafo la misura di "quanto" è necessario togliere da esso in modo che il grafo che rimane non sia connesso. Limitandoci per il momento a

considerare soltanto la soppressione di vertici (e dei lati ad essi adiacenti), osserviamo così che qualsiasi vertice non estremo si tolga a P_5 il grafo che rimane non è connesso; similmente, non è connesso il grafo che si ottiene togliendo al grafo T_2 il vertice centrale. Invece, qualsiasi vertice togliamo al ciclo C_5 il grafo residuo (un cammino P_4) è connesso; per rendere sconnesso C_5 è necessario togliere *almeno due* vertici. Potremmo quindi dire che i grafi P_5 e T_2 sono 1-connessi, mentre il grafo C_5 è 2-connesso. Dal grafo completo K_5 possiamo togliere qualsiasi insieme di vertici (sino a 4), senza che il grafo che rimane sia sconnesso.

Nell'altra direzione si parte dalla considerazione che un grafo è connesso se ogni coppia di vertici è collegata da almeno un cammino semplice. Potremmo dunque ritenere che un grafo sia dotato di un grado di connessione tanto maggiore quanto più sono i cammini diversi che è possibile trovare tra qualsiasi coppia di vertici. Per formalizzare in modo chiaro questa idea occorre innanzi tutto intenderci su cosa significa che due cammini sono diversi.

Due cammini semplici in un grafo si dicono **indipendenti** se non hanno alcun vertice in comune, a parte eventualmente gli estremi.

Nel grafo P_5 ogni coppia di vertici distinti è congiunta da un unico cammino. Nel grafo T_2 coppie di vertici distinti sono congiunte da più cammini semplici (due per la precisione), tuttavia se si prendono i vertici nei due diversi triangoli, si vede che non è possibile trovare due cammini *indipendenti* che li congiungono. Invece nel ciclo C_5 ogni coppia di vertici distinti è congiunta da due cammini semplici indipendenti. Infine, nel grafo completo K_5 ogni coppia di vertici distinti è congiunta da una moltitudine di cammini semplici (quanti per la precisione?), tra i quali ce ne sono sempre almeno 4 tra loro indipendenti.

Il Teorema di Menger afferma, in sostanza, che questi due approcci sono equivalenti.

Sia G un grafo connesso e sia S un sottoinsieme di vertici di G ; diciamo che S **separa** G se $G - S$ non è connesso (in inglese si dice che S è un *cut-set* per G). Se $1 \leq k \in \mathbb{N}$, diciamo che il grafo G è **k -connesso** se ha almeno $k + 1$ vertici e G non è separato da alcun sottoinsieme di $k - 1$ vertici.

Dunque, un grafo G è 1-connesso se e solo se è connesso nel senso usuale del termine; ed è 2-connesso se e solo se ha almeno 3 vertici e $G - u$ è connesso per ogni vertice u . I grafi P_5 e T_2 della figura 5.5 sono 1-connessi ma non 2-connessi, il ciclo C_5 è 2-connesso (ma non 3-connesso), ed il grafo K_5 è 4-connesso.

Il **grado di connessione** $\kappa(G)$ di un grafo G è il massimo k per cui G è k -connesso. In altri termini, $\kappa(G) = k$ se e solo se G ha almeno $k + 1$ vertici e k è la cardinalità minima di un sottoinsieme di vertici che separa G (se G non è connesso si scrive $\kappa(G) = 0$). Ad esempio, $\kappa(G) = 1$ se e solo se G è connesso ed ha uno snodo, $\kappa(C_n) = 2$ per ogni ciclo C_n , e $\kappa(K_n) = n - 1$ per ogni grafo completo K_n . Il grado di connessione del grafo di Petersen è 3 (lo si dimostri).

Prima di provare il risultato fondamentale (il Teorema di Menger, appunto), discutiamo più in dettaglio il caso dei grafi 2-connessi. Si tratta di un caso di per sé interessante e, pur se quello che proveremo discenderà poi come caso particolare dal Teorema di Menger, ci consentirà di familiarizzarci con questo importante aspetto della teoria dei grafi. Inoltre, per questo caso più accessibile forniremo delle dimostrazioni dirette, cosa che forse farà apprezzare l'efficacia del metodo indiretto (che utilizza il teorema Maxflow–Mincut) che invece adotteremo per provare il Teorema di Menger.

Sia G un grafo connesso. Un vertice v di G si dice uno **snodo** (in inglese: *cut-vertex*) se il grafo $G - v$ è sconnesso. Dunque un grafo è 2-connesso se è connesso, ha almeno 3 vertici ed è privo di snodi.

Proposizione 3.7. *Sia G un grafo connesso con almeno 3 vertici. Sono equivalenti:*

(i) *per ogni coppia di vertici distinti u e v di G esistono almeno due cammini semplici indipendenti da u a v ;*

(ii) *G è 2-connesso;*

(iii) *ogni coppia di vertici distinti di G appartiene ad un ciclo;*

(iv) *ogni coppia di lati distinti di G appartiene ad un ciclo.*

DIMOSTRAZIONE. (i) \Rightarrow (ii). Supponiamo che G soddisfi (i), e sia u un vertice di G . Siano x e y sono due vertici distinti di $G - u$; allora esistono in G due cammini indipendenti da x in y , almeno uno dei quali non passa per u . Dunque $G - u$ è connesso. Ciò vale per ogni vertice u , e pertanto G è 2-connesso.

(ii) \Rightarrow (iii). Supponiamo che G sia 2-connesso, e siano x e y due vertici distinti. Proviamo che x ed y appartengono ad uno stesso ciclo di G procedendo per induzione sulla loro distanza d . Se $d = 1$ allora $e = \{x, y\}$ è un lato di G . Poiché G è 2-connesso, $G - e$ è connesso; dunque esiste un cammino semplice da x a y che non contiene e , e che assieme ad e forma un ciclo a cui appartengono x e y .

Sia $d \geq 2$, e sia $e = \{x, z\}$ il primo lato di un cammino semplice da x a y . Poiché $G - z$ è connesso, esiste un cammino semplice \mathcal{P} da x a y che non passa per z ; inoltre, siccome la distanza di z da y è $d - 1$, per ipotesi induttiva esiste un ciclo \mathcal{C} di G a cui appartengono z e y . Ora, percorrendo \mathcal{P} da x sino al primo suo vertice in comune con \mathcal{C} (vertice che può eventualmente essere x o y), quindi percorrendo \mathcal{C} fino a y e poi indietro a z , ed infine percorrendo il lato $\{z, x\}$ si ha un ciclo di G a cui appartengono x e y .

(iii) \Rightarrow (i). Questo implicazione è chiara.

(iii) \Leftrightarrow (iv). Esercizio. ■

Com'è possibile costruire grafi 2-connessi? Supponiamo di avere dato un grafo 2-connesso G_0 , e di aver fissato due suoi vertici distinti x e y . Se estendiamo G_0 mediante l'aggiunta di nuovi vertici e lati in modo che i componenti aggiunti costituiscano un cammino semplice da x a y , otteniamo un grafo G che è ancora 2-connesso (vedi figura seguente);

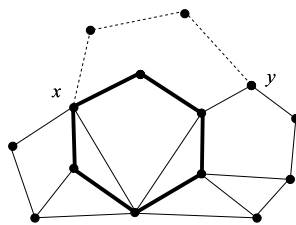


Figura 3.5: costruzione di un grafo 2-connesso

si noti anche che non è strettamente necessario aggiungere "nuovi" vertici: un lato tra vertici precedentemente non adiacenti va pure bene): è chiaro, infatti, che se G_0 non contiene snodi allora anche il nuovo grafo G è tale.

Ora, ogni grafo 2-connesso si può vedere come il risultato di successive operazioni di questo tipo a partire da un ciclo. Infatti, sia G un grafo 2-connesso; certamente G contiene almeno un ciclo, dunque esiste un massimo sottografo G_0 di G che può essere costruito nel modo descritto sopra. Se l'insieme dei vertici di G_0 coincide con quello di G , allora G si ottiene da G_0 mediante aggiunta di lati, che è una delle operazioni consentite, e dunque, per la massimalità, $G_0 = G$. Supponiamo quindi, per assurdo, che esista un vertice x di G che non appartiene a G_0 . Possiamo supporre che la distanza di x da G_0 sia 1, ovvero che esista un vertice y di G_0 tale che $e = \{y, x\}$ è un lato di G . Ora, poiché $G - y$ è connesso esiste un cammino semplice \mathcal{C} da x ad un altro vertice z di G_0 che non passa per y . Allora, partendo da e ed aggiungendo il cammino \mathcal{C} si ha un cammino semplice tra due punti distinti di G_0 che passa per x , il che contraddice la massimalità di G_0 . Dunque $G_0 = G$.

Torniamo ora al caso generale della k -connessione ed al Teorema fondamentale.

Teorema 3.8. (Menger 1927) *Siano s e t vertici non adiacenti di un grafo. Allora il massimo numero di cammini semplici indipendenti da s a t è uguale alla cardinalità minima di un insieme di vertici che separa s da t .*

DIMOSTRAZIONE. Siano s e t vertici non adiacenti del grafo G . Consideriamo il grafo diretto ottenuto da G con lo stesso insieme di vertici e con archi (x, y) e (y, x) per ogni lato $\{x, y\}$ di G . Assegnamo quindi ad ogni vertice diverso da s e da t capacità 1. Otteniamo così un grafo diretto con una funzione di capacità sui vertici. Per il teorema 3.6, esiste un flusso il cui valore uguaglia la capacità minima k di un insieme di vertici che separa s da t . Per come abbiamo definito la capacità, tale capacità minima è realizzata da un insieme di cardinalità minima di vertici che separano s da t . Per la seconda parte del Teorema 3.5, un flusso di valore k può essere realizzato da valori sugli archi che sono interi, e quindi uguali a 0 o ad 1. Tale flusso deve essere pertanto non nullo su k cammini (diretti) indipendenti da s a t . Dunque ci sono almeno k cammini indipendenti in G da s a t .

Viceversa, è chiaro che se esistono k cammini indipendenti da s a t allora un insieme di vertici che separa s da t deve contenere almeno k vertici (ce ne deve essere almeno uno in ciascun cammino). ■

La versione globale del Teorema di Menger discende immediatamente.

Teorema 3.9. *Sia $k \geq 2$, e sia G un grafo con almeno $k+1$ vertici. Allora G è k -connesso se e solo se per ogni coppia s, t di vertici distinti di G esistono k cammini semplici indipendenti da s a t .*

DIMOSTRAZIONE. In un verso l'affermazione è quasi banale: se per ogni coppia di vertici distinti di G esistono k cammini indipendenti allora G è k -connesso. Viceversa, supponiamo che G sia k -connesso e siano s, t vertici distinti. Se s e t non sono adiacenti allora l'esistenza di k cammini indipendenti da s a t discende subito dal Teorema di Menger. Se invece $e = \{s, t\}$ è un lato di G , allora certamente $G - e$ è $k - 1$ -connesso e ancora il teorema di Menger assicura l'esistenza di $k - 1$ cammini indipendenti tra s e t in $G - e$. Assieme al cammino set essi costituiscono una famiglia di k cammini indipendenti da s a t in G . ■

La nozione di k -connessione che abbiamo sin qui discusso è stata definita (in ciascuno dei due modi equivalenti) facendo riferimento principalmente ai *vertici* del grafo: sia nella definizione di insieme separatore, sia in quella di indipendenza di due cammini. Possiamo procedere similmente, facendo però riferimento ai *lati*, ed ottenendo una diversa nozione di connettività. Ed ancora potremo partire da due punti di vista (separazione e cammini) che un'altra versione del Teorema di Menger proverà essere equivalenti.

Sia $G = (V, E)$ un grafo; diciamo che un insieme C di lati **e.separa** G (dove "e." sta per *edge*) se $G - C$ non è connesso. Ciò significa che esistono due vertici distinti x e y di G tali che ogni cammino semplice da x a y utilizza almeno un lato appartenente a C (si tratta di quello che per grafi diretti abbiamo chiamato una sezione). Se $C = \{e\}$ è costituito da un solo lato ed e.separa G , si dice allora che il lato e è un **ponte** (in inglese: *bridge*) di G . Osserviamo, ad esempio, che la Proposizione 2.3 implica che grafo connesso è un albero se e soltanto se ogni suo lato è un ponte.

Se $1 \leq k \in \mathbb{N}$, diciamo che il grafo G è **k -e.connesso** se ha almeno 2 vertici e G non è separato da alcun insieme costituito da $k - 1$ lati o meno.

Dunque, un grafo G è 1-e.connesso se e solo se è connesso; ed è 2-e.connesso se e solo se ha almeno 2 vertici, è connesso e nessun suo lato è un ponte. È facile vedere che se e è un ponte in un grafo connesso G , allora ciascun estremo di e è uno snodo di G (lo si dimostri per esercizio). La figura 2.6, o il grafo T_2 della figura 5.5, mostrano invece degli esempi di grafi con uno snodo (il vertice centrale in figura) ma privi di ponti; si tratta cioè di grafi 2-e.connessi, ma non 2-connessi. I cammini semplici come P_3 non sono 2-e.connessi, mentre tali sono i cicli come C_3 (che però non sono 3-e.connessi); il grafo K_3 è 4-e.connesso.

L'**indice di e.connessione** $\lambda(G)$ di un grafo G è il massimo k per cui G è k -e.connesso. Ad esempio, $\lambda(G) = 1$ se e solo se G è connesso ed ha un ponte, $\lambda(C_n) = 2$ per ogni ciclo C_n , e $\lambda(K_n) = n - 1$ per ogni grafo completo K_n . L'indice di e.connessione del grafo di Petersen è 3.

Vediamo ora la cosa dal punto di vista dei cammini: diciamo che due cammini in un grafo G sono **e.disgiunti** se non hanno alcun lato in comune (dunque cammini indipendenti sono e.disgiunti, ma non vale il viceversa). Vedremo che la k -e.connessione equivale all'esistenza, per ogni coppia di vertici non adiacenti del grafo, di k cammini a due a due e.disgiunti tra i due vertici. Prima però di provare questo in generale, il lettore può cercare di dimostrarlo nel caso della 2-e.connessione mediante un risultato che sia analogo alla Proposizione 3.7.

Fatto questo, veniamo al Teorema di Menger nella versione per lati.

Teorema 3.10. *Siano s e t vertici non adiacenti di un grafo. Allora il massimo numero di cammini semplici e.disgiunti da s a t è uguale alla cardinalità minima di un insieme di lati che separa s da t .*

DIMOSTRAZIONE. Siano s e t vertici non adiacenti del grafo G . È chiaro che il minimo numero di lati che separano s da t deve essere almeno pari al massimo numero di cammini semplici e.disgiunti da s a t . Viceversa, si considera il grafo diretto associato a G come nella dimostrazione del Teorema 3.8, e questa volta si assegna una capacità 1 ad ogni arco. Si ottiene così una rete alla quale si applica il Teorema 3.5. Poiché ogni arco ha la stessa capacità, la capacità minima k di una sezione è il minimo numero di archi da cui essa può

essere costituita (che, in G , è a cardinalità minima di un insieme di lati che separa s da t). Poichè il flusso che realizza il valore massimo k è intero, esso assume valore 0 o 1; considerando l'insieme degli archi su cui tale flusso non è nullo si trovano certamente k cammini semplici e disgiunti tra s e t . ■

Anche in questo caso si ha come conseguenza la forma globale.

Teorema 3.11. *Sia $k \geq 2$, e G un grafo con almeno 2 vertici. Allora G è k -e.connesso se e solo se per ogni coppia s, t di vertici distinti di G esistono k cammini semplici e disgiunti da s a t .*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. ■

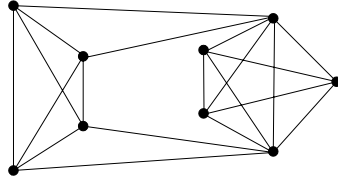


Figura 3.6: un grafo 3-e.connesso ma non 3-connesso

Esercizio 3.10. Si $\delta(G)$ il minimo tra i gradi dei vertici di un grafo connesso G . Si provi che $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Si trovino esempi di grafi per cui la differenza $\delta(G) - \kappa(G)$ è arbitrariamente grande.

Esercizio 3.11. Si provi l'equivalenza $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ nell'enunciato della Proposizione 3.7.

Esercizio 3.12. Sia $2 \leq k$ e sia G un grafo k -connesso. Si provi per ogni sottoinsieme di k vertici distinti di G esiste un ciclo che li contiene tutti.

Esercizio 3.13. (*Lemma del ventaglio*). Siano $k \geq 1$, G un grafo k -connesso e u un vertice di G . Siano y_1, y_2, \dots, y_k vertici distinti (e tutti diversi da u) di G . Si provi che esistono k cammini semplici P_1, \dots, P_k in G tali che P_i congiunge u a y_i e, per ogni $i \neq j$, P_i e P_j hanno in comune il solo vertice u . [sugg.: aggiungere a G un vertice adiacente ai vertici y_1, \dots, y_k , e quindi applicare il Teorema di Menger]

3.4 Fattori.

Un *fattore* di un grafo G è un sottografo il cui insieme dei vertici coincide con quello del grafo G . Uno *spanning-tree* di un grafo G è, ad esempio, un fattore di G . Se un fattore è un grafo regolare di valenza k , allora si dice che è un *k -fattore*.

1-fattori. Un interesse primario riveste l'esistenza in un grafo di 1-fattori, poiché l'idea di 1-fattore è l'estensione ad un grafo arbitrario di quella di accoppiamento completo in un grafo bipartito. Infatti, siccome un grafo ha ogni vertice di grado 1 se e solo se ogni sua componente connessa è costituita da due vertici e dal lato che li congiunge, un 1-fattore di un grafo G non è che un insieme di lati di G a due a due indipendenti e tali che i loro estremi coprono tutti i vertici di G (vedi figura 3.7, oppure la figura 4.2, che mostra un 1-fattore del grafo K_{10}).

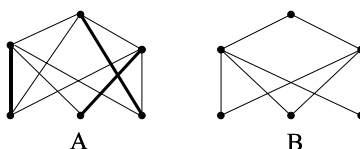


Figura 3.7: 1-fattori.

Chiaramente, un grafo che ammette un 1-fattore deve avere un numero pari di vertici, ma questa condizione è ben lontana dall'essere sufficiente (vedi figura 3.7 B).

Supponiamo che il grafo $G = (V, E)$ ammetta un 1-fattore U , e sia $S \subseteq V$. Osserviamo che se Δ è una componente connessa di $G - S$ e Δ ha un numero dispari di vertici, allora ci deve essere almeno un vertice di Δ che è estremo di un lato di U il cui altro estremo appartiene ad S (non può appartenere a $G - S$ dato che Δ è una componente connessa di questo). Inoltre ciascun elemento di S è associato in questo modo ad al più una componente connessa di $G - S$ con un numero dispari di vertici. Ne segue che *il numero di componenti connesse di $G - S$ con un numero dispari di vertici è al più $|S|$* . Ciò vale per ogni sottoinsieme S di vertici di G , e così inteso costituisce dunque una condizione necessaria a che G ammetta un 1-fattore. E come nel caso degli accoppiamenti in grafi bipartiti, una condizione necessaria relativamente ovvia, si rivela essere anche sufficiente: questo il contenuto di un importante risultato di Tutte. Se $G = (V, E)$ è un grafo e $S \subseteq V$, denotiamo con $q(G - S)$ il numero di componenti connesse di $G - S$ con un numero dispari di vertici.

Teorema 3.12. (Tutte 1947) *Un grafo $G = (V, E)$ ammette un 1-fattore se e soltanto se, per ogni $S \subseteq V$,*

$$q(G - S) \leq |S|. \quad (3.2)$$

DIMOSTRAZIONE. La necessità della condizione (3.2) affinché G ammetta un 1-fattore è già stata provata sopra. Dimostriamo quindi la sufficienza.

Sia $G = (V, E)$ un grafo che soddisfa (3.2). Osserviamo, innanzi tutto, che $|V|$ è pari (viene da (3.2) con $S = \emptyset$), e che se $x \in V$ allora $G - x$ contiene una ed una sola componente connessa dispari (dato che $|V \setminus \{x\}|$ è dispari per quanto appena osservato). Esiste dunque un sottoinsieme non vuoto S di V di ordine massimo tale che

$$q(G - S) = |S|. \quad (3.3)$$

Sia ora Δ una componente connessa di $G - S$.

- 1) *Se Δ ha un numero pari di vertici allora ammette un 1-fattore.*

Infatti, in questo caso, se X è un insieme di vertici di Δ :

$$|S| + |X| = |S \cup X| \geq q(G - (S \cup X)) = q(\Delta - X) + q(G - S) = q(\Delta - X) + |S|$$

da cui $q(\Delta - X) \leq |X|$. Per ipotesi induttiva Δ ammette un 1-fattore.

2) Se Δ ha un numero dispari di vertici, e u è un vertice di Δ adiacente a qualche $x \in S$; allora $\Delta - u$ ammette un 1-fattore.

Infatti, sia X è un insieme di vertici di $\Delta - u$; allora

$$q(G - (S \cup \{u\} \cup X)) = q(G - S) - 1 + q((\Delta - (\{u\} \cup X))) = |S| - 1 + q((\Delta - u) - X).$$

Ora, per l'ipotesi e la massimalità di S

$$q(G - (S \cup \{u\} \cup X)) < |S \cup \{u\} \cup X| = |S| + 1 + |X|;$$

quindi

$$q((\Delta - u) - X) \leq |X| + 1. \quad (3.4)$$

Ma, poiché $|\Delta - \{u\}|$ è pari, $q((\Delta - u) - X) \equiv |X| \pmod{2}$. Da (3.4) si deduce quindi $q((\Delta - u) - X) \leq |X|$. Per ipotesi induttiva $\Delta - \{u\}$ ammette un 1-fattore.

Visto questo, sia S come sopra, e siano $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ le componenti connesse di $G - S$ con un numero dispari di vertici. Per ogni sottoinsieme U di S si ha $q(G - U) \leq |U|$; il che significa che il numero di Δ_i che sono adiacenti a qualche $x \in U$ è maggiore o uguale ad $|U|$. Per il Teorema di Hall 2.18, esiste un accoppiamento completo tra S e le componenti Δ_i ; ovvero è possibile ordinare $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, in modo che per ogni $i = 1, \dots, n$, esista un $u_i \in \Delta_i$ con $\{x_i, u_i\}$ un arco di G .

A questo punto, per ogni $i = 1, \dots, n$ scegliamo un 1-fattore di $\Delta_i - u_i$ (esiste per il punto (2)); a questi uniamo un 1-fattore per ogni componente di $G - S$ che ha un numero pari di vertici (esiste per il punto (1)); e a tutto ciò aggiungiamo gli archi $\{x_1, u_1\}, \dots, \{x_n, u_n\}$. In questo modo si ottiene un 1-fattore di G e si completa la dimostrazione. ■

2-fattori. Un grafo connesso ha tutti i vertici di grado 2 se e soltanto se è un ciclo. Quindi, un 2-fattore di un grafo G è un fattore costituito da cicli a due a due privi di vertici in comune. In particolare, dunque, un grafo hamiltoniano ammette un 2-fattore (il grafo di Petersen ammette un 2-fattore ma non è hamiltoniano).

Teorema 3.13. (Petersen 1891) *Sia k un numero pari. Ogni grafo regolare k -valente ammette un 2-fattore.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V, E)$ un grafo regolare di grado pari, che chiaramente possiamo assumere connesso. Allora, per il teorema 1.5, G ha un circuito euleriano

$$\mathcal{U} : v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m = v_0.$$

Costruiamo un grafo bipartito G' a partire dall'insieme dei vertici $V^+ \cup V^-$, intendendo che ogni vertice $v \in V$ di G è "sdoppiato" in due vertici distinti v^+ e v^- , e come archi prendendo quelli del tipo $\{v_i^+, v_{i+1}^-\}$, ricavati dalla sequenza fornita dal circuito \mathcal{U} . Osserviamo che, poiché \mathcal{U} è un grafo euleriano, c'è un'ovvia corrispondenza biunivoca tra i lati di G e quelli

di G' ; inoltre G' è regolare di grado $k/2$. Un facile corollario del Teorema di Hall 2.18 (vedi esercizio 2.18), assicura che il grafo G' ammette un accoppiamento completo (cioè un 1-fattore). I lati di tale accoppiamento (o meglio i loro corrispondenti in G) costituiscono quelli di un 2-fattore di G . ■

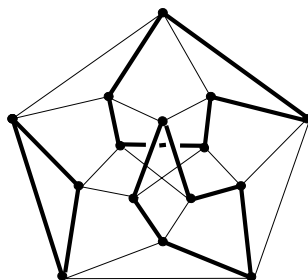
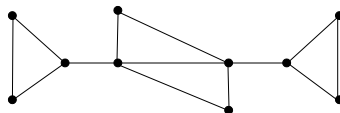


Figura 3.8: un 2-fattore

Si osservi che l'ammettere un 2-fattore non è una proprietà più forte di quella di ammettere un 1-fattore: ogni ciclo di lunghezza dispari ammette un 2-fattore (se stesso) ma non un 1-fattore; la figura seguente è un altro esempio con un numero pari di vertici.



Cicli hamiltoniani. Naturalmente un ciclo hamiltoniano, quando esiste, è un tipo particolare di fattore. Vediamo un interessante risultato che mette in relazione indice di stabilità e hamiltonianità dei grafi regolari. Ricordo che un sottoinsieme S dell'insieme dei vertici di un grafo G si dice stabile se nessuna coppia di elementi di S è adiacente in G , e che l'indice di stabilità $\alpha(G)$ di un grafo G è la massima cardinalità di un suo sottoinsieme stabile di vertici (quindi, $\alpha(G)$ è il massimo intero n tale che il grafo complementare \bar{G} contiene un sottografo completo K_n).

Teorema 3.14. (Chvátal e Erdős) *Sia $k \geq 2$, e G un grafo k -connesso. Se $\alpha(G) \leq k$ allora G è hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{C} : x_0 e_1 x_2 e_2 \dots x_{n-1} e_n x_n$ (con $x_0 = x_n$) un ciclo di G con il massimo numero di lati, e poniamo $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Supponiamo, per assurdo, che \mathcal{C} non sia un ciclo hamiltoniano. Allora $G - X$ ha una componente connessa non banale Δ ; sia y un vertice di Δ . Denotiamo con S l'insieme dei vertici di \mathcal{C} che sono adiacenti a qualche vertice di Δ . Osserviamo che $S \neq X$; infatti se fosse $S = X$, allora \mathcal{C} non sarebbe un ciclo di lunghezza massima (dire perché). Se $x \in X \setminus S$ allora, poiché δ è una componente connessa di $G - X$,

ogni cammino da y a x deve passare per qualche elemento di S . Dunque S è un insieme di vertici che separa G , e pertanto $|S| \geq k$.

Poniamo ora $S^+ = \{x_{i+1} \mid x_i \in S\}$ ($i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$). Siano $x_{i+1}, x_{j+1} \in S^+$ e supponiamo che, per $i < j$, $e = \{x_{i+1}, x_{j+1}\}$ sia un lato di G ; allora e non è un lato di \mathcal{C} . Inoltre, poiché $x_i, x_j \in S$, esistono vertici u, v di Δ tali che $\{u, x_i\}$ e $\{v, x_j\}$ sono lati di G e, siccome Δ è connesso, esiste un cammino semplice \mathcal{D} tra u e v tutto contenuto in Δ . Ma allora considerando $\{v, x_{j+1}\}$ seguito dal tratto di \mathcal{C} (all'indietro) tra x_j e x_{i+1} , poi dal lato e , quindi dal tratto di \mathcal{C} percorso da x_{j+1} a x_i , infine da $\{x_i, u\}$ e da \mathcal{D} , si otterrebbe un ciclo in G strettamente più lungo di \mathcal{C} (si veda l'argomento nella dimostrazione del Teorema di Ore 1.7), il che contraddice la scelta di quest'ultimo. Dunque S^+ è un insieme stabile di vertici di G . Ne segue che $S^+ \cup \{y\}$ è stabile: infatti, sempre per la massimalità di \mathcal{C} , nessun elemento di S^+ appartiene ad S , in particolare nessun elemento di S^+ è adiacente a y . Pertanto

$$\alpha(G) \geq |S^+ \cup \{y\}| > |S^+| = |S| \geq k$$

che è contro le ipotesi. ■

Esercizio 3.14. Si trovi un grafo cubico connesso privo di 1-fattori.

Esercizio 3.15. Sia G un grafo connesso che ammette un 2-fattore costituito da due cicli disgiunti. Si provi che G ha un 1-fattore se e solo se ha un numero pari di vertici.

Esercizio 3.16. Sia G un grafo cubico. Provare che se G ha un circuito hamiltoniano, allora il sottografo che si ottiene togliendo da G i lati di un tale circuito è un 1-fattore di G . Viceversa sia M un 1-fattore di G ; provare che ogni componente connessa del grafo ottenuto togliendo da G i lati di M è un ciclo. Concludere che un grafo cubico connesso è hamiltoniano se e soltanto se ammette un 1-fattore tale che il suo residuo è connesso.

Esercizio 3.17. Sia S un insieme di vertici del grafo $G = (V, E)$. Si provi che S è stabile se e soltanto se $V \setminus S$ è una copertura di G come definita nella sezione 3.2.

3.5 Esercizi

Esercizio 3.18. Un circuito euleriano diretto in un grafo diretto G è un circuito diretto che passa per ogni arco di G . Si provi che un grafo diretto G privo di vertici isolati ha un circuito euleriano diretto se e soltanto se è connesso e $d^e(v) = d^i(v)$ per ogni vertice v di G .

Esercizio 3.19. Un grafo *orientato* è un grafo diretto in cui per ogni coppia di vertici c'è al più un arco che li connette; detto formalmente, è un grafo diretto (V, A) tale che, per ogni $u, v \in V$, $(u, v) \in A \Rightarrow (v, u) \notin A$ (in altri termini ancora, un grafo orientato è un grafo semplice in cui ad ogni lato è assegnata una direzione). Si provi che in un grafo orientato completo (cioè ogni coppia di vertici è connessa da uno e un solo arco) esiste un cammino hamiltoniano diretto (attenzione: non necessariamente un circuito).

Esercizio 3.20. Si determini il grado di connessione e l'indice di e.connessione dei grafi delle figure 1.15.

Esercizio 3.21. Sia G un grafo con n vertici e sia $2 \leq k \leq n - 1$. Si provi che se G ha k vertici di grado $n - 1$ allora G è k -connesso.

Esercizio 3.22. Si dia un esempio di un grafo 3-e.connesso ma non 2-connesso.

Esercizio 3.23. Usando il *line graph* (esercizio 1.50) si dimostri il Teorema 3.10 a partire dal Teorema 3.8 (il viceversa non è facile).

Esercizio 3.24. Sia G un grafo k -connesso, e siano S, T sottoinsiemi disgiunti di vertici di G tali che $|S| \leq |T| \leq k$. Si provi che esistono $|T|$ cammini a due a due indipendenti di G tali che i loro estremi sono uno in S e l'altro in T . [sugg.: usare l'esercizio 3.13]

Esercizio 3.25. Provare che il grafo completo K_7 può essere decomposto in tre cicli hamiltoniani disgiunti (ovvero tali che a due a due non hanno alcun lato in comune, e che utilizzano globalmente tutti i lati di K_7). Provare che invece K_6 non può essere decomposto in cicli hamiltoniani disgiunti. Cosa si può dire in generale per K_n ?

Esercizio 3.26. Sia G un grafo. Un sottografo (indotto) massimale per essere 2-connesso si dice un *blocco* di G .

- (i) Dire perché nella definizione la parola "indotto" è messa tra parentesi.
- (ii) Si provi che due blocchi distinti hanno al più un vertice in comune.

Esercizio 3.27. Siano B_1 e B_2 due blocchi distinti del grafo G . Si provi che esiste al più un lato di G i cui estremi appartengono uno a B_1 ed uno a B_2 ; si dimostri che se un tale lato esiste allora è un ponte di G .

Esercizio 3.28. Sia G un grafo. Definiamo il grafo dei blocchi $B(G)$, prendendo come vertici i blocchi distinti di G , e congiungendo due di essi con un lato se e solo se hanno un vertice in comune oppure esiste un lato di G con un estremo in ciascuno di essi. Si provi che $B(G)$ è un grafo semplice, e che se G è connesso allora $B(G)$ è un albero.

Esercizio 3.29. Sia $k \geq 2$, e sia G un grafo k -connesso con $2k$ vertici. Si provi che G ha un ciclo hamiltoniano.

Esercizio 3.30. Si provi che un grafo cubico connesso è 2-connesso se e solo se è privo di ponti.

Esercizio 3.31. Sia G un grafo cubico 3-connesso. Si provi che ogni vertice di G appartiene al più ad un triangolo.

Esercizio 3.32. Si provi che un grafo cubico 3-e.connesso è 3-connesso.

Esercizio 3.33. Sia G un grafo 3-connesso, e siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ gli insiemi dei vertici di due cicli di lunghezza massima di G . Si provi che $|\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2| \geq 3$.

Esercizio 3.34. Sia G un grafo con un numero pari di vertici. Si provi che se G ha un 2-fattore allora G ha un 1-fattore.

Esercizio 3.35. Si utilizzi il Teorema di Tutte 3.12 per dimostrare il seguente (e anteriore) risultato di Petersen: un grafo cubico privo di ponti ammette un 1-fattore.

Esercizio 3.36. Si trovi un grafo euleriano privo di 2-fattori.

Esercizio 3.37. Si dia una dimostrazione del Teorema di Hall 2.18 utilizzando il Teorema di Menger. [sugg.: ad un grafo bipartito si aggiungano opportunamente due vertici...]

Esercizio 3.38. Dedurre il Teorema 2.18 dal Teorema di Tutte.

Esercizio 3.39. Si provi che il grafo $G = (V, E)$ contiene t archi indipendenti se e solo se $q(G - S) \leq |S| + 2t$ per ogni $S \subseteq V$.

Capitolo 4

Colorazioni

Il problema della colorazione (dei vertici, ma anche dei lati) di un grafo ha diverse motivazioni pratiche. Gli esempi che seguono sono un po' idioti, ma dovrebbero almeno dare un'idea.

Nella città capitale del pianeta Olosac si tiene un convegno di matematica intergalattica a cui sono invitati rappresentanti di ogni pianeta e razza (almeno, di quelle interessate alla materia) della galassia, i quali sono ospitati in vari alberghi. Ora, è ben noto che, con tutta la buona volontà, vi sono razze nell'universo per le quali la prossimità fisica è pressoché incompatibile. Ad esempio, è chiaro che un conigliode fumaliano non dormirà sonni tranquilli se nella stanza accanto alberga uno smilodonte elbaniano; a sua volta, una lattuga mistica di Macros II preferirà non correre il rischio di scendere in ascensore in compagnia del conigliode¹. Agli organizzatori si presenta dunque il problema: qual è il minimo numero di alberghi che occorre prevedere in modo che delegazioni di razze incompatibili non alloggino nello stesso albergo? Un simile problema può essere affrontato considerando un grafo i cui vertici siano le diverse delegazioni, e i cui lati connettano delegazioni i cui membri appartengono a razze galattiche incompatibili; e cercando quindi di stabilire qual è il minimo numero di colori (gli alberghi) con cui è possibile colorare i vertici del grafo in modo che vertici adiacenti abbiano colori diversi. Al problemi di colorazione dei vertici è dedicata la prima sezione di questo capitolo.

Supponiamo ora che, nell'ambito dei lavori del convegno intergalattico di matematica, ciascuna delegazione intenda avere degli incontri bilaterali con alcune altre delegazioni², e che ogni delegazione possa incontrarne al più un'altra ogni giorno; qual è il minimo numero di giorni che gli organizzatori devono prevedere affinché tutti gli incontri bilaterali abbiano luogo? Anche questa questione può essere tradotta in un problema di colorazione di un grafo: in questo caso ad essere colorati sono i lati. I vertici del grafo sono ancora le diverse delegazioni, ma questa volta i lati connettono coppie di delegazioni che intendono incontrarsi durante il convegno; il problema diventa il seguente: qual è il minimo numero di colori (i diversi giorni) con cui è possibile colorare *i lati* del grafo in modo che lati consecutivi (cioè con un vertice in comune) abbiano colori diversi? Illustreremo brevemente l'argomento della colorazione dei lati di un grafo nella seconda sezione del capitolo.

¹Senza contare che gli smilodonti cadono a terra privi di sensi alla vista di una lattuga mistica.

²Va da sé che gli organizzatori olosacchiani hanno accettato di prevedere incontri *bilaterali* solo dopo una lunga ed estenuante trattativa.

Nella terza sezione accenneremo ad un tipo di problemi, introdotto più di recente, in cui la colorazione (dei vertici o dei lati) è vincolata da liste di colori "consentiti".

Nella quarta sezione tratteremo invece un argomento che solo in parte è legato a problemi di colorazione, ma è di notevole importanza, e non soltanto in teoria dei grafi: la teoria di Ramsey. Per illustrarne un aspetto, supponiamo che, nel corso delle giornate intergalattiche di matematica sul pianeta Olosac, alcuni congressisti, appartenenti a varie razze, si ritrovino casualmente una sera in una certa birreria: se i congressisti sono almeno sei allora sicuramente esistono almeno tre di essi che appartengono a razze mutuamente compatibili, oppure mutuamente incompatibili (prima di andare avanti, si cerchi di dimostrare questa affermazione dopo averla tradotta in termini di grafi). Più in generale, la questione è la seguente: data una colorazione dei lati di un grafo completo K_n mediante due colori, qual è il valore minimo di n affinché il grafo contenga un sottografo completo K_r che sia monocromatico? L'affermazione fatta sopra è che se n è maggiore o uguale a 6 allora c'è sicuramente un triangolo monocromatico.

Nell'ultima sezione torniamo a parlare di colorazioni di vertici, introducendo una classe notevole di grafi (i grafi perfetti) la cui definizione è strettamente legata al numero cromatico.

4.1 Colorazioni dei vertici.

Come detto nel primo capitolo, una **colorazione** (dei vertici) di un grafo G è una assegnazione di un colore a ciascun vertice di G in modo che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore (in altri termini: in modo che gli estremi di ogni lato siano colorati con colori diversi). In modo formale, una colorazione di $G = (V, E)$ è un'applicazione $c : V \rightarrow S$, dove S è un insieme non vuoto (i cui elementi sono detti *colori*), tale che per ogni $\{u, v\} \in E$, $c(u) \neq c(v)$.

Sia $1 \leq k \in \mathbb{N}$; un grafo G si dice k -colorabile se esiste una colorazione di G con k colori. Un grafo è 1-colorabile se e solo se non contiene alcun lato; ed è 2-colorabile se e soltanto se è bipartito. Più in generale, è chiaro che dire che un grafo è k -colorabile equivale a dire che ammette una k -partizione dei vertici: il concetto è il medesimo, ma fare riferimento ai colori sembra espediente più consono alla sua visualizzazione. Ogni grafo finito G ammette una colorazione con un numero finito di colori, ed il *minimo* di colori mediante i quali è possibile colorare G è detto **numero cromatico** di G e si indica con $\chi(G)$. Dunque, dato un grafo G , $\chi(G) = k$ se e solo se G è k -colorabile e non è $(k - 1)$ -colorabile.

Per quanto osservato in precedenza, $\chi(G) = 2$ se e soltanto se G contiene almeno un lato ed è bipartito; dal Teorema 2.14 si ha quindi che $\chi(G) = 2$ se e soltanto se G non ha cicli di lunghezza dispari (posto che G abbia almeno un lato). Criteri simili non sono noti per numeri cromatici più grandi di 2, ed è in genere piuttosto difficile determinare il numero cromatico di un grafo. Chiaramente, il numero cromatico di un grafo è maggiore o uguale a quello di ogni suo sottografo; e, dunque un limite inferiore al numero cromatico di un grafo è certamente dato dall'esistenza di sottografi completi: se infatti G contiene un sottografo isomorfo al grafo completo K_n , allora $\chi(G) \geq \chi(K_n) = n$. Più avanti (in fondo alla sezione 4.4) daremo una costruzione di grafi privi di triangoli con numero cromatico arbitrario.

Non è molto complicato descrivere un algoritmo di tipo greedy che, dato un grafo G ne fornisce una colorazione (pur se in genere non ottimale). Si comincia col fissare un ordinamento

qualsiasi v_1, v_2, v_3, \dots ai vertici di G , e si considerano i colori $1, 2, 3, \dots$. Si assegna colore 1 al vertice v_1 , e colore 2 o 1 al vertice v_2 a seconda che sia o no adiacente a v_1 ; dopo di che si procede scorrendo la lista dei vertici ed assegnando ad ogni nuovo vertice il primo colore dell'elenco che sia ammissibile. In questo modo si ottiene certamente una colorazione di G , che tuttavia non è in generale realizzata con il minimo numero possibile di colori; dato che il numero di colori necessario dipende fortemente dalla scelta iniziale dell'ordinamento dei vertici (vedi esercizio 4.16). Ma non è possibile fare molto meglio; ed algoritmi che diano una colorazione ottimale, e quindi forniscano anche il valore esatto del numero cromatico del grafo, non sono noti.

Tuttavia, il semplice algoritmo che abbiamo descritto ci consente di fare un'osservazione non del tutto banale. Per esporla meglio, fissiamo la seguente notazione: se G è un grafo, indichiamo con $\Delta(G)$ il *massimo dei gradi* dei vertici di G .

Immaginiamo quindi di operare mediante l'algoritmo di sopra su un grafo G , e supponiamo di avere a disposizione un insieme S di colori abbastanza grande. Notiamo allora che ad ogni passo i primi $\Delta(G) + 1$ colori di S saranno sufficienti a procedere; infatti ad ogni nuovo vertice v è assegnato il primo colore ammissibile, ovvero il primo colore diverso da quelli di ogni vertice già colorato a cui v sia adiacente. Ora, il grado di v è al più $\Delta(G)$, e quindi ci sono al più $\Delta(G)$ colori che non possiamo assegnare; dunque almeno un colore tra i primi $\Delta(G) + 1$ che abbiamo a disposizione è ammissibile, e possiamo procedere. In conclusione, l'algoritmo descritto colora G con al più $\Delta(G) + 1$ colori³. In altre parole abbiamo provato

Sia G un grafo. Allora $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

I grafi completi K_n ed i cicli di lunghezza dispari C_{2n+1} sono esempi di grafi G il cui numero cromatico è uguale a $\Delta(G) + 1$. Il Teorema seguente mostra come essi siano essenzialmente i soli grafi con tale proprietà. Si noterà come il migliorare di un semplice valore 1 il limite trovato sopra sia tutt'altro che banale.

Teorema 4.1. (Brooks 1941) *Sia G un grafo connesso che non sia un ciclo di lunghezza dispari o un grafo completo. Allora*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione sul numero di vertici di G . Possiamo quindi assumere che $G = (V, E)$ sia un grafo connesso che non è né completo né un ciclo di lunghezza dispari, e tale che tutti i grafi con un numero inferiore di vertici soddisfano il Teorema. Poniamo $d = \Delta(G)$.

Osserviamo subito che possiamo assumere $d \geq 3$. Infatti, se $d = 2$, allora dalla formula dei gradi $|V| \leq |E|$; essendo G connesso, si ha che $|V| = |E|$ e G è un ciclo pari, oppure $|V| = |E| + 1$ e allora G è un albero; in ogni caso G è 2-colorabile.

Sia dunque $d \geq 3$. Scegliamo un vertice $v \in V$ con $d_G(v) = d$, e consideriamo il grafo $H = G - v$ (ottenuto da G togliendo il vertice v e tutti i lati ad esso adiacenti). Allora H è d -colorabile (infatti, se $\Delta(H) = d$, chiaramente H non può essere un grafo completo, dato

³Si osservi che, nelle considerazioni fatte, non è tanto il grado effettivo del nuovo vertice v che conta, quanto il grado di v nel sottografo indotto da lui e dai vertici già colorati; ciò suggerisce che, nell'ordinare i vertici del grafo prima di iniziare l'algoritmo, può essere una buona idea quella di mettere per primi i vertici con grado maggiore.

che qualche vertice di H è connesso a v , e dunque è d -colorabile per ipotesi induttiva; mentre se $\Delta(H) < d$ allora H è d -colorabile mediante l'algoritmo). Siano v_1, v_2, \dots, v_d i vertici (di H) adiacenti a v in G . Se, in una d -colorazione di H , due di questi vertici hanno lo stesso colore, allora almeno uno dei d colori non compare in v_1, \dots, v_d ; colorando v con tale colore otteniamo una d -colorazione di G . Pertanto possiamo assumere che:

- 1) ogni d -colorazione di H assegna colori distinti ai vertici v_1, \dots, v_d .

Conveniamo di chiamare i il colore del vertice v_i in una data d -colorazione di H .

Osserviamo anche che, per ogni i il grado di v_i in H è al più $d-1$; se in una d -colorazione di H , v_i è adiacente a due vertici dello stesso colore, allora i vertici adiacenti a v_i impiegano al massimo $d-2$ colori, lasciando fuori, poniamo, il colore $j \neq i$, ma allora è possibile cambiare il colore di v_i con j , ottenendo ancora una d -colorazione di H che viola il punto 1). Dunque

- 2) per ogni $1 \leq i \leq d$ ed ogni d -colorazione di H , i vertici adiacenti a v_i in H hanno colori distinti.

Similmente si osserva che, data una d -colorazione di H , se un vertice w di H è adiacente a tre vertici dello stesso colore, allora un colore diverso da quello di w non compare tra i vertici ad esso adiacenti, ed è possibile cambiare il colore di w con tale nuovo colore ottenendo ancora una d -colorazione di H .

Ora, per ogni $1 \leq i < j \leq d$, sia $H_{i,j}$ il sottografo indotto in H dai vertici i cui colori sono i e j , e sia $C_{i,j}$ la componente connessa di $H_{i,j}$ che contiene v_i . È chiaro che possiamo scambiare tra loro colori i e j su tutti e soli i vertici di $C_{i,j}$ ottenendo ancora una d -colorazione di H . Se v_j non appartenesse a $C_{i,j}$, si otterrebbe, mediante questo scambio, una d -colorazione di H in cui sia v_i che v_j hanno colore j , il che è escluso da 1). Pertanto

- 3) v_i e v_j appartengono alla stessa componente connessa $C_{i,j}$ di $H_{i,j}$.

Ora, dati $1 \leq i, j \leq d$, sia \mathcal{P} un cammino semplice in $C_{i,j}$ che connette v_i a v_j , e supponiamo che $\mathcal{P} \neq C_{i,j}$. Allora, essendo $C_{i,j}$ connesso e poiché, per il punto 2), sia v_i che v_j hanno grado 1 in $C_{i,j}$, esiste un vertice w interno al cammino \mathcal{P} che ha grado almeno 3 in $C_{i,j}$; sia w un tale vertice a minima distanza da v_i . Ora, w è adiacente a tre vertici dello stesso colore in $C_{i,j}$ (che è 2-colorato) e dunque in H ; per quanto osservato in precedenza è possibile ricolorare w con uno dei d colori che è diverso sia dal colore i che dal colore j , ottenendo una nuova d -colorazione di H . In questa colorazione w non appartiene pertanto a $C_{i,j}$, e siccome rimuovere w da $C_{i,j}$ rende il grafo restante sconnesso (si rifletta su questa affermazione), in questa nuova colorazione v_i e v_j non appartengono alla stessa componente connessa di $H_{i,j}$, in contraddizione con il punto 3). Dunque \mathcal{P} non contiene vertici di grado maggiore o uguale a 3 in $C_{i,j}$, e pertanto $\mathcal{P} = C_{i,j}$. Quindi

- 4) per ogni $1 \leq i \leq d$, il sottografo $C_{i,j}$ è costituito da un unico cammino semplice con estremi v_i e v_j .

Supponiamo ora che per tre distinti i, j, k i cammini semplici $C_{i,j}$ e $C_{i,k}$, oltre che in v_i abbiano un altro vertice in comune u . Allora, in H , u (che ha ovviamente colore i) è adiacente a due distinti vertici di colore j e due distinti vertici di colore k , e per la solita ragione possiamo ricolorare u con un colore diverso da i , ed in questa colorazione v_i non è più connesso a v_j in $C_{i,j}$, contro il punto 3). Pertanto

- 5) per distinti i, j, k i cammini semplici $C_{i,j}$ e $C_{i,k}$ si incontrano solo nel vertice v_i .

Osserviamo che i vertici v_1, v_2, \dots, v_d non sono tutti mutuamente adiacenti, perché in tal caso, essendo tutti adiacenti a v ed essendo $d = \Delta(G)$ (e G connesso), si avrebbe che G è costituito dai vertici v, v_1, \dots, v_d , ed è un grafo completo, il che è contro l'ipotesi. Quindi tra essi esiste almeno una coppia, che possiamo assumere sia v_1, v_2 , di vertici non adiacenti. In altre parole, $C_{1,2}$ contiene un vertice $u \neq v_2$ (di colore 2) adiacente a v_1 . A questo punto, scambiamo i colori 1 e 3 per i vertici di $C_{1,3}$, ottenendo una nuova d -colorazione di H , rispetto alla quale indichiamo con $H'_{i,j}$ e $C'_{i,j}$ i grafi ricavati secondo le ovvie definizioni. Per 4) i $C'_{i,j}$ sono cammini semplici. Ora u (che mantiene il colore 2, essendo adiacente a v_1 (che ha colore 3) appartiene a $C'_{2,3}$. D'altra parte il cammino semplice da u a v_2 , ottenuto da $C_{1,2}$ togliendo il vertice v_1 ed il lato $\{v_1, u\}$, mantiene la sua vecchia colorazione nei colori 1 e 2 e quindi è il primo pezzo dell'unico cammino 1,2-colorato che parte da v_2 (che mantiene colore 2) anche nella nuova colorazione; in altre parole è un pezzo del cammino semplice $C'_{1,2}$. Ma allora il vertice u (che non è adiacente a v) appartiene sia a $C'_{2,3}$ che a $C'_{1,2}$. Questo contraddice 5) rispetto alla nuova colorazione, e conclude la dimostrazione del Teorema. ■

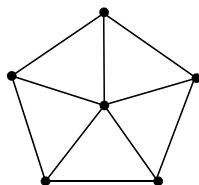
Chi ha letto la dimostrazione avrà notato come in essa non si faccia quasi alcun ricorso a risultati precedenti; a partire da definizioni di base (connessione, cammino semplice, etc.) viene sviluppato un ragionamento ad hoc che richiede un certa sottigliezza. Ciò è tipico di molte dimostrazioni in Teoria dei Grafi: spesso i problemi devono essere affrontati con mezzi teorici minimi, ma notevole ingegno. Quanto al contenuto del teorema di Brooks, esso è senz'altro significativo; tuttavia in generale il limite $\Delta(G)$ è lontano dal valore effettivo di $\chi(G)$. Ma, sempre in generale, non è possibile fare molto meglio: ad esempio, non esiste una descrizione soddisfacente dei grafi G per cui $\chi(G) = \Delta(G)$.

Esercizio 4.1. Si devono assegnare le frequenze ad otto radio locali R_1, \dots, R_8 , con il vincolo che stazioni la cui distanza è inferiore a 100 km devono trasmettere su frequenze differenti. Qual è il minimo numero di frequenze da impiegare se le reciproche distanze tra le emittenti sono quelle descritte dalla tabella seguente?

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	
0	233	114	62	55	70	64	144	R_1
	0	91	251	152	62	47	60	R_2
		0	65	64	166	121	77	R_3
			0	38	188	135	149	R_4
				0	63	109	85	R_5
					0	65	131	R_6
						0	71	R_7
							0	R_8

Esercizio 4.2. Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $c = \chi(G)$ il suo numero cromatico. Si provi che $|E| \leq \binom{c}{2}$.

Esercizio 4.3. Per ogni $n \geq 3$, si determini il numero cromatico della ruota con n -raggi W_n (vedi Figura 4.1).

Figura 4.1: il grafo W_5

4.2 Colorazioni dei lati.

Una **colorazione dei lati** di un grafo G è una assegnazione di un colore a ciascun lato di G in modo che lati consecutivi non abbiano lo stesso colore (in altri termini: in modo che per ogni vertice v di G i lati incidenti a v siano colorati con colori diversi). Formalmente, una colorazione dei lati di $G = (V, E)$ è una applicazione $\gamma : E \rightarrow S$, tale che, per ogni $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(e_1) \neq \gamma(e_2)$.

Immaginiamo di dover organizzare un torneo all'italiana tra un numero n di squadre di calcio; quante giornate sono richieste (al minimo) per giocare tutte le partite? Siccome ogni squadra deve affrontare $n - 1$ squadre, è chiaro che $n - 1$ è un limite inferiore al numero totale di giornate. Forse saremmo portati a ritenere che sia anche il numero giusto: questo è vero se n è pari (ma non è del tutto ovvio), ma non è vero se n è dispari. Supponiamo, ad esempio, che le squadre siano 9; allora il numero complessivo di partite da giocare è $\binom{9}{2} = 36$; se fossero sufficienti 8 giornate per disputarle tutte ci sarebbe almeno una giornata in cui vengono disputate 5 partite (dato che $8 \times 4 = 32 < 36$), ma 5 partite coinvolgono 10 squadre, il che è impossibile. Dunque, se n è dispari sono necessarie almeno n giornate per completare il torneo. Sono sufficienti? Come vedremo la risposta è sì. Per il momento osserviamo come questo problema si riduca naturalmente al problema della colorazione dei lati del grafo completo K_n che impieghi il minimo numero di colori: i vertici sono le diverse squadre, ed ogni colore indica le partite da giocarsi in una stessa giornata. Trovare una colorazione del genere fornisce quindi anche il calendario completo degli incontri. Discuteremo più avanti questo caso in dettaglio; per il momento, torniamo a considerazioni di carattere generale.

Il minimo numero di colori mediante i quali è possibile colorare i lati di un grafo G si chiama **indice cromatico** di G , e lo denoteremo con $\chi'(G)$.

Sia C_n il ciclo di lunghezza n ; allora è facile provare che $\chi'(C_n)$ è uguale a 2 o a 3 a seconda che n sia pari o dispari. L'esempio di sopra chiede di trovare l'indice cromatico di un grafo completo: questione sulla quale torneremo più avanti.

Supponiamo sia data una colorazione dei lati di un grafo G ; allora, per ogni vertice v di G , i lati incidenti a v hanno tutti colore diverso; quindi il numero di colori è almeno pari al grado di v . Pertanto, per ogni grafo G , si ha

$$\Delta(G) \leq \chi'(G)$$

(dove $\Delta(G)$ è il massimo dei gradi dei vertici di G).

In molti casi si trova che $\Delta(G)$ è uguale all'indice cromatico di G . Ad esempio si ha

Proposizione 4.2. (König 1916) *Sia G un grafo bipartito. Allora $\chi'(\gamma) = \Delta(G)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, e procediamo per induzione sul numero di lati $|E|$. Se $|E| = 0$ non c'è nulla da provare.

Sia quindi $|E| \geq 1$, sia $d = \Delta(G)$, e sia $e = \{x_1, x_2\} \in E$. Per ipotesi induttiva, i lati del grafo $G - e$ possono essere colorati mediante d colori. Ora, in $G - e$, i vertici x_1 e x_2 hanno grado al più $d - 1$; quindi ci sono due colori c_1 e c_2 (tra i d a disposizione) tale che c_1 non compare tra i colori dei lati incidenti a x_1 e c_2 non compare tra i colori dei lati incidenti a x_2 (ad esclusione, ovviamente, del lato e che non è ancora colorato). Se $c_1 = c_2$, basta assegnare ad e tale colore per ottenere una d -colorazione dei lati di G . Supponiamo quindi che $c_1 \neq c_2$, e quindi che x_1 sia estremo di un lato (ed uno solo) colorato con c_2 . A partire da tale lato consideriamo un cammino massimale \mathcal{C} in $G - e$ i cui lati sono alternativamente colorati in c_2 e c_1 . Allora \mathcal{C} è necessariamente semplice: infatti se uno stesso vertice comparisse due volte in \mathcal{C} , tale vertice non può essere x_1 (dato che nessun lato di colore c_1 è ad esso adiacente), né può essere un altro vertice perché in tal caso vi sarebbero almeno tre lati di \mathcal{C} adiacenti ad esso, contro il fatto che i lati di \mathcal{C} sono di due soli colori. Inoltre, \mathcal{C} non può contenere il vertice x_2 , perché se così fosse x_2 sarebbe estremo di un lato colorato con c_1 ; dunque \mathcal{C} avrebbe lunghezza pari, ed aggiungendo ad esso il lato e si otterrebbe un ciclo di lunghezza dispari in G , il che non è possibile essendo G bipartito. Ora ricoloriamo i lati di \mathcal{C} , scambiando i due colori c_1 e c_2 ; per la scelta di c_2 e la massimalità di \mathcal{C} , ciò fornisce ancora una d -colorazione dei lati di $G - e$. Assegnando allora al lato e il colore c_2 si ottiene una d -colorazione dei lati di G . ■

Ricordiamo la definizione di *line graph* $L(G)$ di un grafo G (vedi esercizio 1.50): è il grafo i cui vertici sono gli archi di G e due di essi sono adiacenti in $L(G)$ se e soltanto se hanno un estremo in comune in G . Si riconosce quindi che l'indice cromatico di un grafo G coincide con il numero cromatico del suo line graph $L(G)$. Osservando che ogni lato di un grafo G ha un estremo in comune con al più $2\Delta(G) - 2$ altri lati (e quindi $\Delta(L(G)) \leq 2\Delta(G) - 2$), ed applicando il Teorema di Brooks al grafo $L(G)$, si ricava $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 2$. Tuttavia, si può dire molto di più: infatti vale il seguente importante risultato.

Teorema 4.3. (Vizing 1964) *Sia G un grafo. Allora*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la seconda disuguaglianza per induzione sul numero m di archi di un grafo $G + (V, E)$, l'affermazione essendo ovvia per grafi quando $m = 0$.

Poniamo $\Delta = \Delta(G)$. Se $m = \Delta$ il risultato è ovvio; assumiamo quindi $m > \Delta$. Per ipotesi induttiva, per ogni $e \in E$ esiste una colorazione dei lati di $G - e$ con $\Delta + 1$ colori.

Data un'applicazione γ_e definita da un certo sottoinsieme E' di E (che sarà in genere del tipo $E - e$) nell'insieme dei colori $C = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$, per ogni vertice $v \in V$ ed ogni colore $i \in C$, diciamo che i è *evitato* da v se per ogni lato e appartenente ad E' ed incidente a v si ha $\gamma_e(e) \neq i$; poiché v ha grado al più Δ , esiste sempre almeno un colore evitato da v .

Sia ora $e = \{x, y\} \in E$ e consideriamo una $(\Delta + 1)$ -colorazione γ_e degli archi di $G - e$. Se, rispetto a tale colorazione, uno stesso colore k è evitato sia da x che da y , allora possiamo chiaramente estendere γ_e ad una colorazione di E ponendo $\gamma_e(e) = k$. Altrimenti, sia s è un colore evitato da x , e t , con $t \neq s$, un colore evitato da y ; c'è un unico cammino massimale in $G - e$ che inizia dal vertice x i cui archi sono alternativamente colorati in t ed in s (un $t|s$ -cammino); se tale cammino non termina in y , possiamo ricolorare gli archi di $G - e$,

scambiando i colori t ed s nel cammino, ottenendo così una nuova colorazione in cui t è evitato sia da x che da y , da cui ricaviamo una colorazione di G colorando in t l'arco e , Assumendo, per assurdo, che G non ammetta una colorazione degli archi con $\Delta + 1$ colori, abbiamo quindi:

(+) Per ogni $(\Delta + 1)$ -colorazione degli archi di $G - \{x, y\}$ in cui il colore s è evitato da x e il colore t è evitato da y , esiste un $t|s$ -cammino da x a y .

Sia ora $e_0 = \{x, y_0\} \in E$, e sia γ_0 una fissata $(\Delta + 1)$ -colorazione di $G - e_0$. Supponiamo che esista un arco $e_1 = \{x, y_1\}$ ($e_1 \neq e_0$) tale che $\gamma_0(e_1)$ è evitato da y_0 ; possiamo allora definire una colorazione G_1 di $G - e_1$ ponendo, per ogni $e \in E - e_1$,

$$\gamma_1(e) = \begin{cases} \gamma_0(e_1) & \text{se } e = e_0 \\ \gamma_0(e) & \text{se } e \neq e_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Allo stesso modo, se esiste un arco $e_2 = \{x, y_2\}$, con $e_2 \neq e_0$, tale che $\gamma_1(e_2)$ è evitato da y_1 , possiamo assegnare una colorazione γ_2 a $G - e_2$ "spostando" il colore $\gamma_1(e_2)$ dall'arco e_2 all'arco e_1 . Si procede in questo modo fino a ottenere un massimo insieme di archi distinti $e_0 = \{x, y_0\}, \dots, e_k = \{x, y_k\}$, e di colorazioni G_i di $G - e_i$ (per $i = 0, \dots, k$), e con k massimo tale che

- $\gamma_i(e) = \gamma_0(e)$ per ogni $e \notin \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ ed ogni $i = 0, \dots, k$;
- $\gamma_{i+1}(e_i) = \gamma_0(e_{i+1})$ è evitato da y_{i+1} in γ_i per ogni $i = 0, \dots, k - 1$.

Sia t un colore evitato da y_k in γ_0 . Allora, t è evitato da y_k anche in γ_k . Ora, t non è evitato da x , poiché in tal caso potremmo estendere la colorazione γ_k ad una di G colorando con t il lato $\{x, y_d\}$. Quindi, uno degli archi incidenti in x ha il colore t in γ_k , e dunque, per la massimalità di k , esiste un indice $i \in \{0, \dots, d - 1\}$ tale che $\gamma_0(e_\ell) = s$.

Sia t un colore evitato da y_k in γ_0 . Allora, t è evitato da y_k anche in γ_k . Ora, t non è evitato da x , poiché in tal caso potremmo estendere la colorazione γ_k ad una di G colorando con s il lato $\{x, y_d\}$. Quindi, uno degli archi incidenti in x ha il colore t , e dunque, per la massimalità di k , esiste un indice $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$ tale che $\gamma_0(e_\ell) = \gamma_k(e_\ell) = t$.

Sia ora s un colore evitato da x in γ_0 , ed osserviamo che s è evitato da x in ogni γ_i ($i = 0, \dots, k$). Per (+) esiste, nella colorazione γ_k , un $s|t$ -cammino \mathcal{C} da y_k in x . Per quanto detto sopra, l'ultimo arco di \mathcal{C} deve essere $e_\ell = \{x, y_\ell\}$. Osserviamo poi che, per la scelta di ℓ , $t = \gamma_\ell(e_{\ell+1})$, e dunque $\{x, y_{\ell+1}\}$ è l'ultimo arco dell'unico $s|t$ cammino massimale \mathcal{D} da y_k ad x in γ_ℓ . Ora, tranne l'ultimo arco, i due cammini \mathcal{C} e \mathcal{D} sono costituiti da archi che non sono incidenti ad x e che dunque hanno la stessa colorazione sia in γ_k che in γ_ℓ ; pertanto, \mathcal{C} e \mathcal{D} coincidono, tranne eventualmente che per l'ultimo arco; ma allora $y_\ell = y_{\ell+1}$, che è una contraddizione. ■

Dunque, ad esempio, ricordando il caso degli incontri bilaterali al congresso intergalattico citato all'inizio del capitolo, possiamo concludere che sicuramente tali incontri potranno tutti aver luogo in un numero di giornate pari a quello del massimo numero di incontri che una singola delegazione intende effettuare più uno. Un risultato non del tutto ovvio.

Torniamo ora alla questione di determinare l'indice cromatico dei grafi completi K_n . Chiameremo $\chi'(K_n) \geq n - 1$. Supponiamo prima che $n = 2k + 1$ sia dispari; in tal caso il numero di lati è $|E| = k \cdot (2k + 1)$. Se fosse $\chi' = \chi'(K_{2k+1}) = 2k$, allora per almeno uno dei colori s ,

il numero $t(s)$ di lati di colore s deve soddisfare

$$t(s) \geq |E|/\chi' = \frac{k(2k+1)}{2k} = \frac{2k+1}{2};$$

e siccome tale numero è un intero, deve essere $t(s) \geq k+1$. Ma lati dello stesso colore hanno tutti estremi distinti, e $k+1$ lati hanno $2k+2$ estremi distinti, il che non può essere, perché questo numero supera quello dei vertici di K_{2k+1} . Dunque $\chi' \geq \Delta(K_{2k+1}) + 1 = 2k+1$. A questo punto il teorema di Vizing assicura che $\chi'(K_{2k+1}) = 2k+1$; tuttavia diamo una esplicita colorazione che poi ci sarà utile anche nel caso pari. Dunque, prendiamo come insieme S dei colori l'insieme delle classi di resto modulo $n = 2k+1$, che scriviamo come $S = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$; quindi etichettiamo i vertici di K_n con gli interi $0, 1, \dots, n-1$, ed assegnamo ad ogni lato $\{i, j\}$ di K_n il colore $\gamma'(\{i, j\}) = [i+j]_n$. Se due lati $\{i, j\}$ ed $\{i, k\}$ con un estremo in comune hanno lo stesso colore, allora $i+j \equiv i+k \pmod{n}$, da cui $j \equiv k \pmod{n}$, da cui segue $j = k$ dato che entrambi sono compresi tra 0 e $n-1$. Dunque quella data è una colorazione dei lati di K_n con n colori. Osserviamo che, per ciascun vertice i , i lati adiacenti ad i assumono tutti i colori di S tranne il colore $[2i]_n$; poiché n è dispari, l'insieme delle classi $[2i]_n$, con $0 \leq i \leq n-1$ è tutto S ; concludiamo dunque che tali colori "mancanti" sono, al variare dei vertici, tutti diversi.

Supponiamo ora che $n = 2k$ sia pari (con $k \geq 2$), e indichiamo con $0, 1, \dots, n-1$ i suoi vertici. Togliamo da K_n il vertice $n-1$ e coloriamo i lati del restante grafo completo K_{n-1} con il metodo descritto in precedenza (i colori sono le classi di resto modulo $n-1$). Quindi ad ogni vertice del tipo $\{i, n-1\}$ assegnamo il colore $[2i]_{n-1}$. Per quanto osservato sopra, in tal modo si ottiene una colorazione dei lati di K_n , e questa utilizza $n-1$ colori.

Abbiamo dunque provato il seguente risultato.

Proposizione 4.4. *Sia $k \geq 1$. Allora $\chi'(K_{2k}) = 2k-1$ e $\chi'(K_{2k+1}) = 2k+1$.*

Le esplicite colorazioni che abbiamo dato forniscono anche un metodo, nel caso si tratti di rappresentare lo schema di un torneo all'italiana, per stilare un calendario, mediante il quale è inoltre possibile determinare con un semplice calcolo in quale giornata una data partita $\{i, j\}$ dovrà essere disputata. Di metodi del genere ce sono molti altri: uno di questi è suggerito dalla figura seguente (dove si considera il caso di 10 squadre):

Figura 4.2: un accoppiamento in K_{10}

Nel diagramma sono indicati gli incontri della prima giornata; quelli della seconda giornata si ottengono tenendo fissi i numeri sui vertici e ruotando il diagramma dei lati di $1/9$ di angolo giro; un'ulteriore rotazione darà gli incontri della terza giornata, e così via.

Esercizio 4.4. Si determini l'indice cromatico dei grafi dei poliedri regolari, quello dei grafi dell'esercizio 2.14, e quello del grafo di Grötzsch.

Esercizio 4.5. Si provi che l'indice cromatico del grafo di Petersen è 4. Si cerchi di trovare un altro grafo cubico con indice cromatico uguale a 4 (ce ne sono).

Esercizio 4.6. Sia G un grafo cubico connesso e tale che $\chi'(G) = 4$. Si provi che G non ammette cicli hamiltoniani.

Esercizio 4.7. Si determini, per ogni $n \geq 2$, l'indice cromatico del n -ipercubo Q_n .

4.3 L-colorazioni.

Il concetto di L -colorazione (dove L sta per “lista”, anche se non allude ad alcuna forma di ordinamento) è un'importante generalizzazione del concetto di colorazione (dei vertici, o degli archi). L'obiettivo finale è lo stesso: colorare i vertici (archi) di un grafo in modo che vertici adiacenti (archi consecutivi) abbiano colori diversi, ma con la limitazione derivante dalla richiesta che il colore di ciascun vertice (o arco) x sia assegnato prendendolo da una “lista” $L(x)$ di colori associata a x (che, in generale, non coincide con l'insieme di tutti i colori disponibili).

Formalizziamo la cosa nel caso dei vertici. Sia $G = (V, E)$ un grafo, e sia L un'applicazione (*lista*) che ad ogni $v \in V$ associa un insieme non vuoto $L(v)$; una L -colorazione di G è una colorazione di G

$$c : V \longrightarrow \bigcup_{v \in V} L(v)$$

tale che $c(v) \in L(v)$ per ogni $v \in V$.

Sia $k \geq 1$; un'applicazione L del tipo descritto sopra la chiameremo k -lista se $|L(v)| \geq k$ per ogni $v \in V$. A prima vista parrebbe che se k è il numero cromatico del grafo G , allora per ogni k -lista L , avendo a disposizione k -scelte per il colore di ciascun vertice, sia sempre possibile trovare una L -colorazione di G . L'esempio della figura 4.3 mostra che così non è.

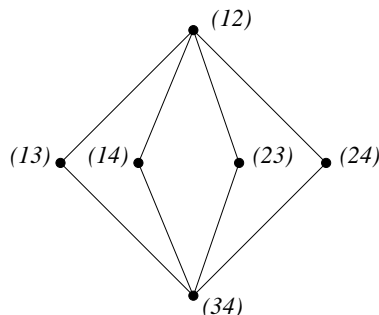


Figura 4.3: $K_{2,4}$ non è 2-assegnabile

Il grafo è il grafo bipartito $K_{2,4}$ (e quindi ha numero cromatico 2), ma non è possibile estrarre una colorazione dalla 2-lista indicata in figura.

Sia $k \geq 1$. Un grafo $G = (V, E)$ si dice k -assegnabile se per ogni k -lista L su V esiste una L -colorazione di G . Il numero ℓ -cromatico di G è il minimo k tale che G è k -assegnabile; esso si denota con $ch(G)$ (dove ch sta per “choosable”, che noi abbiamo goffamente tradotto con “assegnabile”). È chiaro che $ch(G) \geq \chi(G)$, per ogni grafo G ; è anche ovvio che il numero ℓ -cromatico di un grafo completo con n vertici è $n - 1$ (quindi, $ch(K_n) = n = \chi(K_n)$), e si può provare che lo stesso avviene per i cicli, cioè $ch(C_n) = 2, 3$ a seconda che n sia pari o dispari (ma la dimostrazione non è ovvia, vedi esercizio 4.9). Ma, in generale, come

abbiamo osservato sopra, la disuguaglianza $ch(G) \geq \chi(G)$ è propria. Difatti, $K_{2,4}$ ha numero ℓ -cromatico 3, e non dovrebbe risultare difficile generalizzare l'esempio della figura 4.3 per dimostrare che, per ogni $n \geq 2$, K_{n,n^n} ha numero ℓ -cromatico maggiore o uguale a $n + 1$. (altri esempi di grafi bipartiti con numero ℓ -cromatico arbitrario sono suggeriti negli esercizi 4.10 e 4.11). Di fatto, la classe dei grafi con numero ℓ -cromatico 2 è piuttosto ristretta (pur se contiene ogni albero), ed è essenzialmente descritta dalla seguente Proposizione.

Proposizione 4.5. *Sia G un grafo connesso e privo di vertici di grado 1. Allora $ch(G) = 2$ se e soltanto se G è un ciclo di lunghezza pari oppure G consiste di un ciclo di lunghezza pari e di un ciclo di lunghezza 4 che in comune hanno due archi consecutivi.*

DIMOSTRAZIONE. Vedi esercizi 4.27–4.29. ■

D'altra parte, limitazioni generali per il numero ℓ -cromatico di un grafo si trovano in modo simile a quanto visto per il numero cromatico. Ad esempio, riguardando la descrizione dell'algoritmo greedy nella sezione 4.1, si riconosce che quello stesso algoritmo fornisce una L -colorazione del grafo G per ogni k -lista L con $k \geq \Delta(G) + 1$. Di fatto, sussiste il Teorema di Brooks per L -colorazioni (quindi $ch(G) \leq \Delta(G)$ per ogni grafo G che non sia completo o un ciclo dispari). Quello che proveremo ora è un bel Teorema riguardante i grafi planari (che va confrontato con il Teorema dei Quattro Colori).

Teorema 4.6. (Thomassen 1994) *Sia G un grafo planare; allora $ch(G) \leq 5$.*

Per la dimostrazione, è conveniente introdurre la classe dei grafi *triangolati*: un grafo è triangolato se è piano ed ogni sua faccia limitata è un triangolo (ovvero ha il bordo costituito da tre archi), mentre il bordo di quella esterna è un ciclo.

Lemma 4.7. *Sia $G = (V, E)$ un grafo triangolato con almeno tre vertici; sia C l'insieme dei vertici del ciclo che costituisce il bordo esterno di G . Sia L una lista di colori sui vertici di G tale che $|L(x)| \geq 3$ per ogni $x \in C$, e $|L(x)| \geq 5$ per ogni $x \in V \setminus C$. Siano x_1, x_2 vertici consecutivi di C . Allora ogni L -assegnazione di colori (distinti) di x_1 e x_2 può essere estesa ad una L -colorazione di G .*

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sul numero n di vertici di G . Se $n = 3$, G è un triangolo e la cosa è chiara. Sia dunque $n \geq 4$, ed assumiamo il Lemma vero per grafi triangolati con un numero minore di vertici. Sia $C : x_1 x_2 \dots, x_t x_1$ il ciclo esterno di G e distinguiamo 2 casi.

(1) Esiste un vertice x_i del ciclo C con $2 \leq i \leq t - 2$, adiacente a x_t (l'arco $\{x_t, x_i\}$ si dice una *corda* del ciclo C).

In questo caso, la corda $e = \{x_t, x_i\}$ ripartisce G in due porzioni del piano, che hanno in comune soltanto e (con i suoi due estremi). Sia G_1 il sottografo indotto dalla porzione che contiene il vertice x_1 (e, di conseguenza, anche x_2); è facile vedere che G_1 è triangolato, e quindi, per ipotesi induttiva, esiste una L -colorazione di G_1 che estende la data colorazione di x_1 e x_2 . Sia poi G_2 il sottografo indotto dai vertici dell'altra porzione; anche G_2 è triangolato e x_t ed x_i sono vertici consecutivi nel suo ciclo esterno; per ipotesi induttiva, possiamo estendere la colorazione di x_t e quella di x_i ricavate dalla L -colorazione di G_1 ad una L -colorazione di G_2 . È chiaro che le L -colorazioni delle due porzioni separate da e sono compatibili e forniscono una L -colorazione di G con la proprietà richiesta.

Siano $x_{t-1}, y_1, \dots, y_m, x_1$ i vertici adiacenti ad x_t , ordinati in modo che siano vertici consecutivi di un ciclo $U : x_1 x_2 \dots x_{t-1} y_1 \dots y_m x_1$ (ciò è possibile perché G è triangolato: vedi

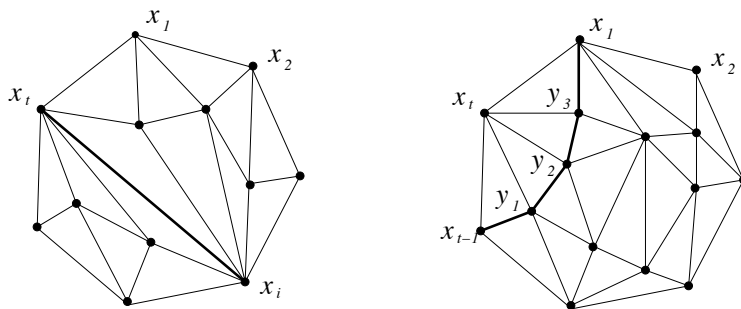


Figura 4.4: I due casi della dimostrazione del Lemma 4.7

Figura 4.4). Siano 1 il colore inizialmente assegnato a x_1 , e siano c, s colori distinti in $L(x_{t-1})$ e diversi da 1. Sia $G' = G - x_{t-1}$, allora il ciclo U è il bordo esterno di G' . Sui vertici di G' consideriamo le liste di colori L' , dove $L'(y) = L(y)$ se $y \notin \{y_1, \dots, y_m\}$, e $L'(y_j) = L(y_j) \setminus \{r, s\}$, per $j = 1, \dots, m$. Per la condizione (2), tutti i vertici y_1, \dots, y_m sono vertici interni del grafo di partenza G , e dunque $|L'(y_i)| \geq 3$ per ogni $i = 1, \dots, m$. Possiamo pertanto applicare l'ipotesi induttiva: esiste una L' -colorazione di G' (che è quindi anche una L -colorazione) che estende la data colorazione di x_1 e x_2 . In questa colorazione uno dei due colori c, s non compare tra i vertici adiacenti a x_{t-1} ; possiamo quindi estendere la colorazione di G' ad una L -colorazione di G assegnando a x_{t-1} tale colore. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.6. Si prova facilmente che ogni grafo piano G si può estendere, mediante l'aggiunzione, se necessario, di nuovi archi, ad un grafo piano triangolato G' (ad esempio, ogni grafo piano massimale è triangolato - vedi esercizio 2.61). A questo punto, poiché un grafo planare è isomorfo ad un grafo piano, l'affermazione dell'enunciato segue immediatamente dal Lemma 4.7. ■

Dal Teorema di Thomassen discende immediatamente che il numero cromatico di un grafo planare è al più 5. La dimostrazione diretta di questo risultato, trovata da Heawood nel 1890, è considerevolmente più intricata: il che illustra il fatto, non infrequente in matematica - in particolare quando si applichino argomenti induttivi - che, invece di ciò che risulta più naturale, può essere più agevole dimostrarne un'opportuna generalizzazione. Come abbiamo già detto nella sezione 2.2, la congettura che il numero cromatico di un grafo planare è al più 4 è stata provata da Appel e Haken nel 1976 mediante un considerevole (e a tutt'oggi ancora necessario) utilizzo del computer. Per quanto riguarda invece il numero ℓ -cromatico, è stato provato (Voigt) che esistono grafi planari per i quali tale numero è 5, e quindi che il Teorema 4.6 è migliore possibile.

La definizione di L -colorazione degli archi di un grafo $G = (V, E)$ è analoga: data una assegnazione di liste di colori L che ad ogni $e \in E$ associa l'insieme $L(e)$; una L -colorazione degli archi di G è una scelta $c' : E \rightarrow \bigcup_{e \in E} L(e)$, tale che $c'(e) \in L(e)$ per ogni $e \in E$, e $c'(e) \neq c'(e_1)$ per ogni coppia e ed e_1 di archi con un vertice in comune.

L'indice ℓ -cromatico del grafo $G = (V, E)$, che si denota con $ch'(G)$, è dunque il minimo k tale che per ogni k -lista L su E esiste una L -colorazione degli archi di G .

È chiaro che $ch'(G)$ non può essere minore dell'indice cromatico $\chi'(G)$, e non è difficile provare (usando il teorema di Brooks per L -colorazioni sul line graph) che $ch'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$, per ogni grafo G . Tuttavia, in questo caso, è stata formulata la seguente

Congettura. $ch'(G) = \chi'(G)$ per ogni grafo G .

Il risultato più significativo in direzione della dimostrazione di tale congettura è il seguente Teorema di Galvin (che non dimostriamo).

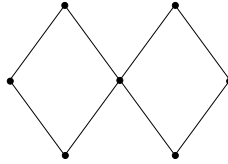
Teorema 4.8. (Galvin 1995) *Sia G un grafo bipartito; allora $ch'(G) = \chi'(G)$.*

Quindi, tenendo conto della proposizione 4.2, se G è un grafo bipartito, $ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$.

Esercizio 4.8. Si provi che il numero ℓ -cromatico di una foresta è 2.

Esercizio 4.9. Sia $n \geq 3$, e sia L una 2-lista sui vertici del ciclo C_n . Si dimostri che se $|\bigcup_{v \in V} L(v)| \geq 3$, allora C_n è L -colorabile. Si deduca che il numero ℓ -cromatico di C_n è 2 se n è pari e 3 se n è dispari.

Esercizio 4.10. Si determini il numero ℓ -cromatico del seguente grafo



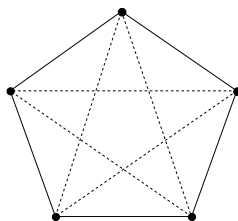
Esercizio 4.11. Sia $n \geq 2$, $I = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$, e $V = I^{[n]}$. Sia G il grafo bipartito completo sui vertici $V_1 \cup V_2$, con $V_1 = V = V_2$. Si provi che $ch(G) > n$. [sugg.: si consideri la n -lista su $V_1 \cup V_2$ che ad ogni vertice associa se stesso (come sottoinsieme di I)]

4.4 Teoria di Ramsey.

In questa (e solo in questa) sezione, per comodità e, per così dire, per necessità espressive, useremo il termine "colorazione" di un grafo con un significato diverso da quello attribuitogli nelle sezioni precedenti. Con colorazione dei lati di un grafo $G = (V, E)$ intenderemo una *qualsiasi* assegnazione di colori, presi da un certo insieme, ai lati di G , senza alcuna condizione sui colori dei lati contigui o altro; dunque una qualsiasi applicazione $E \rightarrow S$, dove S è l'insieme dei colori.

Dato un grafo G a cui sia stata assegnata una tale colorazione, diremo che un sottografo di G è *monocromatico* se, nella colorazione data, i suoi lati hanno tutti lo stesso colore.

La figura di sotto mostra una colorazione di K_5 mediante due colori, escogitata in modo che non vi sia alcun triangolo monocromatico. È possibile fare lo stesso in K_6 ? La risposta è no. Infatti, supponiamo di aver colorato con due colori b e c il lati di K_6 , e sia v_0 un vertice fissato; poiché v_0 ha grado 5, almeno tre lati incidenti ad esso hanno lo stesso colore; siano $\{v_0, v_1\}$, $\{v_0, v_2\}$ e $\{v_0, v_3\}$ tali lati, e sia b il



loro colore. Se uno tra i lati $\{v_i, v_j\}$, $1 \leq i < j \leq 3$, ha colore b allora il triangolo indotto da $\{v_0, v_i, v_j\}$ è monocromatico; se invece tali lati hanno tutti colore c allora è il triangolo indotto da $\{v_1, v_2, v_3\}$ ad essere monocromatico.

Dunque, ogni colorazione con due colori di un grafo completo con almeno sei vertici contiene un triangolo monocromatico.

Il triangolo non è che il primo caso interessante di grafo completo; con un po' più di lavoro si riesce a provare che ogni colorazione con due colori di K_{18} contiene un sottografo monocromatico di tipo K_4 . La lettrice che, a questo punto, abbia sentito l'impulso irrefrenabile di provare a dimostrare quest'ultima affermazione, ci sarà riuscita senz'altro, ma si sarà resa conto che definire come "poco" il lavoro in più richiesto rispetto al caso del triangolo sia piuttosto eufemistico (ma è quel tipo di eufemismo che ci si aspetta da un "professionista"⁴). Nella sua forma più semplice, il Teorema di Ramsey è la generalizzazione all'esistenza, in grafi completi con un numero sufficientemente grande di vertici, di un sottografo monocromo isomorfo a K_n .

Teorema 4.9. (Ramsey 1930) *Per ogni $n \geq 1$, esiste un intero $R(n)$ tale che, data una qualsiasi colorazione dei lati del grafo completo $K_{R(n)}$ mediante due colori, esiste un sottografo completo K_n monocromatico.*

Ricordando la definizione di *grafo complementare* \bar{G} di un grafo G (vedi esercizio 1.27: è il grafo i cui vertici sono gli stessi di G e, dati due vertici distinti u e v , $\{u, v\}$ è un lato di \bar{G} se e soltanto se non è un lato di G), il Teorema di Ramsey si può riformulare nella maniera seguente:

Per ogni $n \geq 1$, esiste un intero $R(n)$ tale che se G è un grafo con almeno $R(n)$ vertici allora G o il suo complementare \bar{G} contengono un sottografo isomorfo al grafo completo K_n .

Risulta più agevole dimostrare il teorema di Ramsey in una forma leggermente (e, in un certo senso, apparentemente) più generale. Dati $n, m \geq 2$, denotiamo con $R(n, m)$ il più piccolo intero (se esiste) tale che data una qualsiasi colorazione dei lati del grafo completo $K_{R(n, m)}$ mediante due colori b e c , esiste un sottografo b -monocromatico isomorfo a K_n oppure un sottografo c -monocromatico isomorfo a K_m . Il numero $R(n)$ del teorema 4.9 coincide quindi con $R(n, n)$; inoltre, chiaramente, $R(n, m) = R(m, n)$. Proveremo il seguente risultato

Teorema 4.10. *Per ogni $n, m \geq 2$, $R(n, m)$ esiste e valgono le seguenti relazioni:*

$$1) R(n, 2) = n \text{ per ogni } n \geq 2.$$

⁴O forse è il tipo di eufemismo che un professionista si aspetta che ci si aspetti da lui, o da lei.

2) Per ogni $n, m \geq 3$: $R(n, m) \leq R(n-1, m) + R(n, m-1)$.

3) Per ogni $n, m \geq 2$: $R(n, m) \leq \binom{n+m-2}{m-1} \leq 2^{n+m-3}$.

DIMOSTRAZIONE. Per comodità chiameremo *blu* il colore b e *rosso* il colore c (*carminio* ci pareva un po' altezzoso), e con "colorazione" di un certo grafo intenderemo una colorazione dei suoi lati in blu e rosso. L'esistenza di $R(n, m)$, per ogni $n, m \geq 2$, discende chiaramente per induzione, una volta dimostrati i punti 1) e 2).

1) Una colorazione di K_n che non sia interamente blu include almeno un lato rosso (cioè un K_2 rosso). Dunque $R(n, 2) = n = R(2, m)$.

2) Siano $n, m \geq 3$. Sia $r = R(n-1, m) + R(n, m-1)$, e sia data una colorazione del grafo K_r . Mostriamo che K_r contiene come sottografo o un K_n blu oppure un K_m rosso. Fissiamo un vertice v ; i lati incidenti a v sono $r-1$, alcuni blu e gli altri rossi.

Supponiamo che i lati blu adiacenti a v siano in numero maggiore o uguale a $R(n-1, m)$; allora il grafo K' indotto dagli altri estremi ($\neq v$) di essi è un grafo completo che contiene o un K_{n-1} blu oppure un K_m rosso. Nel secondo caso siamo a posto, altrimenti, aggiungendo al sottografo blu K_{n-1} il vertice v si ottiene un sottografo K_n blu.

Dunque, possiamo assumere che in v siano incidenti meno di $R(n-1, m)$ lati blu. Ne segue che a v sono incidenti almeno $R(n, m-1)$ lati rossi. Il sottografo indotto dagli estremi diversi da v di tali lati rossi, avendo almeno $R(n, m-1)$ vertici, contiene o un K_n blu oppure un K_{m-1} , e ragionando come sopra, in K_r si trova o un sottografo K_n blu o un K_m rosso. Dunque $R(n, m) \leq r$, e il punto 2) è provato⁵.

3) La prima diseuguaglianza discende, per induzione da 1), da 2) e dalla regola di Pascal. Infatti, per ogni $n, m \geq 2$:

$$\binom{(n-1) + m - 2}{m-1} + \binom{n + (m-1) - 2}{m-2} = \binom{n + m - 2}{m-1}.$$

La seconda diseuguaglianza si deduce dal fatto che il coefficiente binomiale $\binom{n+m-2}{m-1}$ compare come addendo nello sviluppo alla Newton di $(1+1)^{n+m-2} = 2^{n+m-2}$. ■

I numeri $R(n, m)$ sono detti *numeri di Ramsey* e sono noti solo in pochi casi: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$, $R(3, 7) = 23$, $R(3, 8) = 28$, $R(3, 9) = 36$, $R(4, 4) = 18$ e $R(4, 5) = 25$.

Il Teorema di Ramsey può essere generalizzato in varie direzioni. La prima consiste nel consentire un numero maggiore (ma sempre finito) di colori: per ogni $r \geq 2$ ed ogni $n_1, n_2, \dots, n_r \geq 1$, esiste un intero $R = R(n_1, n_2, \dots, n_r)$ tale che per ogni colorazione di K_R mediante r colori c_1, c_2, \dots, c_r , esiste un sottografo c_i -monocromatico isomorfo a K_{n_i} per almeno un $1 \leq i \leq r$.

In un'altra direzione si richiede la presenza, come sottografi monocromatici, di grafi diversi dai grafi completi. Poiché ogni grafo con n vertici è un sottografo di K_n , è chiaro che per ogni coppia di grafi H, U esiste un minimo intero $R(H, U)$ tale che per ogni colorazione del grafo completo $K_{R(H,U)}$ mediante i due colori b e c esiste un sottografo b -monocromatico isomorfo a H oppure un sottografo c -monocromatico isomorfo a U . Il problema riguarda trovare, per

⁵Si osservi come l'idea di questa dimostrazione sia sostanzialmente la stessa che abbiamo usato per discutere il caso dei triangoli.

H e U appartenenti ad opportune classi di grafi, il valore esatto (o perlomeno delle stime significative) di $K_{R(H,U)}$. Il seguente risultato è uno dei pochi in cui si riesce a trovare i valori esatti per infinite coppie di grafi.

Proposizione 4.11. *Siano $n, t \geq 2$, e sia A_t un albero con t vertici. Allora*

$$R(K_n, A_t) = (n-1)(t-1) + 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $t = 2$, allora $A_2 = K_2$ è composto da un unico lato, e $R(K_n, A_2) = R(n, 2) = n = (n-1)(2-1) + 1$, per il punto 1) del Teorema 4.10. Similmente, si prova che $R(K_2, A_t) = t$.

Ora, proviamo che $R(K_n, A_t) \leq (n-1)(t-1) + 1$ procedendo per induzione su $n+k$. Per quanto visto sopra, possiamo assumere $n, t \geq 3$. Sia $s = (n-1)(t-1) + 1$, e G il grafo completo K_s i cui lati sono colorati in blu e rosso. Sia A_{t-1} ottenuto da A_t rimuovendo un vertice di grado 1 ed il lato ad esso incidente. Osserviamo che A_{t-1} è ancora un albero, e denotiamo con v l'unico vertice di A_{t-1} che, in A_t , era adiacente al vertice che è stato rimosso. Sia G_0 il sottografo indotto in G da $s - (n-1) = (n-1)(t-2) + 1$ vertici fissati. Per ipotesi induttiva, G_0 contiene un sottografo blu di tipo K_n , oppure un sottografo rosso B isomorfo ad A_{t-1} . Nel primo caso siamo a posto. Nel secondo caso sia v' il vertice di B che, nell'isomorfismo, corrisponde al vertice v di A_{t-1} . Se esiste un lato rosso incidente a v' il cui secondo estremo non è uno dei vertici di B , allora il sottografo ottenuto aggiungendo a B tale lato è rosso ed è chiaramente isomorfo ad A_t . Possiamo quindi supporre che tutti i lati che congiungono v' ai vertici di G che non stanno in B sono blu. Il numero di tali lati è $s - (t-1) = (n-2)(t-1) + 1$, e quindi, per ipotesi induttiva, il sottografo indotto dagli estremi diversi da v' contiene un K_{n-1} blu o un A_t rosso. Nel secondo caso siamo a posto; nel primo caso congiungendo i vertici di C a v' si ottiene un sottografo blu isomorfo a K_n . Dunque $R(K_n, A_t) \leq s$.

Proviamo ora la disuguaglianza opposta. Dati $n, t \geq 2$, sia G l'unione disgiunta di $t-1$ grafi completi K_{n-1} . Allora G ha $r = (n-1)(t-1)$ vertici. Completiamo G ad un grafo completo K_r , in cui coloriamo di blu i lati appartenenti a G ed in rosso quelli del suo complementare, che non è altro che il grafo completo $(t-1)$ -partito $K_{n-1, n-1, \dots, n-1}$. Si vede subito che, rispetto a tale colorazione, K_r non contiene alcun sottografo blu isomorfo a K_n , né alcun albero rosso con t vertici. Dunque $(n-1)(t-1) < R(K_n, A_t)$, e questo completa la dimostrazione. ■

Il teorema, o i teoremi, di Ramsey assumono un aspetto particolarmente suggestivo quando sono espressi con il linguaggio dei grafi; tuttavia la teoria di Ramsey non è una teoria idiomatologica di tale linguaggio, ed ha numerose interpretazioni e importanti applicazioni in diversi ambiti della matematica: dalla logica, alla teoria degli insiemi, alla probabilità, etc.

Vediamone una formulazione più vicina a quella originaria, e più generale. Cominciamo con l'osservare che assegnare una colorazione (così come intesa in questo capitolo) ai lati di un grafo completo mediante un numero finito r di colori, significa considerare una partizione in r classi dell'insieme dei sottoinsiemi di ordine 2 (i lati) di un insieme V (l'insieme dei vertici). Il teorema di Ramsey afferma che, per ogni $n, r \geq 2$, se $|V|$ è sufficientemente grande esiste un suo sottoinsieme X di ordine n tale che tutti i sottoinsiemi di ordine 2 di X appartengono alla stessa classe della partizione.

È possibile estendere questo nel modo seguente. Se V è un insieme (non necessariamente finito) e $k \geq 1$, denotiamo con $V^{[k]}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di ordine k di V . Se $c \geq 1$

è un intero, chiamiamo c -colorazione di $V^{[k]}$ una partizione di $V^{[k]}$ in c classi di equivalenza, e diciamo che un sottoinsieme X di V è monocromatico se $X^{[k]}$ è contenuto in una sola classe di equivalenza.

Teorema 4.12. *Siano $k, c, n \geq 1$ interi. Allora esiste un intero $r = r^k(c, n)$ tale che per ogni insieme V con $|V| \geq r$, ed ogni c -colorazione di $V^{[k]}$, esiste un sottoinsieme monocromatico di ordine n .*

Omettiamo la dimostrazione; proviamo invece una versione infinita, che ha molte interessanti applicazioni.

Teorema 4.13. *Siano $k, c \geq 1$ interi, e V un insieme infinito. Data una qualsiasi c -colorazione di $V^{[k]}$ esiste un sottoinsieme infinito monocromatico di V .*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione su k , tenendo fissato c . Se $k = 1$ l'affermazione è ovvia.

Sia dunque $k \geq 2$, e sia $V^{[k]}$ colorato mediante c colori. Costruiamo induttivamente una sequenza infinita V_0, V_1, V_2, \dots di sottoinsiemi infiniti di V , ed una di elementi x_0, x_1, x_2, \dots tali che, per ogni i :

$$(1) \quad x_i \in V_i, \text{ e } V_{i+1} \subseteq V_i \setminus \{x_i\};$$

(2) i sottoinsiemi (con k elementi) $\{x_i\} \cup Y$, al variare di $Y \in V_{i+1}^{[k-1]}$, hanno tutti lo stesso colore $c(i)$.

Iniziamo col porre $V_0 = V$ e x_0 un qualsiasi elemento di V . Supponiamo di aver costruito V_0, V_1, \dots, V_i , e fissato x_0, x_1, \dots, x_i . Coloriamo ciascun $Y \in (V_i \setminus \{x_i\})^{[k-1]}$ assegnandogli il colore del k -insieme $\{x_i\} \cup Y$ nella colorazione data in partenza. In questo modo otteniamo una c -colorazione di $(V_i \setminus \{x_i\})^{[k-1]}$. Poiché $V_i \setminus \{x_i\}$ è infinito, l'ipotesi induttiva assicura che esiste un sottoinsieme monocromatico infinito V_{i+1} . Come x_{i+1} prendiamo un qualsiasi elemento di V_{i+1} . Le successioni costruite in questo modo soddisfano chiaramente (1) e (2). Ora, poiché c è finito, esiste un sottoinsieme infinito A di \mathbb{N} tale che il colore $c(i)$ è lo stesso per ogni $i \in A$. Ponendo $X = \{x_i \mid i \in A\}$ si ottiene un sottoinsieme infinito e monocromatico di V . ■

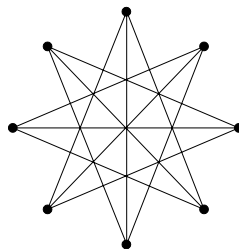
Ristretto al caso dei grafi (cioè $k = 2$), il Teorema 4.13 si può enunciare nel modo seguente. *Sia G un grafo su un insieme infinito di vertici V , e tale che per ogni sottoinsieme infinito X di V esiste almeno un lato di G i cui estremi appartengono a X ; allora G contiene un sottografo completo infinito.*

Esercizio 4.12. Si provi che se i lati di K_7 sono colorati mediante due colori allora esistono almeno quattro triangoli in K_7 i cui lati hanno tutti lo stesso colore.

Esercizio 4.13. Si provi che data una qualsiasi colorazione con due colori dei lati del grafo completo bipartito $K_{5,5}$ esiste un sottografo monocromatico isomorfo a $K_{3,3}$.

Esercizio 4.14. Sia C_4 il ciclo di lunghezza 4; si provi che $R(C_4, C_4) = 6$. Si provi quindi che $R(C_5, C_4) = 7$. Si provi che, se n è dispari, allora $R(C_n, C_n) > 2n - 2$.

Esercizio 4.15. Aiutandosi anche con il grafo in figura, si provi che $R(3, 4) = 9$.



Qualche applicazione. 1) Vediamone una quasi immediata. Sia V un insieme di punti sul piano, e data ogni terna di elementi di V , la coloriamo in rosso se è costituita da punti allineati, ed in blu altrimenti. Il teorema di Ramsey 4.12 ci dice che, fissati interi positivi n ed m , se il numero di punti di V è sufficientemente grande, allora in V esistono m punti a tre a tre non allineati, oppure n punti su una stessa retta (infatti si vede facilmente che se ogni terna di un insieme di punti è allineata, allora tutti i punti dell'insieme giacciono su di una stessa retta). La versione infinita (Teorema 4.13) assicura che, se V è infinito, allora esiste un sottoinsieme infinito X di V tale che X è contenuto in una retta oppure nessuna terna di elementi di X è costituita da elementi allineati.

2) Vediamo ora un'applicazione nello stesso ambito, ma meno banale. Ricordiamo che dato un insieme X di punti nel piano, l'*inviluppo convesso* di X è il minimo sottoinsieme convesso del piano che contiene X (che si prova esistere; ricordo anche che un sottoinsieme C del piano è convesso se per ogni coppia di punti di C il segmento che li congiunge è contenuto in C). Diciamo che un insieme finito X di punti del piano forma un *poligono convesso* se nessun punto di X appartiene all'inviluppo convesso degli altri. Si provino le seguenti facili affermazioni:

i) Dati cinque punti del piano, a tre a tre non allineati, ce ne sono quattro di essi che formano un poligono convesso;

ii) un insieme finito di punti nel piano forma un poligono convesso se e solo se ogni suo sottoinsieme di quattro punti forma un quadrilatero convesso.

Ora, dato un insieme finito X di punti del piano, consideriamo la seguente 2-colorazione delle quadruple di elementi di X : in rosso quelle che formano un quadrilatero convesso, in blu tutte le altre. Il punto i) dice che X non contiene sottoinsiemi blu-monocromatici con cinque elementi. Quindi il Teorema 4.12 assicura che, per ogni $n \geq 2$, se il numero di elementi di X supera un certo valore, allora X contiene un sottoinsieme monocromatico rosso di ordine n , ed il punto ii) consente di concludere che tale insieme forma un n -agone convesso. Abbiamo cioè provato il seguente risultato, dovuto a Erdős e Szekers.

Teorema 4.14. *Esiste una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tale che ogni insieme del piano costituito da $f(n)$ punti a tre a tre non allineati contiene un sottoinsieme di n punti che forma un poligono convesso.*

Osserviamo che, in congiunzione con l'osservazione 1) di sopra, possiamo concludere che esiste una funzione $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che ogni insieme del piano costituito da $g(n)$ punti contiene un

sottoinsieme di n punti che forma un poligono convesso, oppure un sottoinsieme di n punti che giacciono su una stessa retta.

3) L'ultimo esempio che diamo riguarda l'analisi reale, e si tratta di un risultato semplice e molto probabilmente già noto, la cui dimostrazione mediante il teorema di Ramsey è quasi immediata.

Teorema 4.15. *Ogni successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori reali ammette una sottosuccessione costante o strettamente monotona (crescente o decrescente).*

Per provarlo, basta assegnare ad ogni coppia di numeri naturali i e j , con $i < j$, un diverso colore a seconda che $a_j - a_i$ sia strettamente positivo, zero, o strettamente negativo. Il Teorema 4.13 assicura che esiste un sottoinsieme infinito X di \mathbb{N} tale che ogni coppia di elementi di X ha lo stesso colore. I termini della successione corrispondenti agli elementi di X formano una sottosuccessione che (a seconda del colore) è strettamente crescente, costante, o strettamente decrescente.

Grafi privi di triangoli. Concludiamo con una applicazione alla teoria dei grafi. Abbiamo già osservato che il numero cromatico di un grafo G non può essere inferiore alla cardinalità di un sottografo completo di G . Per formalizzare questo fatto, chiamiamo *numero di clique* di un grafo (finito) G il massimo n tale che G contiene un sottografo isomorfo a K_n , e lo denotiamo con $\omega(G)$ (naturalmente, il concetto ha senso anche per grafi infiniti - che possono avere numero di clique infinito - ma questo al momento non ci serve). Quindi

$$\omega(G) \leq \chi(G) \quad (4.2)$$

per ogni grafo G . Osserviamo anche che il numero di clique di G non è altro che l'indice di stabilità del grafo complementare \overline{G} (vedi sezione 1.4). L'esempio mostrerà che la disuguaglianza in (4.2) è in generale propria; anzi, che il numero cromatico non può essere in alcun modo limitato in funzione del numero di clique. Infatti:

Esempio: *Esistono grafi G privi di triangoli, dunque tali che $\omega(G) = 2$, e numero cromatico arbitrario.*

Fissato un intero $n \geq 3$, sia $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Definiamo il grafo G_n nel modo seguente: l'insieme dei vertici di G_n è l'insieme $I_n^{[2]}$ di tutti i sottoinsiemi di ordine 2 di I_n , e una coppia $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ di essi è un arco di G_n se e solo se $a < b = c < d$.

Siano $v_1 = \{a_1, b_1\}, v_2 = \{a_2, b_2\}, v_3 = \{a_3, b_3\}$ vertici di G_n (in cui abbiamo fissato la notazione in modo che $a_i < b_i$, per $i = 1, 2, 3$), che assumiamo consecutivi. Quindi, per come sono definiti gli archi, $b_1 = a_2 < b_2 = a_3$, e da ciò segue che v_1, v_3 non sono estremi di un arco di G_n (perché in tal caso dovrebbe essere $b_1 = a_3$). Pertanto v_1, v_2, v_3 non sono i vertici di un triangolo in G_n . Dunque G_n non ha triangoli e quindi, per definizione, $\omega(G_n) = 2$.

Applichiamo ora il Teorema 4.12, per provare che, al crescere di n , il numero cromatico $\chi(G_n)$ tende a ∞ . Sia quindi $c \geq 2$, e sia $n \geq r^2(c, 3)$. Allora, per ogni colorazione di $I_n^{[2]}$ in c colori esiste un sottoinsieme di 3 elementi $X = \{a, b, c\}$ di I_n tale che $X^{[2]}$ è contenuto in una stessa classe di colore. Ma, se $a < b < c$, i vertici di G_n $\{a, b\}$ e $\{b, c\}$ sono adiacenti. Quindi non esistono c -colorazioni di G_n ; ovvero, $\chi(G_n) > c$.

Osserviamo che, per ogni $n \geq 5$, $g(G_n) = 5$. Quindi il calibro dei grafi G_n è comunque limitato. Ma abbiamo già accennato al fatto che Erdős e Lovász hanno provato l'esistenza, per ogni $g, k \geq 4$, di grafi con calibro g e numero cromatico k .

4.5 Grafi perfetti

Abbiamo già osservato che il numero cromatico di un grafo G non può essere inferiore alla cardinalità di un sottografo completo di G . Per formalizzare questo fatto, chiamiamo *numero di clique* di un grafo (finito) G il massimo n tale che G contiene un sottografo isomorfo a K_n , e lo denotiamo con $\omega(G)$ (naturalmente, il concetto ha senso anche per grafi infiniti - che possono avere numero di clique infinito - ma questo al momento non ci serve). Quindi

$$\omega(G) \leq \chi(G) \quad (4.3)$$

per ogni grafo G . Osserviamo anche che il numero di clique di G non è altro che l'indice di stabilità $\alpha(\overline{G})$ del grafo complementare \overline{G} (vedi sezione 1.4).

L'esempio che segue mostra che la disuguaglianza in (4.3) è in generale propria; anzi che, in generale, il numero cromatico non può essere in alcun modo limitato in funzione del numero di clique. Come applicazione dei teoremi di Ramsey, mostriamo infatti che esistono grafi G privi di triangoli (dunque tali che $\omega(G) = 2$) che hanno numero cromatico arbitrariamente alto.

Esempio: *esistono grafi privi di triangoli e numero cromatico arbitrario.*

Fissato un intero $n \geq 3$, sia $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Definiamo il grafo G_n nel modo seguente: l'insieme dei vertici di G_n è l'insieme $I_n^{[2]}$ di tutti i sottoinsiemi di ordine 2 di I_n , e una coppia $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ di essi è un arco di G_n se e solo se $a < b = c < d$.

Siano $v_1 = \{a_1, b_1\}, v_2 = \{a_2, b_2\}, v_3 = \{a_3, b_3\}$ vertici di G_n (in cui abbiamo fissato la notazione in modo che $a_i < b_i$, per $i = 1, 2, 3$), che assumiamo consecutivi. Quindi, per come sono definiti gli archi, $b_1 = a_2 < b_2 = a_3$, e da ciò segue che v_1, v_3 non sono estremi di un arco di G_n (perché in tal caso dovrebbe essere $b_1 = a_3$). Pertanto v_1, v_2, v_3 non sono i vertici di un triangolo in G_n . Dunque G_n non ha triangoli e quindi, per definizione, $\omega(G_n) = 2$.

Applichiamo ora il Teorema 4.12, per provare che, al crescere di n , il numero cromatico $\chi(G_n)$ tende a ∞ . Sia quindi $c \geq 2$, e sia $n \geq r^2(c, 3)$. Allora, per ogni colorazione di $I_n^{[2]}$ in c colori esiste un sottoinsieme di 3 elementi $X = \{a, b, c\}$ di I_n tale che $X^{[2]}$ è contenuto in una stessa classe di colore. Ma, se $a < b < c$, i vertici di G_n $\{a, b\}$ e $\{b, c\}$ sono adiacenti. Quindi non esistono c -colorazioni di G_n ; ovvero, $\chi(G_n) > c$.

Osserviamo che, per ogni $n \geq 5$, $g(G_n) = 5$. Quindi il calibro dei grafi G_n è comunque limitato. Ma abbiamo già accennato al fatto che Erdős e Lovász hanno provato l'esistenza, per ogni $g, k \geq 4$, di grafi con calibro g e numero cromatico k .

Detto in modo non formalizzato, questo esempio, ed il citato risultato di Erdős e Lovász, mostrano che il numero cromatico $\chi(G)$ ha un significato che riguarda "globalmente", e non "localmente", il grafo G : infatti, grafi con calibro molto grande, possono essere pensati come "localmente privi di circuiti" (e quindi localmente 2-colorabil), ma possono tuttavia avere numero cromatico grande. Diventa quindi interessante considerare grafi in cui il numero

cromatico è determinato "localmente", e la formalizzazione migliore di questa idea ancor vaga è quella che porta alla definizione di grafo perfetto.

Un grafo G si dice **perfetto** se $\chi(H) = \omega(H)$ per ogni sottografo indotto H di G .

Ogni grafo completo è perfetto (infatti, i sottografi indotti di un grafo completo sono completi). Se un grafo, con almeno un arco, non ha triangoli (ovvero sottografi indotti isomorfi a K_3), allora $\omega(G) = 2$, e dunque se G non è bipartito non è perfetto. Viceversa, ogni grafo bipartito è perfetto: infatti se H è un sottografo indotto di un grafo bipartito, allora H è bipartito, quindi non contiene triangoli e dunque (a meno che H sia privo di archi, nel qual caso $\chi(H) = \omega(H) = 1$) si ha $\chi(H) = 2 = \omega(H)$.

Sia \bar{G} il grafo complementare di un grafo bipartito G ; a partire da un accoppiamento massimale $\{e_1, \dots, e_{\tau(G)}\}$ di G possiamo dare una colorazione a \bar{G} assegnando colore i agli estremi dell'arco e_i , ed un diverso colore ad ogni altro vertice che non compaia tra gli estremi degli archi $e_1, \dots, e_{\tau(G)}$; quindi $\chi(\bar{G}) \leq n - \tau(G)$. D'altra parte, dal Corollario 2.16 segue $\chi(\bar{G}) \geq \omega(\bar{G}) = \alpha(G) = n - \tau(G)$; quindi $\chi(\bar{G}) = n - \tau(G) = \omega(\bar{G})$. Poiché (come si vede facilmente) ogni sottografo indotto di \bar{G} è a sua volta il grafo complementare di un sottografo indotto di G , si conclude che il complementare di un grafo bipartito è perfetto.

Sia ora $L(G)$ il line-graph di un grafo bipartito G . Allora, come si vede facilmente, si ha $\omega(L(G)) = \Delta(G)$; tenendo conto che inoltre (come osservato nella sezione 4.2) $\chi(L(G)) = \chi'(G)$, dal Teorema di König 4.2 segue $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$. Osservando poi che ogni sottografo indotto di $L(G)$ è il line-graph di un opportuno grafo bipartito, si conclude che $L(G)$ è un grafo perfetto. A questo punto si verifica (vedi teorema 4.17 oppure l'esercizio 4.38) che anche il complementare di $L(G)$ è perfetto.

Abbiamo dunque il seguente risultato.

Proposizione 4.16. *I grafi bipartiti, i grafi complementari dei grafi bipartiti, i line-graph dei grafi bipartiti e i loro complementari sono perfetti.*

I grafi perfetti sono stati introdotti da Berge agli inizi degli anni '60. Berge stesso formulò alcune congetture, una prima delle quali fu provata da Lovász nel 1972: essa è il contenuto del seguente Teorema.

Teorema 4.17. (Lovász) *Il grafo complementare di un grafo perfetto è perfetto.*

Questo risultato discende immediatamente da un altro Teorema di Lovász (ricordiamo che con $|H|$ indichiamo la cardinalità dell'insieme dei vertici di un grafo H):

Teorema 4.18. *Un grafo G è perfetto se e soltanto se*

$$\alpha(H)\omega(H) \geq |H| \tag{4.4}$$

per ogni sottografo indotto H di G .

DIMOSTRAZIONE. (Gasparyan) Supponiamo che G sia un grafo perfetto e sia H un sottografo indotto di G . Dunque H è $\omega(H)$ -colorabile e l'insieme dei vertici di H può essere ripartito in $\omega(H)$ sottoinsiemi (gli insiemi dei vertici di uno stesso colore), ognuno contenente al più $\alpha(H)$ vertici. Segue quindi $|H| \leq \alpha(H)\omega(H)$.

Per provare l'implicazione inversa, procediamo per assurdo e supponiamo che G sia un grafo non perfetto con insieme dei vertici di cardinalità minima tale che valga $|H| \leq \alpha(H)\omega(H)$

per ogni sottografo indotto H di G . Per la minimalità di $|G|$, ogni sottografo indotto proprio di G è quindi un grafo perfetto.

Sia S un sottoinsieme stabile di G . Osserviamo che

$$\omega(G - S) = \omega(G)$$

Infatti $\omega(G) \leq \chi(G) - 1$ perché G non è perfetto e $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - S)$ dato che da ogni colorazione di $G - S$ si ottiene una colorazione di G semplicemente aggiungendo un nuovo colore per i vertici in S . Segue, $\omega(G) \leq \omega(G - S)$ ricordando che, se $S \neq \emptyset$, $G - S$ è perfetto. Viceversa, chiaramente $\omega(G - S) \leq \omega(G)$.

Scriviamo $\alpha = \alpha(G)$, $\omega = \omega(G)$ e denotiamo con V l'insieme dei vertici di G . Proviamo che in G esistono $\alpha\omega + 1$ sottoinsiemi stabili

$$S_1, S_2, \dots, S_{\alpha\omega+1}$$

e $\alpha\omega + 1$ sottografi completi su ω vertici

$$T_1, T_2, \dots, T_{\alpha\omega+1}$$

tali che

- (a) ogni vertice in V appartiene ad esattamente α sottoinsiemi S_i , $1 \leq i \leq \alpha\omega + 1$;
- (b) $S_i \cap T_i = \emptyset$ per $1 \leq i \leq \alpha\omega + 1$;
- (c) $|S_i \cap T_j| = 1$ per $1 \leq i < j \leq \alpha\omega + 1$;

(dove le intersezioni denotano le intersezioni tra gli insiemi dei vertici).

Iniziamo scegliendo un sottoinsieme stabile S_1 di G con $|S_1| = \alpha$. Sia $v \in S_1$. Il grafo $G - v$ è perfetto e quindi $\chi(G - v) = \omega(G - v) \leq \omega$. Dunque, per ogni $v \in S_1$, l'insieme $V - v$ ammette una partizione \mathcal{S}_v in ω sottoinsiemi stabili di G (gli insiemi di vertici dello stesso colore in una ω -colorazione di $V - v$). Sia $\{S_2, \dots, S_{\alpha\omega+1}\}$ l'unione delle famiglie \mathcal{S}_v al variare di $v \in S_1$. Dunque $S_1, S_2, \dots, S_{\alpha\omega}$ sono sottoinsiemi stabili di G che soddisfano la condizione (a). (Infatti se $w \in S_1$, allora w sta in $\alpha - 1$ dei sottoinsiemi S_i , per $2 \leq i \leq \alpha\omega + 1$, mentre se $w \in V \setminus S_1$, allora w appartiene ad esattamente un $S_i \in \mathcal{S}_v$ per ogni $v \in S_1$).

Per ogni $1 \leq i \leq \alpha\omega + 1$, $\omega(G - S_i) = \omega$ e pertanto esiste un sottografo completo T_i di $G - S_i$ tale che $|T_i| = \omega$. La condizione (b) è quindi immediata, mentre la (c) segue osservando che $|S_i \cap T_j| \leq 1$ (dato che gli S_i sono stabili) e che quindi, per (a) e (b),

$$\alpha\omega = \alpha|T_j| = \sum_{1 \leq i \leq \alpha\omega+1, i \neq j} |S_i \cap T_j| \leq \alpha\omega.$$

Siano ora \mathbf{S} e \mathbf{T} le matrici di incidenza delle famiglie $\{S_1, S_2, \dots, S_{\alpha\omega+1}\}$ e $\{T_1, T_2, \dots, T_{\alpha\omega+1}\}$, rispetto ad un opportuna numerazione $V = \{v_i \mid i = 1, \dots, n\}$ dei vertici di G . $\mathbf{S} = (s_{i,j})$ e $\mathbf{T} = (t_{i,j})$ sono matrici $n \times (\alpha\omega + 1)$, tali che $s_{i,j} = 1$ se $v_i \in S_j$ e $s_{i,j} = 0$ se $v_i \notin S_j$, mentre $t_{i,j} = 1$ se $v_i \in T_j$ e $t_{i,j} = 0$ altrimenti. Per (b) e (c),

$$\mathbf{S}^t \mathbf{T} = \mathbf{Z}$$

dove $\mathbf{Z} = (z_{i,j})$ è la matrice $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ con $z_{i,j} = 1$ se $i \neq j$ e $z_{i,j} = 0$ se $i = j$. La matrice \mathbf{Z} è invertibile: l'inversa è $\frac{1}{\alpha\omega} \mathbf{Z}$, come si vede osservando che $\mathbf{Z} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$ è la differenza della matrice \mathbf{J} con tutte le entrate 1 e della matrice identità \mathbf{I} . Segue quindi che il rango di \mathbf{S} (e di \mathbf{T}) è almeno $\alpha\omega + 1$ e pertanto che $n = |V| \geq \alpha\omega + 1$, contro l'ipotesi. ■

Il teorema 4.17 segue immediatamente, dato che, per ogni grafo G , $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

La congettura più importante di Berge (che prese il nome di “Strong Perfect Graph Conjecture” e che implica il teorema di Lovász), proponeva un'elegante caratterizzazione dei grafi perfetti. Per descriverla, è opportuno osservare come alcuni semplici grafi non siano perfetti. Si tratta dei cicli di ordine dispari maggiore o uguale a 5. Infatti, se $n \geq 2$, per il ciclo C_{2n+1} si ha $\omega(C_{2n+1}) = 2$ e $\chi(C_{2n+1}) = 3$. D'altra parte, un tale ciclo è un grafo non-perfetto *minimale*, nel senso che ogni suo sottografo indotto proprio (il cui insieme di vertici è cioè un sottoinsieme proprio dell'insieme dei vertici di C_{2n+1}) è perfetto (essendo costituito da componenti connesse che sono cammini semplici). Anche il grafo complementare di un ciclo dispari di lunghezza almeno 5 non è perfetto (questo segue dal teorema di Lovász, ma può essere agevolmente dimostrato in modo diretto) ed ha la proprietà che tutti i suoi sottografi indotti propri sono perfetti. Quindi i cicli C_{2n+1} , con $n \geq 2$, ed i loro grafi complementari sono grafi non-perfetti minimali. La congettura di Berge affermava che questi sono i soli grafi non-perfetti minimali.

La verifica di tale congettura è stata portata a compimento nel 2002 da Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas, basandosi sul lavoro di diversi altri studiosi. Una dimostrazione completa occupa così diverse centinaia di pagine.

Teorema 4.19. (Strong Perfect Graph Theorem) *Sia G un grafo minimale non-perfetto. Allora G è un ciclo dispari di lunghezza ≥ 5 oppure il complementare di un ciclo dispari di lunghezza ≥ 5 .*

Corollario 4.20. *Un grafo è perfetto se e soltanto se non contiene sottografi indotti isomorfi ad un ciclo di ordine dispari, di lunghezza ≥ 5 , o al complementare di un tale ciclo.*

4.6 Esercizi e complementi.

Esercizio 4.16. Si assegni un ordine ai vertici del grafo del cubo in modo che l'applicazione dell'algoritmo di tipo greedy descritto nella sezione 4.1, a partire da tale ordinamento, termini con il richiedere 4 colori (mentre, essendo il grafo del cubo bipartito, ne sono sufficienti due).

Esercizio 4.17. Si provi che un grafo con dieci vertici e numero cromatico 4 contiene almeno un triangolo.

Esercizio 4.18. Fissato $n \geq 2$, qual è il massimo numero di lati di un grafo con n vertici e numero cromatico 4?

Esercizio 4.19. Un grafo G si dice *critico* se per ogni suo sottografo proprio H (cioè H è sottografo di G e $H \neq G$) si ha $\chi(H) < \chi(G)$.

- i) Si provi che il grafo W_5 della Figura 4.2 è critico.
- ii) Si provi che se G è un grafo critico, allora per ogni suo vertice v si ha $d_G(v) \geq \chi(G) - 1$.

Esercizio 4.20. Sia G un grafo tale che $\chi(G - v_1 - v_2) = \chi(G) - 2$, per ogni coppia di vertici distinti v_1 e v_2 di G . Si provi che G è un grafo completo.

Esercizio 4.21. Dato un grafo G , definiamo con $\chi_2(G)$ il minimo numero di colori con cui è possibile colorare i vertici di G in modo che vertici la cui distanza è minore o uguale a due abbiano colori diversi. Si determini, per ogni $n \geq 1$, $\chi_2(C_{2n})$ e $\chi_2(C_{2n+1})$.

Esercizio 4.22. Si determini $\chi_2(G)$ nei casi del grafo del cubo e del grafo di Petersen.

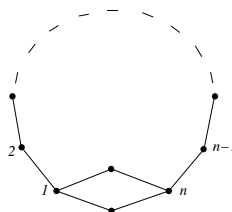
Esercizio 4.23. Sia G un grafo regolare connesso con un numero pari di vertici. Supponiamo che G si decomponga in k cicli hamiltoniani disgiunti (significa che esistono k cicli hamiltoniani in G , tali che ogni lato di G appartiene a uno ed un solo di essi). Si provi che $\chi'(G) = \Delta(G) = 2k$.

Esercizio 4.24. Sia $n \geq 1$ e sia G il grafo i cui vertici sono tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n\}$ e, dati due di essi X e Y , $\{X, Y\}$ è un lato di G se e solo se $X \subseteq Y$, e $|Y \setminus X| = 1$. Si determini $\chi(G)$ e $\chi'(G)$.

Esercizio 4.25. Senza fare uso della Proposizione 4.2 si provi che ogni grafo bipartito regolare d -valente ammette una colorazione dei lati con d colori.

Esercizio 4.26. Sia G un grafo connesso. Si provi che è possibile colorare con 2 colori i vertici di G in modo che per ogni coppia di vertici distinti esista un cammino semplice che li congiunge i cui vertici hanno (considerati nell'ordine dato dal cammino) colori alternati. Si provi che l'analogica conclusione non vale colorando di due colori gli archi di G .

Esercizio 4.27. Sia $n \geq 2$ un numero pari. Si provi che il seguente grafo ha numero ℓ -cromatico uguale a 2



Esercizio 4.28. Sia G un grafo connesso (bipartito) con $\chi_\ell(G) = 2$. Si provino le seguenti affermazioni

- (i) Se u, v sono vertici distinti di G , allora non esistono tre cammini indipendenti da u a v , di cui almeno uno di lunghezza ≥ 3 .
- (ii) Due cicli non banali e distinti di G hanno in comune almeno 2 vertici.

Esercizio 4.29. Si dimostri la Proposizione 4.5.

Esercizio 4.30. Sia $n \geq 1$. Un *quadrato latino* di ordine n è una matrice $n \times n$ tale che in ogni sua riga e in ogni sua colonna compare una e una sola volta ogni elemento dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Si descriva un metodo per ricavare un quadrato latino da ogni n -colorazione dei lati del grafo completo bipartito $K_{n,n}$.

Esercizio 4.31. Si provi che $R(3, 5) \leq 14$.

Esercizio 4.32. Sia G il grafo il cui insieme dei vertici è $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ (l'insieme delle classi di resto modulo 17), e una coppia $\{[n], [m]\}$ di classi è un lato se e solo se

$$n - m \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}.$$

Si provi che né G né il suo complementare contengono un sottografo isomorfo a K_4 .

Esercizio 4.33. Usando l'esercizio precedente e l'esercizio 4.15 si provi che $R(4, 4) = 18$.

Esercizio 4.34. Sia G un gruppo infinito, tale che per ogni sottoinsieme infinito di G esistono due elementi distinti $x, y \in X$ tali che $xy = yx$. Si provi che G contiene un sottogruppo commutativo infinito.

Esercizio 4.35. (Schur) Provare che per $n \geq 2$, esiste un intero $f(n)$, tale che per ogni partizione di $V = \{1, 2, \dots, f(n)\}$ in n classi, esistono due interi a e b tali che a , b e $a + b$ appartengono alla stessa classe. [sugg.: se $\{1, 2, \dots, N\}$ è ripartito in un insieme S di classi, si colorino i sottoinsiemi con 2 elementi di $\{1, 2, \dots, N\}$, assumendo l'insieme S come insieme dei colori, ed assegnando ad ogni $\{a, b\}$ il colore corrispondente alla classe a cui appartiene $|a - b|$. Se N è abbastanza grande...]

Esercizio 4.36. Usando il fatto che $R(3, 4) = 9$ (esercizio 4.15), si provi che $r^3(2, 4) \leq 19$, dove $r^k(c, n)$ è definito col Teorema 4.12.

Esercizio 4.37. Si provi (senza applicare il teorema di Lovász) che il grafo complementare di un ciclo dispari di lunghezza almeno 5 non è perfetto.

Esercizio 4.38. Si provi (senza applicare il teorema di Lovász) che il grafo complementare del line-graph di un grafo bipartito è perfetto.

Complementi.

1. *Polinomio cromatico.* Sia $G = (V, E)$ un grafo; per ogni $1 \leq k \in \mathbb{N}$, si denota con $p_G(k)$ il numero di colorazioni (dei vertici) di G con i colori $\{1, 2, \dots, k\}$ (cioè il numero di applicazioni $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ che sono colorazioni di G); quindi, il numero cromatico di G è il minimo k tale che $p_G(k) \geq 1$.

Sia $e = \{x, y\}$ un arco del grafo G ; allora $G - e$ è il grafo ottenuto da G togliendo l'arco e ; denotiamo invece con G/e il grafo ottenuto da G identificando (o "fondendo") gli estremi di e (ed eventualmente cancellando archi doppi che si potrebbero ottenere).

Esercizio 4.39. Sia e un arco del grafo G , e sia $k \geq 1$. Si provi che

$$p_G(k) = p_{G-e}(k) - p_{G/e}(k).$$

Si provi che se $\Delta_1, \dots, \Delta_t$, sono le componenti connesse di G , allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$p_G(k) = \prod_{i=1}^t p_{\Delta_i}(k).$$

Esercizio 4.40. Sia G un grafo con n vertici, m archi e t componenti connesse. Si provi che, per ogni $k \geq 1$

$$p_G(k) = \sum_{i=0}^{n-t} (-1)^i a_i k^{n-i} \quad (4.5)$$

dove $a_i \in \mathbb{N}$ per ogni $i = 0, \dots, n-k$ non dipendono da k , e $a_0 = 1$, $a_1 = m$.

[sugg. Procedere per induzione su $n+m$ e applicando l'esercizio 4.39 al passo induttivo]

Il polinomio a coefficienti interi $p_G(x)$ definito dalle identità in (4.5) si chiama il *polinomio cromatico* di G . Si osservi che, se e è un arco del grafo G , dall'esercizio 4.39 segue che

$$p_G(x) = p_{G-e}(x) - p_{G/e}(x).$$

Inoltre, se $k \in \mathbb{N}$ con $k < \chi(G)$, allora $(x-k)$ divide $p_G(x)$.

Esercizio 4.41. Si descriva il polinomio cromatico del grafo completo K_n .

Esercizio 4.42. Sia T un albero con n vertici; si provi che il polinomio cromatico di T è $x(x-1)^{n-1}$. Si provi quindi che il polinomio cromatico di un n -ciclo è $(x-1)[(x-1)^n - 1]$.

Esercizio 4.43. Si dia una dimostrazione del Teorema di Brooks utilizzando il polinomio cromatico.

Capitolo 5

Grafi e Algebra

In questo capitolo considereremo alcuni aspetti di teoria dei grafi che si rifanno, sia nell'approccio concettuale che nelle tecniche, ad argomenti di natura più "algebrica". Questo tipo di idee si adatta in modo particolare allo studio della classe dei grafi regolari, di cui, nella seconda sezione, prenderemo in esame una interessante sottoclasse. La terza e la quarta sezione sono dedicate ad alcune importanti connessioni tra grafi e gruppi. La prima sezione è però quella fondamentale: in essa, mediante la nozione di matrice d'adiacenza, si stabilisce una prima, basilare, interpretazione dei grafi in termini di algebra lineare che è il punto di partenza di quella che è chiamata Teoria Algebrica dei Grafi.

5.1 Matrice d'adiacenza.

Sia $\Gamma = (V, E, \phi)$ un multigrafo finito, e per ogni coppia di vertici u, v denotiamo con A_{uv} il numero di archi i cui estremi sono u e v ; quindi $A_{uv} = |\phi^{-1}(\{u, v\})|$. Fissato un ordinamento totale di V , la **matrice di adiacenza** di Γ è la matrice $A(\Gamma)$ (che è conveniente considerare come una matrice a coefficienti nel campo complesso \mathbb{C}) i cui elementi sono i numeri interi A_{uv} . Indipendentemente dalla scelta dell'ordine su V , se $|V| = n$, $A(\Gamma)$ è una matrice quadrata, simmetrica ed i cui termini diagonali A_{uu} sono tutti nulli. Inoltre, per ogni $u \in V$,

$$\sum_{v \in V} A_{uv} = d_{\Gamma}(u). \quad (5.1)$$

Se Γ è un grafo (cioè, è semplice), $A_{uv} \in \{0, 1\}$, per ogni $u, v \in V$. Se, inoltre, il grafo è k -regolare, allora la somma degli elementi di una riga (o di una colonna) è k .

L'aspetto delle matrici di adiacenza che ci interessa maggiormente è lo studio degli autovalori. Prima di tutto, osserviamo che la matrice di adiacenza A di un multigrafo con n vertici è simmetrica ed a valori reali (di fatto interi) e quindi, per il Teorema Spettrale, tutti i suoi autovalori sono reali. Li denoteremo, contandone la molteplicità con

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-1}$$

e chiameremo questo lo *spettro* di A .

Esempi. 1) Calcoliamo lo spettro della matrice di adiacenza $A(K_n)$ del grafo completo su n vertici. Si ha, chiaramente, $A(K_n) = J_n - I_n$, dove J_n è la matrice $n \times n$ in cui ogni elemento è 1, e I_n la matrice identica di ordine n . Ne segue che gli autovalori di $A(K_n)$ sono tutti e soli del tipo $\lambda - 1$, dove λ è autovalore di J_n . Ora, J_n ha rango 1, quindi il suo nucleo ha dimensione $n - 1$, e pertanto 0 è autovalore di J_n con molteplicità $n - 1$. L'altro autovalore di J_n è n (che, necessariamente, ha molteplicità 1). Pertanto, gli autovalori di $A(K_n)$ sono: $n - 1$ con molteplicità 1, e -1 con molteplicità $n - 1$.

2) Studiamo ora la matrice di adiacenza $A = A(C_n)$ di un n -ciclo. Se v_0, v_1, \dots, v_{n-1} sono i vertici di C_n elencati in modo che vertici consecutivi siano adiacenti (e v_{n-1} adiacente a v_0), allora

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = B + B^T \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $B^T = B^{-1}$; quindi B e B^T hanno gli stessi autospazi (relativi ad autovalori che sono l'uno l'inverso dell'altro). Ne segue che gli autovalori di A sono del tipo $\lambda + \lambda^{-1}$ dove λ è un autovalore di B . Ora, come si calcola facilmente, il polinomio caratteristico di B è $(-1)^n(x^n - 1)$; quindi gli autovalori di B sono le radici n -esime dell'unità, ovvero $\lambda_t = \cos \frac{2\pi t}{n} + i \sin \frac{2\pi t}{n}$ con $t = 0, 1, \dots, n - 1$. Ne segue che gli autovalori di A sono i numeri reali $\lambda_t + \lambda_t^{-1} = \lambda_t + \bar{\lambda}_t = 2 \cos \frac{2\pi t}{n}$, con $t = 0, 1, \dots, n - 1$. Si osservi che $\mu_0 = 2 \cos 0 = 2$, che ha molteplicità 1 (come deve essere dato che C_n è connesso). Gli altri autovalori hanno molteplicità 2, tranne eventualmente -2 , che occorre se e solo se n è pari ed, in tal caso, ha molteplicità 1.

Torniamo alla teoria generale. Per studiare gli autovalori di una matrice quadrata di ordine n è opportuno interpretare questa come la matrice di un endomorfismo di uno spazio n -dimensionale. Sia Γ un (multi)grafo, V l'insieme dei suoi vertici, con $|V| = n$, ed A la sua matrice di adiacenza; i cui termini denotiamo con A_{xy} (al variare di $x, y \in V$). Il \mathbb{C} -spazio vettoriale che risulta conveniente considerare (essenzialmente dal punto di vista notazionale) è lo spazio $\mathcal{C}(\Gamma) = \{f \mid f : V \rightarrow \mathbb{C}\}$ di tutte le applicazioni sull'insieme V a valori in \mathbb{C} . È uno spazio di dimensione n , una base del quale è costituita dalle applicazioni che assumono valore 1 in uno dei vertici e valore 0 sugli altri. L'azione della matrice A su $\mathcal{C}(\Gamma)$ si descrive facilmente e direttamente: se $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, allora per ogni $x \in V$ si pone

$$(Af)(x) = \sum_{y \in V} A_{xy} f(y) = \sum_{x \sim y} A_{xy} f(y), \quad (5.2)$$

dove $x \sim y$ indica che y varia nell'insieme dei vertici adiacenti a x (che sono tutti e soli i vertici y per cui $A_{xy} \neq 0$). Se Γ è un grafo, la (5.2) diventa

$$(Af)(x) = \sum_{x \sim y} f(y). \quad (5.3)$$

Il caso di cui ci occuperemo principalmente è quello dei grafi regolari. Se Γ è k -regolare (con $k \geq 2$) allora, per ogni vertice x si ha

$$\sum_{y \in V} A_{xy} = k.$$

Per la relazione (5.2), ciò comporta che la funzione che su V vale costantemente 1 è un autovettore per A relativo all'autovalore k , e quindi che k (il grado di regolarità di Γ) è un autovalore della matrice di adiacenza A . Questa prima osservazione sul legame tra gli autovalori della matrice di adiacenza e le proprietà del grafo è resa più specifica nel primo teorema che vediamo.

In quanto segue, manteniamo fissa la notazione: Γ è un multigrafo finito con n vertici, $A(\Gamma)$ è la sua matrice di adiacenza, e $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ è lo spettro di $A(\Gamma)$.

Teorema 5.1. *Sia Γ un grafo k -regolare. Allora*

- (i) $k = \mu_0$;
- (ii) $|\mu_i| \leq k$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$;
- (iii) Γ è connesso se e solo se $\mu_0 > \mu_1$ (ovvero k è autovalore di molteplicità 1).

DIMOSTRAZIONE. Sia Γ un grafo k -regolare, e sia $A = A(\Gamma)$ la sua matrice d'adiacenza. Abbiamo già osservato che k è un autovalore di A .

Sia μ un autovalore di A e sia $0 \neq f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ un autovettore relativo a μ . Scegliamo $x \in V$ tale che $|f(x)|$ (modulo complesso) sia massimo. Osserviamo che, rimpiazzando eventualmente f con $f(x)f$, possiamo assumere $0 < f(x) \in \mathbb{R}$. Allora

$$|\mu|f(x) = |\mu f(x)| = |Af(x)| = \left| \sum_{y \in V} A_{xy}f(y) \right| \leq \sum_{y \in V} A_{xy}|f(y)| \leq f(x) \sum_{y \in V} A_{xy} = kf(x).$$

Quindi $|\mu| \leq k$, il che prova i punti (i) e (ii) dell'enunciato.

Sia ora $0 \neq f$ un autovettore relativo a k e, come prima, sia $x \in V$ tale che $|f(x)|$ è massimo. Allora

$$kf(x) = Af(x) = \sum_{y \in V} A_{xy}f(y) = \sum_{y \sim x} A_{xy}f(y). \quad (5.4)$$

Dunque

$$f(x) = \sum_{y \sim x} \frac{A_{xy}}{k} f(y).$$

Poiché, per ogni $y \sim x$, $0 < A_{xy}/k \leq 1$ e $\sum_{y \sim x} A_{xy}/k = 1$, l'uguaglianza (5.4) ci dice che il numero complesso $f(x)$ appartiene all'involuppo convesso dei punti $f(y)$ con $y \sim x$. Poiché ognuno di questi punti è contenuto nel cerchio di raggio $|f(x)|$, la sola possibilità è che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \sim x$. Quindi, f è costante sulle componenti connesse di Γ . Pertanto, se Γ è connesso, l'autospazio di A relativo a k consiste in tutte e sole le applicazioni costanti su V , ed ha dunque dimensione 1. Ne segue che la molteplicità di k come autovalore di A è 1, ovvero che $k = \mu_0 > \mu_1$.

Se Γ non è connesso, sia U l'insieme dei vertici di una sua componente connessa e definiamo $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ponendo, per ogni $x \in V$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \in V \setminus U \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in U \\ 1 & \text{se } x \in V \setminus U \end{cases}$$

Allora, f e g sono elementi indipendenti di $\mathcal{C}(\Gamma)$ e, come si verifica facilmente, autovettori di A relativi a k . Quindi la molteplicità di $\mu_0 = k$ è almeno 2 e pertanto $\mu_0 = \mu_1$ ■

Abbiamo visto che, per la matrice di adiacenza del ciclo C_n , l'autovalore -2 (ovvero l'opposto della valenza k , che in questo caso, è 2) occorre se e solo se n è pari; ovvero nei casi in cui C_n è bipartito. Il prossimo Teorema descrive proprio questa situazione.

Teorema 5.2. *Sia Γ un grafo k -regolare e connesso. Allora sono equivalenti*

- (i) Γ è bipartito;
- (ii) lo spettro di $A(\Gamma)$ è simmetrico rispetto a 0;
- (iii) $\mu_{n-1} = -k$.

DIMOSTRAZIONE. (i) \Rightarrow (ii). Sia Γ un grafo bipartito, e sia $V = V_1 \cup V_2$ una bipartizione dell'insieme dei vertici di Γ (ciò significa che $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ed ogni arco di Γ ha uno degli estremi in V_1 e l'altro in V_2). Sia μ un autovalore di $A = A(\Gamma)$ e sia $0 \neq f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ un autovettore relativo a μ ; quindi $Af = \mu f$. Definiamo $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ponendo, per ogni $x \in V$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V_1 \\ -f(x) & \text{se } x \in V_2 \end{cases}$$

Allora $g \neq 0$. Se $x \in V_1$, allora $y \sim x \Rightarrow y \in V_2$, e si ha

$$Ag(x) = \sum_{y \sim x} A_{xy}g(y) = \sum_{y \sim x} A_{xy}(-f(y)) = -Af(x) = -\mu f(x) = -\mu g(x).$$

Analogamente, si vede che se $x \in V_2$ allora $Ag(x) = Af(x) = \mu f(x) = -\mu g(x)$. Pertanto, $Ag = -\mu g$, il che prova che $-\mu$ è un autovalore di A , e dunque che (ii) è soddisfatta.

(ii) \Rightarrow (iii). Poiché dal Teorema 5.1 segue che $k = \mu_0$ è autovalore di A con il massimo modulo, da (ii) segue che $-k$ è un autovalore di A , e quindi che $\mu_{n-1} = -k$.

(iii) \Rightarrow (i). Assumiamo che $-k$ sia un autovalore di A ; sia $0 \neq f$ un autovettore relativo a $-k$ e sia $x \in V$ tale che $|f(x)|$ è massimo. Come nella dimostrazione del punto (i) del Teorema 5.1, possiamo assumere che $0 < f(x) \in \mathbb{R}$. Poniamo $V_1 = \{y \in V \mid f(y) = f(x)\}$, $V_2 = \{y \in V \mid f(y) = -f(x)\}$, e proviamo che $V_1 \cup V_2$ è una bipartizione di V . Chiaramente, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Poiché Γ è connesso, per ogni $y \in V$ è definita la distanza $d_\Gamma(x, y) = d_y$. Procedendo per induzione su d_y proviamo che $y \in V_1$ se d_y è pari, mentre $y \in V_2$ se d_y è dispari. Infatti,

$$|f(x)| = f(x) = -\frac{1}{k}Af(x) = -\frac{1}{k} \sum_{y \sim x} A_{xy}f(y) = \sum_{y \sim x} \frac{A_{xy}}{k}(-f(y)),$$

e quindi, come nella dimostrazione del punto (ii) di 5.1, $f(y) = -f(x) < 0$ per ogni $V \ni y \sim x$. Pertanto, $\{y \in V \mid d_y = 1\} \subseteq V_2$. Questo stesso argomento fornisce il metodo per provare il passo induttivo, e quindi la correttezza dell'affermazione fatta sopra. Ne segue che $V_1 \cup V_2 = V$ è una bipartizione di V . ■

Esercizio 5.1. Sia Γ un grafo k -regolare. Si provi che la molteplicità di k come autovalore di $A(\Gamma)$ è uguale al numero di componenti connesse di Γ .

Esercizio 5.2. Si determini lo spettro della matrice di adiacenza del grafo del cubo.

Esercizio 5.3. Dato $n \geq 2$, si determini lo spettro della matrice di adiacenza del grafo completo bipartito $K_{n,n}$.

L'operatore di Laplace. Sia $\Gamma = (V, E)$ un (multi)grafo con n vertici. Lo spazio $\mathcal{C}(\Gamma)$ è dotato del prodotto scalare hermitiano standard

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in V} f(x) \overline{g(x)}.$$

per ogni $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

Sia A la matrice di adiacenza di Γ , e $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ il suo spettro. Poiché A è reale e simmetrica, l'operatore lineare su $\mathcal{C}(\Gamma)$ ad essa associato è hermitiano, ovvero

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

per ogni $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Ciò implica, in particolare, che esiste una base ortonormale di $\mathcal{C}(\Gamma)$ composta da autovettori di A . Quindi, ogni $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ si scrive in modo unico come $f = f_0 + \dots + f_{n-1}$, dove, per ogni $i = 0, \dots, n-1$, f_i è un autovettore relativo all'autovalore μ_i di A , e $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. Dunque $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \|f_i\|^2$, e

$$\langle Af, f \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle Af_i, f_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \langle f_i, f_i \rangle.$$

Da ciò segue immediatamente la seguente utile osservazione.

Lemma 5.3. Per ogni $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$,

$$Q_A(f) := \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle} \in [\mu_{n-1}, \mu_0].$$

Orientazioni. I grafi possono essere visti come spazi topologici 1-dimensionali. La nozione di orientazione è, nel caso dei grafi, particolarmente semplice. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; un'orientazione di Γ è un ordinamento totale sull'insieme dei suoi vertici. Questo fornisce ad ogni arco di Γ un verso, nel senso che possiamo descrivere ogni arco $e \in E$ come una coppia ordinata di vertici $e = \{e_-, e_+\}$, dove $e_- < e_+$ sono gli estremi di e .

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo sul quale sia stata fissata un'orientazione. La *matrice d'incidenza* $B = B(\Gamma)$ è la matrice indicizzata su $V \times E$ (quindi, se $|E| = m$, è una matrice $n \times m$) dove, per ogni $x \in V$ e ogni $e \in E$,

$$B_{xe} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = e_+ \\ -1 & \text{se } x = e_- \\ 0 & \text{se } x \notin e \end{cases} \quad (5.5)$$

Analogamente per quanto fatto con i vertici, sia $\mathcal{E}(\Gamma)$ il \mathbb{C} -spazio vettoriale (m -dimensionale) di tutte le applicazioni $u : E \rightarrow \mathbb{C}$. Allora B è la matrice dell'applicazione lineare

$$\delta : \mathcal{E}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma),$$

dove per ogni $u \in \mathcal{E}(\Gamma)$, ed ogni $x \in V$,

$$\delta u(x) = \sum_{e \in E} B_{xe} u(e) = \sum_{x=e_+} u(e) - \sum_{x=e_-} u(e).$$

L'operatore trasposto $\delta^* : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{E}(\Gamma)$ è associato dalla matrice trasposta B^T , ed è dato da, per ogni $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, ed $e \in E$,

$$\delta^* f(e) = \sum_{x \in V} B_{xe} f(x) = f(e_+) - f(e_-). \quad (5.6)$$

E sia ha, per ogni $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ed ogni $u \in \mathcal{E}(\Gamma)$, $\langle f, \delta u \rangle = \langle \delta^* f, u \rangle$ (dove, ovviamente, il termine a destra è lo stesso prodotto hermitiano definito su $\mathcal{E}(\Gamma)$).

Definiamo a questo punto la matrice $D = D(\Gamma)$ come la matrice diagonale $n \times n$, i cui elementi (indicizzati sulle coppie di vertici di Γ) sono

$$D_{xy} = \begin{cases} d_\Gamma(x) & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Lasciamo per esercizio la semplice dimostrazione del seguente fatto.

Lemma 5.4. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato, B la matrice d'incidenza, e A la matrice di adiacenza di Γ . Allora*

$$BB^T = D - A.$$

L'operatore di Laplace del grafo Γ è l'operatore sullo spazio $\mathcal{C}(\Gamma)$ la cui matrice è $L(\Gamma) = D - A$. Tale operatore¹, non dipende dalla scelta dell'orientamento di Γ e, per il Lemma 5.4, coincide con $\delta\delta^*$; è un operatore reale, simmetrico, quindi hermitiano, e per esso valgono le considerazioni fatte in precedenza per A .

¹Fissato l'orientamento su Γ , una funzione $u \in \mathcal{E}(\Gamma)$ si può vedere come un'assegnazione di "flusso" ad ogni arco del grafo. L'operatore δ rappresenta allora una versione discreta della *divergenza* in geometria differenziale. Similmente, l'operatore δ^* (che misura la variazione di $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ lungo gli archi), si può vedere con la versione discreta del *gradiente*. Quindi la composizione $\delta\delta^*$ (la divergenza del gradiente), rappresenta la versione discreta dell'usuale operatore di Laplace.

Quando il grafo Γ è k -regolare, la cosa assume un aspetto particolarmente accattivante: in tal caso, si ha $D = kI_n$ e quindi, dal Lemma 5.4, $L = kI_n - A$. Ne segue che lo spettro di L è dato da,

$$k - \mu_{n-1} \geq \dots \geq k - \mu_1 \geq k - \mu_0 = 0. \quad (5.7)$$

Supponiamo, inoltre, che Γ sia connesso; allora l'autovalore 0 di L ha molteplicità 1 e l'autospazio corrispondente coincide con l'autospazio di A relativo all'autovalore k , che, come abbiamo visto è lo spazio \mathcal{Z} delle funzioni costanti $V \rightarrow \mathbb{C}$. Abbiamo cioè il seguente fatto

Lemma 5.5. *Sia $k \geq 2$ e sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso k -regolare. Allora il nucleo dell'operatore di Laplace di Γ è costituito dalle funzioni costanti in $\mathcal{C}(\Gamma)$.*

Poiché L è hermitiano, gli autovettori relativi agli altri autovalori di L appartengono (sempre nel caso in cui Γ sia regolare e connesso) allo spazio ortogonale \mathcal{Z}^\perp di \mathcal{Z} , che, come si verifica immediatamente, è

$$\mathcal{Z}^\perp = \left\{ f \in \mathcal{C}(\Gamma) \mid \sum_{x \in V} f(x) = 0 \right\}.$$

Applicando all'operatore L (ed agli elementi $f \in \mathcal{Z}^\perp$) lo stesso argomento del Lemma (5.3) si conclude con la seguente proposizione.

Proposizione 5.6. *Sia $k \geq 2$, $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso k -regolare, e $k = \mu_0 \geq \dots \mu_{n-1}$ lo spettro di $A(\Gamma)$. Sia L l'operatore di Laplace di Γ . Allora per ogni $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$*

$$Q_L(f) := \frac{\langle Lf, f \rangle}{\langle f, f \rangle} \in [0, k - \mu_{n-1}].$$

Inoltre, se $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ è tale che $\sum_{x \in V} f(x) = 0$,

$$Q_L(f) \geq k - \mu_1.$$

L'operatore di Laplace risulta molto utile per ricavare relazioni tra i valori dello spettro della matrice di adiacenza e i parametri del grafo. In questo senso lo utilizzeremo più avanti (in particolare nel Capitolo 9); per il momento vediamo un'applicazione al numero cromatico.

Proposizione 5.7. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso k -regolare, e $k = \mu_0 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ lo spettro di $A(\Gamma)$. Allora*

$$\chi(\Gamma) \geq 1 - \frac{k}{\mu_{n-1}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha = \alpha(\Gamma)$ l'indice di stabilità di Γ , sia U un sottoinsieme stabile di vertici di ordine α , e sia $\partial(U)$ l'insieme degli archi che hanno un estremo in U e l'altro in $V \setminus U$ (∂U è detto la *frontiera* di U). Allora $|\partial U| = k\alpha$. Sia $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} n - \alpha & \text{se } x \in U \\ -\alpha & \text{se } x \in V \setminus U \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\langle f, f \rangle = \sum_{x \in V} f(x)^2 = (n - \alpha)^2 \alpha + \alpha^2 (n - \alpha) = n\alpha(n - \alpha).$$

Fissiamo ora un orientamento di Γ , in modo che ogni vertice di $V \setminus U$ preceda tutti i vertici di U . Sia $\delta^* : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{E}(\Gamma)$ l'applicazione lineare definita in (5.6). Allora, per ogni $e \in E$,

$$\delta^* f(e) = f(e_+) - f(e_-) = \begin{cases} n & \text{se } e \in \partial F \\ 0 & \text{se } e \notin \partial F \end{cases}$$

Sia $L = \delta\delta^*$ l'operatore di Laplace di Γ . Allora,

$$\langle Lf, f \rangle = \langle \delta^* f, \delta^* f \rangle = \sum_{e \in E} (\delta^* f(e))^2 = n^2 |\partial F| = n^2 k\alpha$$

Applicando ora la Proposizione 5.6, si ricava

$$k - \mu_{n-1} \geq \frac{\langle Lf, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{n^2 k\alpha}{n\alpha(n - \alpha)},$$

da cui

$$\alpha(k - \mu_{n-1}) \leq -n\mu_{n-1}. \quad (5.8)$$

La tesi segue ora da (5.8) e dalla Proposizione 1.10. ■

Esercizio 5.4. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo regolare su n vertici, e sia μ_0, \dots, μ_{n-1} lo spettro della sua matrice di adiacenza. Si descriva (in funzione di quello di Γ) lo spettro della matrice di adiacenza del grafo complementare $\bar{\Gamma}$.

Esercizio 5.5. Si dimostri il Lemma 5.4.

Esercizio 5.6. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo semplice con $|V| = n$, e sia $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ lo spettro della matrice di adiacenza $A(\Gamma)$. Si provi che $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i = 0$, e che $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i^2 = 2|E|$.

5.2 Grafi fortemente regolari, grafi di Moore.

La matrice di adiacenza, e in particolare il suo spettro, forniscono metodi di approccio ai grafi che risultano particolarmente utili quando i grafi in questione hanno un elevato livello di simmetria. In questa sezione vediamo una classica applicazione dello spettro della matrice di adiacenza in tal senso.

Grafi fortemente regolari. Siano k, a, b numeri interi con $k \geq 2$, $a \geq 0$ e $b \geq 1$. Un grafo finito Γ si dice un grafo *fortemente regolare* (in inglese: strongly regular) con parametri (k, a, b) se Γ è k -regolare e non completo, e per ogni coppia x, y di vertici distinti di Γ il numero di vertici adiacenti sia ad x che a y è a se $x \sim y$, mentre è b se $x \not\sim y$.

Ad esempio, un ciclo C_n è fortemente regolare se e solo se $n = 4$ o $n = 5$; i parametri sono, rispettivamente nei due casi, $(2, 0, 2)$ e $(2, 0, 1)$. Il grafo di Petersen è fortemente regolare con parametri $(3, 0, 1)$. un'altra classe di esempi sono i grafi completi bipartiti: per $n \geq 2$, $K_{n,n}$ è fortemente regolare con parametri $(n, 0, n)$ (si veda l'esercizio 5.28).

Non è difficile verificare che se Γ è fortemente regolare, allora lo è anche il suo grafo complementare $\bar{\Gamma}$; infatti, se (k, a, b) sono i parametri di Γ e n il numero dei suoi vertici, allora i parametri di $\bar{\Gamma}$ sono $(n-1-k, n-2-2k+b, n-2k+a)$ (lo si dimostri per esercizio).

Osserviamo anche che se un grafo fortemente regolare di parametri (k, a, b) non è connesso, allora necessariamente $b = 0$, il che a sua volta implica che tutte le componenti connesse di Γ sono grafi completi con lo stesso numero di vertici (dimostrazione per esercizio).

Sia Γ un grafo fortemente regolare con parametri (k, a, b) e n vertici. Fissato un vertice x , denotiamo con N l'insieme dei vertici adiacenti a x e con L quello dei vertici diversi da x e non adiacenti ad esso; allora $|N| = k$ e $|L| = n-1-k$. Contiamo il numero $\alpha(N, L)$ degli archi di Γ i cui estremi stanno uno in N e l'altro in L . Se $y \in L$ allora il numero di archi con un estremo in y e l'altro in N è uguale al parametro b , quindi $\alpha(N, L) = b|L| = b(n-1-k)$. Dall'altra parte, se $z \in N$ allora il numero di vertici in L adiacenti a z è uguale a $k-a-1$, quindi $\alpha(N, L) = |N|(k-a-1) = k(k-a-1)$. Pertanto abbiamo il seguente

Lemma 5.8. *Sia Γ un grafo fortemente regolare con parametri (k, a, b) e n vertici. Allora*

$$k(k-a-1) = b(n-1-k).$$

Lo spettro di un grafo fortemente regolare. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso fortemente regolare, con parametri (k, a, b) e n vertici; e sia $A = A(\Gamma)$ la sua matrice di adiacenza. Poniamo $B = A^2$; allora, per ogni $x, y \in V$, B_{xy} è il numero di percorsi tra x e y di lunghezza 2. Ricordando che, se $x, y \in V$, $x \sim y$ significa che x e y sono adiacenti, abbiamo quindi

$$B_{xy} = \begin{cases} k & \text{se } x = y \\ a & \text{se } x \sim y \\ b & \text{se } x \not\sim y \text{ e } x \not\sim y \end{cases} \quad (5.9)$$

Pertanto

$$B = kI_n + aA + b(J_n - I_n - A) = bJ_n + (k-b)I_n + (a-b)A \quad (5.10)$$

dove J_n è la matrice in cui ogni elemento è 1. Ovvero (scrivendo $I = I_n$ e $J = J_n$)

$$A^2 + (b-a)A - (k-b)I = bJ. \quad (5.11)$$

Poiché gli autovalori di J (che abbiamo già trovato in precedenza - vedi esempio (1) nella sezione 5.1) sono 0 (con molteplicità $n-1$) e n (con molteplicità 1), da (5.11) segue che ogni autovalore μ di A soddisfa

$$\mu^2 + (b-a)\mu - (k-b) \in \{0, nb\}. \quad (5.12)$$

Per il Teorema 5.1 il massimo di tali autovalori è k , che (vedi Lemma 5.8) corrisponde alla soluzione di $x^2 + (b-a)x - (k-b) = bn$; l'altra eventuale soluzione non è ammissibile dato che bn , come autovalore di bJ_n , ha molteplicità 1. Quindi, gli altri autovalori di A sono le soluzioni di $x^2 + (b-a)x - (k-b) = 0$ (che sono reali). Abbiamo pertanto dimostrato parte del seguente risultato.

Teorema 5.9. *Sia Γ un grafo connesso con n vertici, fortemente regolare con parametri (k, a, b) , e sia $A = A(\Gamma)$ la sua matrice di adiacenza. Allora*

(1) Gli autovalori diversi da k di A sono radici del polinomio

$$x^2 + (b - a)x - (k - b). \quad (5.13)$$

in particolare, A ha al più tre autovalori distinti;

(2) i valori

$$\frac{1}{2} \left((n - 1) \pm \frac{2k + (n - 1)(a - b)}{\sqrt{(a - b)^2 + 4(k - b)}} \right) \quad (5.14)$$

sono numeri interi positivi;

(3) Gli autovalori di A sono numeri interi, oppure

$$k = \frac{n - 1}{2}, \quad a = \frac{n - 5}{4}, \quad b = \frac{n - 1}{4}. \quad (5.15)$$

DIMOSTRAZIONE. Il punto (1) è già stato provato sopra. Vediamo il resto.

Siano λ_1 e λ_2 le due radici del polinomio (5.13) (che sono reali), e fissiamo gli indici in modo che $\lambda_1 \geq \lambda_2$; quindi

$$\lambda_1 = \frac{(a - b) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{(a - b) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

dove $\Delta = (a - b)^2 + 4(k - b)$. Osserviamo anche che, poiché il loro prodotto è uguale a $-(k - b) < 0$, le due radici sono distinte ed hanno segno opposto. Denotiamo con m_1 e m_2 le molteplicità di λ_1 e di λ_2 come autovalori della matrice A (potrebbe darsi che una sola sia un autovalore per A , in tal caso assegneremo all'altra molteplicità 0). Poiché Γ è connesso, la molteplicità dell'autovalore k è 1; ora, è un fatto elementare di algebra lineare che la somma degli autovalori di A (con le molteplicità) coincida con la traccia di A , che è 0; dunque

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = n - 1 \\ m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = -k \end{cases} \quad (5.16)$$

Risolvendo nelle indeterminate m_1 e m_2 , si trovano i due valori del punto (2) dell'enunciato, che pertanto sono numeri interi positivi.

Proviamo il punto (3). Questa volta consideriamo il sistema nelle indeterminate λ_1, λ_2 ,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = n - 1 \\ m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = -k \end{cases} \quad (5.17)$$

Se $m_1 \neq m_2$, tale sistema ammette una sola coppia di soluzioni λ_1, λ_2 , che sono razionali. Poiché sono zeri di un polinomio monico a coefficienti interi, si conclude che λ_1, λ_2 , sono numeri interi (e dividono $k - b$).

Rimane il caso in cui $m = m_1 = m_2$. Allora $m = (n - 1)/2$, e da (5.17) segue che

$$\frac{2k}{n - 1} = b - a$$

è un numero intero positivo. Poiché $0 < k < n - 1$ (se $k = n - 1$, Γ è un grafo completo), si ha $2k/(n - 1) = 1 = b - a$, da cui $k = (n - 1)/2$. Ponendo $b - a = 1$ in (5.12), e sostituendo μ con k , si ricava

$$k^2 + k - k + b = bn$$

quindi $b(n-1) = k^2 = (n-1)^2/4$, da cui $b = (n-1)/4$. Infine, $a = b - 1 = (n-5)/4$. ■

I grafi fortemente regolari con parametri come in (5.15) (e i cui autovalori sono $k, (-1 \pm \sqrt{n})/2$, e possono non essere interi) sono chiamati *conference graphs*, e ne vedremo un caso come esempio alla fine di questo capitolo

Grafi di Moore. Un grafo connesso Γ , k -regolare di diametro d , si dice *grafo di Moore* (di diametro d) se

$$g(\Gamma) = 2d + 1$$

ovvero, Γ ha il massimo calibro possibile per un grafo di diametro d (vedi l'esercizio 2.11).

Per $k = 2$ i grafi di Moore sono i cicli dispari C_{2d+1} .

Se $k \geq 3$, dal Corollario 2.12 e la Proposizione 2.13 segue che il numero di vertici di un grafo di Moore di valenza k e diametro d è

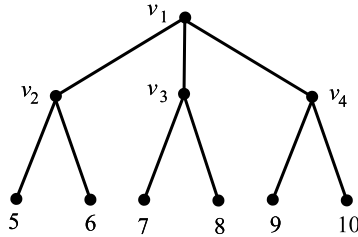
$$n = 1 + k \frac{(k-1)^d - 1}{k-2}.$$

Damerell, Bannai e Ito hanno provato che, per un diametro $d \geq 3$, l'unico grafo di Moore è il ciclo C_{2d+1} . Noi considereremo solo il caso (che è fondamentale) dei grafi di Moore di diametro 2; in tal caso, essendo il grafo k -regolare, il numero dei vertici è $n = 1 + k^2$. Chiaramente, il ciclo C_5 è l'unico grafo di Moore con grado 2 e diametro 2. Il caso $k = 3$ è meno banale, ma anch'esso non richiede strumenti particolarmente raffinati.

Proposizione 5.10. *Il grafo di Petersen è l'unico grafo di Moore cubico di diametro 2.*

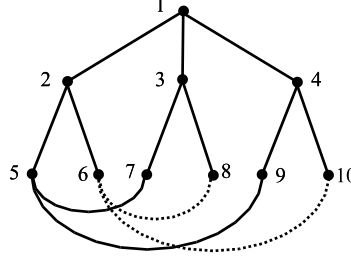
DIMOSTRAZIONE. Il grafo di Petersen è un grafo cubico di diametro 2; e poiché ha $10 = 3^2 + 1$ vertici, esso è un grafo di Moore.

Viceversa, sia Γ un grafo di Moore cubico di diametro 2; allora Γ ha 10 vertici, che denotiamo con v_1, v_2, \dots, v_{10} , e ponendo che i vertici adiacenti al vertice v_1 siano quelli denotati con v_2, v_3, v_4 . Siccome Γ ha diametro 2, considerando anche tutti i vertici adiacenti a qualcuno dei vertici v_2, v_3, v_4 , otteniamo tutti i vertici di Γ . Poiché ogni vertice v_2, v_3, v_4 ha esattamente 2 vertici adiacenti diversi dal vertice v_1 , e Γ ha 10 vertici si deduce che ogni vertice diverso da v_1, v_2, v_3, v_4 è adiacente ad uno e uno solo dei vertici v_2, v_3, v_4 . Abbiamo cioè la situazione illustrata dalla seguente figura.



Ora, poiché il vertice v_5 ha distanza 2 sia da v_3 che da v_4 , si avrà che v_5 è adiacente ad uno tra i vertici v_7, v_8 , e ad uno tra v_9, v_{10} ; eventualmente cambiando gli indici, possiamo supporre che v_5 sia adiacente a v_7 e a v_9 . Questo forza il vertice v_6 ad essere adiacente a v_9

e a v_{10} . Ora, v_7 deve essere adiacente a v_9 oppure a v_{10} ; siccome v_7 deve avere distanza 2 da v_6 , l'unica possibilità è che v_7 sia adiacente a v_{10} ; conseguentemente, v_8 è adiacente a v_9 , e non vi siano altri lati in Γ .



A questo punto si verifica facilmente che Γ è isomorfo al grafo di Petersen. ■

Il risultato principale intorno ai grafi di Moore di diametro 2 è il seguente.

Teorema 5.11. *Se Γ è un grafo di Moore k -regolare di diametro 2, allora $k = 2, 3, 7, 57$.*

DIMOSTRAZIONE. Il ciclo C_5 l'unico grafo di Moore 2-regolare con diametro 2. Sia quindi $k \geq 3$, e sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo di Moore k -regolare di diametro 2; allora Γ ha $n = 1 + k^2$ vertici. Poiché $\text{diam}(\Gamma) = 2$ e Γ non ha cicli di lunghezza ≤ 4 , si osserva che Γ è un grafo fortemente regolare con parametri $(k, a, b) = (k, 0, 1)$. Poniamo

$$d = \sqrt{(a-b)^2 + 4(k-b)} = \sqrt{4k-3},$$

la radice del discriminante del polinomio $x^2 + x + (k-1)$, di cui sono radici gli autovalori $\neq k$ della matrice di adiacenza di Γ . Per il punto (3) del Teorema 5.9, d è un intero positivo. Per il punto (2) del Teorema 5.9, tenendo conto che $n-1 = k^2$,

$$m = \frac{1}{2} \left(k^2 + \frac{2k-k^2}{d} \right) = \frac{k(kd-k+2)}{2d}$$

è un numero intero. Sostituendo $k = (d^2 + 3)/4$, si ha

$$\frac{(d^2 + 3)(d^3 - d^2 + 3d + 5)}{16d} \in \mathbb{Z},$$

da cui segue che d divide 15, cioè $d \in \{1, 3, 5, 15\}$. Di conseguenza $k = (d^2 + 3)/4 \geq 3$ appartiene a $\{3, 7, 57\}$. La dimostrazione è completa. ■

Come per $k = 2, 3$, si può provare che esiste un unico grafo di Moore, detto grafo di Hoffman–Singleton (dai nomi dei suoi scopritori), con valenza $k = 7$ e diametro 2 (vedi esercizi 5.45, 5.46); mentre non è tuttora noto se esistono grafi di Moore di valenza $k = 57$ e diametro 2 (un tale grafo, se esiste, ha 3250 vertici).

Esercizio 5.7. Sia Γ un grafo connesso, con diametro d e tale che $g(\Gamma) = 2d + 1$. Si provi che Γ è regolare.

Esercizio 5.8. Si provi che il grafo di Petersen è fortemente regolare e che in generale, i grafi di Kneser $K(n, 2)$ sono fortemente regolari. In tali casi determinare gli autovalori della matrice di adiacenza.

Esercizio 5.9. Sia $n \geq 2$; si provi che i line-graph dei grafi completi K_n e $K_{n,n}$ è fortemente regolare.

Esercizio 5.10. Si provi che un grafo regolare connesso e non completo Γ è fortemente regolare se e solo $A(\Gamma)$ ha esattamente tre autovalori distinti.

5.3 Automorfismi.

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Un *automorfismo* di Γ è una permutazione β dell'insieme V dei vertici di Γ tale che

$$\{x, y\} \in E \iff \{\beta(x), \beta(y)\} \in E.$$

L'insieme di tutti gli automorfismi di Γ forma un gruppo (rispetto all'operazione di composizione), detto il *Gruppo degli automorfismi* di Γ , che denotiamo con $Aut(\Gamma)$.

Ad esempio, il gruppo degli automorfismi del grafo completo K_n è ovviamente isomorfo al gruppo simmetrico S_n di tutte le permutazioni dell'insieme dei vertici; mentre il gruppo degli automorfismi di un ciclo C_n è isomorfo al gruppo dei movimenti rigidi di un n -agone regolare, ed è pertanto isomorfo al gruppo diedrale con $2n$ elementi. È chiaro che il gruppo degli automorfismi di un grafo induce un gruppo di permutazioni sull'insieme degli archi, e che se β è un automorfismo del grafo Γ , e u, v sono due vertici, $d_\Gamma(u, v) = d_\Gamma(\beta(u), \beta(v))$.

Transitività. Un grafo $\Gamma = (V, E)$ si dice **vertex-transitivo** se $Aut(\Gamma)$ è transitivo sull'insieme dei vertici di Γ , ovvero se per ogni $x, y \in V$ esiste $\beta \in Aut(\Gamma)$ tale che $\beta(x) = y$.

Un grafo $\Gamma = (V, E)$ si dice **edge-transitivo** se $Aut(\Gamma)$ induce un gruppo di permutazioni transitivo sull'insieme E degli archi di Γ , ovvero se per ogni $e = \{x, y\}, e' = \{x', y'\} \in E$, esiste $\beta \in Aut(\Gamma)$ tale che $\{x', y'\} = \{\beta(x), \beta(y)\}$.

I grafi completi e i grafi ciclici sono sia vertex-transitivi che edge-transitivi. Chiaramente, ogni grafo vertex-transitivo è regolare; cosa che non vale per grafi edge-transitivi: ad esempio la stella Σ_n è edge-transitiva (il suo gruppo degli automorfismi coincide col gruppo delle permutazioni S_n dei raggi) ma non è regolare, e quindi nemmeno vertex-transitivo.

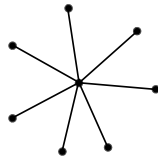


Figura 5.1: La stella Σ_7

Altri esempi di grafi edge-transitivi ma non vertex-transitivi sono i grafi completi bipartiti $K_{n,m}$ con $n \neq m$ ($K_{n,n}$ è sia edge- che vertex-transitivo); esistono anche esempi di grafi regolari edge- ma non vertex-transitivi, ma sono meno semplici da descrivere: il più piccolo è il grafo di Folkman (figura 5.2); si può dimostrare - vedi esercizio 5.12 - che un grafo edge-transitivo ma non vertex-transitivo è necessariamente bipartito. Il grafo della figura 1.14 è invece un esempio di grafo vertex-transitivo che non è edge-transitivo (lo si dimostri). Una fondamentale classe di grafi vertex-transitivi (i grafi di Cayley) saranno descritti nella prossima sezione.

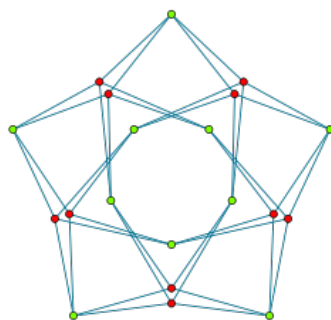


Figura 5.2: Un grafo regolare edge-transitivo, ma non vertex-transitivo.

Un'altra importante nozione è quella di grafo **arc-transitivo**. Con ciò si intende un grafo $\Gamma = (V, E)$ tale che $\text{Aut}(\Gamma)$ opera transitivamente sull'insieme di tutte le coppie $(x, e) \in V \times E$ con x estremo di e . Esempi di grafi arc-transitivi sono i grafi completi, il grafo di Petersen e il grafo di Heawood (figura 2.8). È chiaro che un grafo arc-transitivo è sia vertex- che edge-transitivo, ma il viceversa non vale: il più piccolo grafo vertex- e edge-transitivo ma non arc-transitivo è il cosiddetto grafo di Doyle, che è 4-regolare con 27 vertici.

Un grafo Γ è detto *circolante* se Γ ha n vertici e $\text{Aut}(\Gamma)$ contiene, visto come gruppo di permutazioni sull'insieme dei vertici $\{1, 2, \dots, n\}$ di Γ , un ciclo di lunghezza n . Esempi di grafi circolanti sono, ovviamente, i cicli C_n , i grafi completi K_n , e i grafi completi bipartiti $K_{n,n}$; un'altra classe di grafi circolanti la vedremo nell'esempio alla fine di questo capitolo. Dal fatto che, se p è un numero primo ogni sottogruppo transitivo del gruppo simmetrico S_p contiene un elemento la cui decomposizione in cicli è un ciclo di ordine p , segue la seguente osservazione.

Proposizione 5.12. *Un grafo con un numero primo di vertici è vertex-transitivo se e solo se è un grafo circolante.*

Per tali grafi è possibile descrivere in modo piuttosto chiaro l'intero gruppo degli automorfismi (cosa che in generale, anche per grafi vertex-transitivi, è piuttosto difficile): la tecnica la vedremo nell'esempio alla fine del capitolo.

Menzioniamo infine il fatto che i grafi circolanti connessi sono hamiltoniani (vedi esercizi 5.36 e 5.37). Questo ci porta ad un'interessante (e difficile) questione tuttora aperta (Lovasz 1970): *è vero che ogni grafo connesso vertex-transitivo ammette un cammino euleriano?* (in effetti, sono noti solo 5 grafi - tra cui il grafo di Petersen - che sono vertex-transitivi e privi di

un ciclo hamiltoniano). Il seguente risultato è dovuto a Babai il quale, in un'altra occasione, ha formulato una congettura che implica una risposta fortemente negativa alla questione di Lovasz.

Teorema 5.13. *Un grafo connesso vertex-transitivo con n vertici ammette un ciclo di lunghezza almeno $\sqrt{3n}$.*

Per la dimostrazione, della quale ci limitiamo a dare una traccia (ricorrendo anche ad alcuni esercizi), è utile il seguente Lemma.

Lemma 5.14. *Sia G un gruppo di permutazioni transitivo dell'insieme X , con $|X| = n$; sia $U \subseteq X$ e $c = \min\{|U \cap U^g| \mid g \in G\}$. Allora $|U| \geq \sqrt{cn}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia M il numero di coppie $(a, g) \in U \times G$ tali che $a \in U \cap U^g$, che coincide con quello delle coppie $(a, g) \in U \times G$ tali che $a^g \in U$. Dato $a \in U$, G_a lo stabilizzatore di a in G ; se $v \in U$ esiste $g \in G$ tale che $a^g = v$; e l'insieme degli elementi che mandano a in v è la classe laterale $G_a g$, che ha ordine $|G_a| = |G|/n$ (dato che G è transitivo su X). Quindi

$$M = \sum_{A \in U} |U||G_a| = |U|^2 |G|/n.$$

D'altra parte,

$$M = \sum_{g \in G} |U \cap U^g| \geq c|G|.$$

Dal confronto delle due formule si ricava l'enunciato. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.13. Sia Γ un grafo connesso e vertex-transitivo con n vertici. Se il grado k dei vertici di Γ è 2, Γ è un ciclo e non c'è nulla da provare. Supponiamo quindi $k \geq 3$; allora Γ è 3-connesso (questo si può provare, ma lo diamo per buono). Sia \mathcal{C} l'insieme dei vertici di un ciclo di lunghezza massima di Γ . Allora, per ogni $\beta \in \text{Aut}(\Gamma)$, $|\mathcal{C} \cap \beta(\mathcal{C})| \geq 3$ (vedi l'esercizio 3.33). Quindi, per il Lemma 5.14 si conclude che $|\mathcal{C}| \geq \sqrt{3n}$, provando così il teorema. ■

Automorfismi di alberi. Gli automorfismi degli alberi godono di alcune importanti proprietà, che dipendono in modo essenziale dalla mancanza di cicli, e che qui ci limitiamo a provare nel caso più semplice, quello di un albero finito.

Teorema 5.15. *Sia Γ un albero finito, e sia $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Allora G fissa almeno un vertice o un arco di Γ .*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione sul numero n di vertici di Γ ; se $n = 1, 2$ l'affermazione è ovvia (osservando che Γ è per ipotesi connesso, quindi se $n = 2$, Γ è costituito da un solo arco). Sia dunque $n \geq 3$. Per il Lemma 1.4 esiste un vertice x di Γ di grado 1. Se x è fissato da $G = \text{Aut}(\Gamma)$ siamo a posto. Altrimenti, sia S l'orbita di x mediante G (cioè, $S = \{\alpha(x) \mid \alpha \in G\}$), $s = |S|$ e $\Delta = \Gamma - S$. Ogni vertice in S ha grado 1 in Γ , quindi, poiché $n > 2$, elementi di S non possono essere adiacenti in Γ ; ne segue che Δ non è vuoto e il numero di archi di Δ è $(n-1) - s$ (dato che $n-1$ è il numero di archi di Γ). Poiché Δ è chiaramente una foresta ed ha $n-s$ vertici; dal Corollario 2.2 segue che Δ è connesso e quindi è un albero. Ora ogni automorfismo α di Γ induce, mediante restrizione,

un automorfismo $\alpha|_{\Delta}$ di Δ . Quindi $H = \{\alpha|_{\Delta} \mid \alpha \in G\} \subseteq \text{Aut}(\Delta)$; e dunque, per ipotesi induttiva, esiste almeno un vertice o un arco di Δ che sono fissati da H e dunque da G . ■

Questo risultato è solo un caso particolare di teoremi di punto fisso più generali, rinvenibili soprattutto in topologia algebrica (un albero finito può essere inteso come un complesso 1-dimensionale connesso). Esso, tuttavia, non vale per alberi infiniti: sia, ad esempio, Γ l'albero il cui insieme dei vertici è l'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi e gli archi sono le coppie di interi consecutivi, allora la traslazione $z \mapsto z + 1$ induce un automorfismo di Γ che non fissa alcun vertice e alcun arco (si veda tuttavia l'esercizio 5.13).

Esercizio 5.11. Si provi che i grafi di Kneser (sezione 1.4) sono vertex-transitivi. In particolare, il grafo di Petersen è vertex-transitivo. Quindi si costruisca un grafo cubico che non sia vertex-transitivo, e si cerchi di farlo con il minor numero possibile di vertici.

Esercizio 5.12. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo edge-transitivo privo di vertici isolati. Si provi che se Γ non è vertex-transitivo, allora $\text{Aut}(\Gamma)$ ha esattamente due orbite su V , e che tali orbite costituiscono una bipartizione per Γ .

Esercizio 5.13. Sia Γ un albero infinito. Si provi che ogni sottogruppo finito di $\text{Aut}(\Gamma)$ ha almeno un vertice od un arco fisso.

Esercizio 5.14. Si costruisca un albero finito (con almeno un arco) il cui gruppo degli automorfismi è banale (cioè costituito dalla sola identità). Si dica se è possibile costruire alberi con tale proprietà con un numero arbitrariamente grande di vertici.

5.4 Grafi di Cayley.

I grafi di Cayley costituiscono un'importante classe di grafi regolari (e anche, come vedremo, vertex-transitivi) la cui costruzione avviene a partire da un gruppo,

Sia G un gruppo, e sia S un sottoinsieme di G con le seguenti proprietà

$$(C1) \quad 1_G \notin S;$$

$$(C2) \quad S = S^{-1}.$$

Il **Grafo di Cayley** $\Gamma[G, S]$ è il grafo il cui insieme dei vertici è G , e gli archi sono tutti i sottoinsiemi $\{g, gs\}$, al variare di $g \in G$ ed $s \in S$.

Si osservi che la condizione (C1) su S serve a far sì che $g \neq gs$, per ogni $g \in G$ ed $s \in S$, mentre la condizione (C2) serve a rendere simmetrica la relazione di adiacenza, poiché infatti $\{g, gs\} = \{gs, (gs)s^{-1}\}$.

Di fatto, se S è un sottoinsieme del gruppo G che non contiene 1_G , daremo significato anche alla notazione $\Gamma[G, S]$, intendendo con ciò il grafo di Cayley definito da $S \cup S^{-1}$.

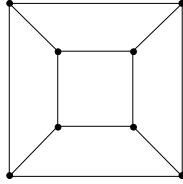
Prima di fare qualche esempio, ricordiamo che se X è un sottoinsieme di un gruppo G , il *sottogruppo generato* da X , che denotiamo con $\langle X \rangle$, è il minimo sottogruppo di G che contiene X . Si vede facilmente che, se $X \neq \emptyset$, allora $\langle X \rangle$ consiste di tutti e soli i prodotti finiti del tipo $x_1^{\epsilon_1} \cdots x_t^{\epsilon_t}$, con $x_i \in X$ e $\epsilon_i \in \{+1, -1\}$, per $i = 1, \dots, t$ (con t che varia in \mathbb{N}). Nel caso

in cui X soddisfi la condizione (C2), allora non è necessario introdurre gli inversi mediante la scelta di $i = -1$, e si ha

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_t \mid t \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_t \in X\}.$$

(dove diamo significato anche al prodotto di lunghezza $t = 0$, che è 1_G). In questa situazione è conveniente anche introdurre il concetto di lunghezza (o *peso*) $\ell_X(g)$ di un elemento $g \in \langle X \rangle$; essa è il minimo $t \geq 0$ tale che g si scrive come un prodotto di t elementi di X . In particolare, $\ell_X(g) \Leftrightarrow g = 1_G$ e $\ell_X(g) \Leftrightarrow g \in X$.

Esempi. 1) Sia G il gruppo delle simmetrie di un quadrato; allora $|G| = 8$ e $G = \langle \rho, \tau \rangle$, dove ρ è una rotazione di un angolo di $\pi/2$ e τ la una riflessione con asse una delle diagonali; si ha $|\rho| = 4$, $|\tau| = 2$ e, come si verifica subito, $\tau\rho\tau = \rho^{-1}$ (di fatto, G è isomorfo al gruppo diedrale di ordine 8). Posto $S = \{\rho, \rho^{-1}, \tau\}$, si trova che il grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$ è isomorfo al grafo del cubo



2) Siano $G = S_3$ il gruppo simmetrico su 3 punti, e $S = \{(12), (23)\}$; il grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$ è un 6-ciclo. Più in generale, si osserva facilmente che se x, y sono due involuzioni (cioè elementi di ordine 2) di un gruppo finito G , e $G = \langle x, y \rangle$ (in questo caso un semplice argomento mostra che G è un gruppo diedrale), allora $\Gamma[G, \{x, y\}]$ è un ciclo di lunghezza $|G|$.

3) Per $n \geq 2$ sia $G = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle$ il prodotto diretto di n gruppi ciclici di ordine 2 (in altri termini, è il gruppo additivo di uno spazio vettoriale n -dimensionale sul campo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Posto $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, il grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$ è isomorfo al n -ipercubo Q_n (esercizio 5.15).

Proposizione 5.16. *Sia G un gruppo finito ed S un sottoinsieme di G che soddisfa le condizioni (C1) e (C2); sia $|S| = k$. Allora*

- (1) $\Gamma[G, S]$ è un grafo k -regolare;
- (2) il numero di componenti connesse di $\Gamma[G, S]$ è uguale all'indice $[G : \langle S \rangle]$; in particolare, $\Gamma[G, S]$ è connesso se e solo se S è un sistema di generatori di G .

DIMOSTRAZIONE. Che $\Gamma = \Gamma[G, S]$ sia un grafo (semplice) risulta dalla costruzione. Inoltre è chiaramente k -regolare: infatti per ogni vertice $g \in G$, l'insieme dei vertici adiacenti a g è dato dai vertici gs , con $s \in S$, che, al variare di $s \in S$, sono tutti distinti (legge di cancellazione per i gruppi). Questo prova il punto (1).

Per il punto (2), poniamo $H = \langle S \rangle$. Siano $x, y \in G$ e sia $x e_1 g_1 e_2 g_2 \dots e_n y$ un cammino in Γ dal vertice x a y . Allora esistono $s_1, \dots, s_n \in S$ tali che $e_1 = \{x, xs_1\}$, $e_2 = \{xs_1, xs_1s_2\}$, e così via, sino a $e_n = \{xs_1 \cdots s_{n-1}, xs_1 \cdots s_{n-1}s_n = y\}$. Posto $h = s_1 \cdots s_n$, si ha $h \in H$ e $y = xh$, da cui $xH = yH$. Viceversa, siano $x, y \in G$ tali che $xH = yH$. Allora $y \in xH$, e quindi, per

le proprietà di S , esistono $s_1, \dots, s_n \in S$ (con $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$) tali che $y = xs_1 \cdots s_n$. Ponendo $e_1 = \{x, xs_1\}$ e, per ogni $i = 2, \dots, n$, $e_i = \{xs_1 \cdots s_{i-1}, xs_1 \cdots s_{i-1}s_i\}$, si ricava un cammino $x e_1 x s_1 \dots e_n y$ in Γ . Abbiamo quindi provato che due vertici x, y di Γ appartengono alla stessa componente connessa se e solo se $xH = yH$, il che prova il punto (2). In particolare, l'insieme dei vertici della componente connessa che contiene 1_G è costituito dagli elementi di H , e Γ è connesso se e solo se $H = G$, ovvero S è un sistema di generatori di G . ■

Osserviamo come dalla dimostrazione del punto (2) segua che se x ed y appartengono alla stessa componente connessa di $\Gamma = \Gamma[G, S]$, allora la distanza $d_\Gamma(x, y)$ coincide con la lunghezza minima $\ell_S(h)$ di un elemento $h \in \langle S \rangle$ tale che $y = xh$.

Sia G un gruppo, $\Gamma = \Gamma[G, S]$ un grafo di Cayley, e sia $g \in G$. Allora la moltiplicazione a sinistra $\lambda_g : G \rightarrow G$, definita da $x \mapsto gx$ (per ogni $x \in G$), è una biezione dell'insieme dei vertici di Γ che conserva la relazione di adiacenza; infatti, per ogni $x \in G$ e ogni $s \in S$, si ha $\lambda_g(\{x, xs\}) = \{gx, (gx)s\}$. Quindi λ_g induce un automorfismo del grafo Γ (infatti, lo si verifichi per esercizio, la posizione $g \mapsto \lambda_{g^{-1}}$ definisce un omomorfismo iniettivo del gruppo G nel gruppo $\text{Aut}(\Gamma)$). Se x, y è una coppia di vertici del grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$, ponendo $g = yx^{-1}$, si ha $\lambda_g(x) = y$. Dunque ogni grafo di Cayley è vertex-transitivo. Questa è una importante osservazione che fissiamo nella seguente proposizione.

Proposizione 5.17. *Sia G un gruppo finito ed S un sottoinsieme di G che soddisfa le condizioni (C 1) e (C 2). Allora, per ogni $g \in G$, la moltiplicazione a sinistra per g induce un automorfismo di $\Gamma = \Gamma[G, S]$, e G è isomorfo ad un sottogruppo di $\text{Aut}(\Gamma)$ che è transitivo sull'insieme dei vertici di Γ . In particolare, Γ è vertex-transitivo.*

Questa proprietà dei grafi di Cayley è molto importante. Consente di valutare il comportamento locale del grafo a partire da qualsiasi vertice ci piaccia, in particolare a partire dal vertice 1_G . Così, ad esempio, il diametro di un grafo di Cayley connesso $\Gamma = \Gamma[G, S]$ coincide con $\sup_{g \in G} d_\Gamma(1_G, g)$; per quanto osservato in precedenza, possiamo quindi affermare che, se S è un sistema di generatori di G , allora

$$\text{diam}(\Gamma[G, S]) = \sup_{g \in G} \ell_S(g). \quad (5.18)$$

Analoghe considerazioni valgono per il calibro: il calibro di un grafo di Cayley è la lunghezza minima di un ciclo non banale che inizia nel vertice 1_G , e quindi è il minimo $t \geq 3$ per cui è possibile scrivere $1_G = s_1 s_2 \cdots s_t$, con $s_i \in S$ e $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$, per $i = 1, \dots, t-1$.

Esercizio 5.15. Sia $n \geq 2$ e sia $G = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle$, il prodotto diretto di n gruppi (ciclici) di ordine 2. Posto $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, si provi che il grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$ è bipartito. Si calcoli quindi il suo diametro. Si provi infine che $\Gamma[G, S]$ è isomorfo all'iper cubo Q_n .

Esercizio 5.16. Si provi che il grafo complementare di un grafo di Cayley è un grafo di Cayley.

Esercizio 5.17. Sia $n \geq 2$, e sia $D_{2n} = \langle x, y \mid y^n = x^2 = 1, y^x = y^{-1} \rangle$ il gruppo diedrale di ordine $2n$. Posto $S = \{y, y^{-1}, x\}$, si descriva il grafo di Cayley $\Gamma[D_{2n}, S]$.

Esercizio 5.18. Si provi che il grafo di Petersen non è un grafo di Cayley. [Si usi il fatto che, a meno di isomorfismo, esistono solo due gruppi di ordine 10: il gruppo ciclico e il gruppo diedrale D_{10}]

Esempio: i grafi di Paley. La classe di grafi che approfondiamo come esempio in questo capitolo è un tipo molto particolare di grafi di Cayley.

Sia q una potenza di un numero primo, con $q \equiv 1 \pmod{4}$. Il *grafo di Paley* P_q è il grafo i cui vertici sono gli elementi del campo $GF(q)$ di ordine q , e per $x, y \in GF(q)$, $\{x, y\}$ è un arco se $x - y$ è un quadrato in $GF(q) \setminus \{0\}$. La condizione $q \equiv 1 \pmod{4}$ assicura che -1 è un quadrato in $GF(q)$, e quindi che la relazione d'adiacenza è (come deve essere) simmetrica. Naturalmente si possono dare definizioni analoghe per $q \equiv 3 \pmod{4}$, ed ottenere in tal caso grafi diretti. Qui ci limitiamo al caso semplice con $q \equiv 1 \pmod{4}$.

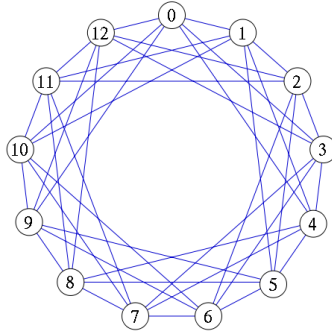


Figura 5.3: Il grafo di Paley P_{13}

Per ogni tale q , P_q è regolare ed il suo grado è il numero di quadrati non nulli nel campo $GF(q)$, che è $(q-1)/2$. Inoltre, per definizione, i grafi di Paley sono grafi di Cayley nel gruppo additivo $GF(q)$; in particolare, sono quindi grafi connessi (dato che 1 è un quadrato e genera il gruppo additivo di $GF(q)$) e vertex-transitivi. I grafi di Paley sono fortemente regolari: i parametri di P_q sono

$$\left(\frac{q-1}{2}, \frac{q-5}{4}, \frac{q-1}{4} \right). \quad (5.19)$$

Per dimostrare questo, denotiamo con \mathcal{Q} l'insieme dei quadrati non-nulli di $GF(q)$, e consideriamo il carattere su $GF(q)$ definito da, per ogni $a \in GF(q)$

$$\chi(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = 0 \\ 1 & \text{se } a \in \mathcal{Q} \\ -1 & \text{se } 0 \neq a \notin \mathcal{Q} \end{cases}$$

Poiché $|\mathcal{Q}| = (q-1)/2$, si ha immediatamente

$$\sum_{x \in GF(q)} \chi(x) = 0. \quad (5.20)$$

Inoltre, per ogni $a \in GF(q)$,

$$\sum_{x \in GF(q)} \chi(x)\chi(x+a) = \begin{cases} q-1 & \text{se } a = 0 \\ -1 & \text{se } a \neq 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Infatti, l'affermazione è chiara per $a = 0$; se $a \neq 0$, si osserva che, per $x \neq 0$, si può scrivere $\chi(x)\chi(x+a) = \chi(x)\chi(x(1+ax^{-1})) = \chi(x)\chi(x)\chi(1+ax^{-1}) = \chi(1+ax^{-1})$; quindi

$$\sum_{x \in GF(q)} \chi(x)\chi(x+a) = \sum_{x \neq 0} \chi(1+ax^{-1}) = \sum_{y \in GF(q)} \chi(y) - 1 = -1.$$

Sia A la matrice di adiacenza del grafo P_q e sia B la matrice definita da, per $x, y \in GF(q)$,

$$b_{xy} = \chi(x-y).$$

Allora,

$$B = 2A + I - J \quad (5.22)$$

(dove $I = I_q$ e $J = J_q$). Ora, da (5.19) e (5.21) si deduce, rispettivamente, che $BJ = 0 = JB$ e $B^2 = qI - J$. da (5.22), facendo i conti si ricava

$$4A^2 = (q+1)I + (q-3)J - 2B.$$

Poiché, per $x, y \in GF(q)$, il termine $(A^2)_{xy}$ indica il numero di vertici adiacenti sia a x che a y , da quest'ultima identità si deducono i valori dei parametri (5.19).

Dalla discussione fatta nella sezione 5.2 (vedi in particolare il Teorema 5.9) risulta quindi che i grafi di Paley sono conference graphs, e che gli autovalori non banali di $P - q$ sono

$$\mu_1 = \frac{-1 + \sqrt{q}}{2} \quad \mu_{q-1} = \frac{-1 - \sqrt{q}}{2} \quad (5.23)$$

ognuno con molteplicità $(q-1)/2$.

Se $q = p$ è un numero primo, P_p è un grafo circolante, ed è hamiltoniano (questo è semplice: 1 è un quadrato e genera il gruppo additivo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). In effetti, meno banalmente, ogni grafo di Paley è hamiltoniano.

Esercizio 5.19. Si provi che per ogni q , il grafo di Paley P_q è hamiltoniano. [sugg.: sia $q = p^n$ con p primo; l'insieme dei quadrati non-nulli di $GF(q)$ contiene una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ per $GF(q)$ come spazio vettoriale su $GF(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; posto $S = \{\pm x_1, \dots, \pm x_n\}$, P_q contiene come sottografo spanning il grafo di Cayley $\Gamma((GF(q), +), S)$, che è hamiltoniano.]

Un'altra interessante osservazione è contenuta nell'esercizio seguente.

Esercizio 5.20. Si provi che i grafi di Paley sono autocomplementari; ovvero isomorfi al loro grafo complementare. [sugg.: fissato $0 \neq a$ un non-quadrato in $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ si consideri l'applicazione su $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ definita da $x \mapsto ax$]

Questa proprietà dei grafi di Paley è utile in diverse considerazioni. Ad esempio, il grafo dell'esercizio 4.32 è il grafo di Paley P_{17} , ed è il grafo Γ con il massimo numero di vertici tale che né Γ né il suo grafo complementare contengono un sottografo isomorfo a K_4 (da ciò segue che il numero di Ramsey $R(4, 4)$ è uguale a 18). A noi risulterà comoda nel valutare il numero cromatico di alcuni grafi di Paley. Per prima cosa osserviamo che, per la Proposizione 5.7,

$$\chi(P_q) \geq 1 - \frac{k}{\mu_{n-1}} = 1 - \frac{q-1}{-1-\sqrt{q}} = \sqrt{q}. \quad (5.24)$$

Non è nota una formula generale che dia il valore del numero cromatico $\chi(P_q)$, nemmeno nel caso in cui q è primo. Si ha, ad esempio, $\chi(P_{17}) = 6$, mentre $\chi(P_{13}) = 5 = \chi(P_{25})$. Tuttavia, se q è un quadrato, allora in (5.24) vale l'uguaglianza. Proviamo quindi che

$$\chi(P_{q^2}) = q = \alpha(P_{q^2}). \quad (5.25)$$

Infatti, $U = GF(q)$ è costituito da quadrati nel campo $GF(q^2)$, quindi U induce un sottografo completo di P_{q^2} ; sia $\{a_1 = 0, a_2, \dots, a_q\}$ un sistema di rappresentanti delle classi laterali $GF(q) + a$ nel gruppo $(GF(q^2), +)$; allora, i traslati $U + a_1, \dots, U + a_q$ costituiscono una partizione dei vertici di P_{q^2} ed inducono ciascuno un sottografo completo. Da ciò segue che il grafo complementare ha indice di stabilità uguale a q ed ammette una q -colorazione. Poiché P_{q^2} è isomorfo al suo grafo complementare si deduce la (5.25).

Descriveremo ora, nel caso in cui $q = p$ è un numero primo, il gruppo degli automorfismi di P_p . La chiave del ragionamento è un classico risultato di Burnside (Teorema 5.18). Prima di enunciarlo, ricordo che un gruppo di permutazioni H su un insieme V si dice *2-transitivo* se per ogni $x, y, x_1, y_1 \in V$, con $x \neq y$ e $x_1 \neq y_1$, esiste $h \in H$ tale che $h(x) = x_1$, e $h(y) = y_1$. È immediato osservare che, se Γ è un grafo: *Aut*(Γ) è *transitivo sull'insieme dei vertici se e soltanto se* Γ è *completo o composto unicamente da vertici isolati*.

Teorema 5.18. (Burnside, 1901) *Sia p un numero primo, e H un gruppo di permutazioni transitivo sull'insieme V , con $|V| = p$. Allora H è 2-transitivo oppure $V = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ è H è un sottogruppo del gruppo delle affinità $AG(1, p) = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, a \neq 0\}$.*

Da questo Teorema, e dall'osservazione che lo precede, segue subito che, se p è un numero primo, $p \equiv 1 \pmod{4}$, *Aut*(P_p) è un sottogruppo di $G = AG(1, p)$. Ora, G è il prodotto semidiretto di un sottogruppo normale T di ordine p (costituito dalle traslazioni $x \mapsto x + b$) per un sottogruppo isomorfo al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Poiché *Aut*(P_p) è transitivo, p divide il suo ordine, e quindi $T \leq \text{Aut}(P_p)$. Se $\sigma : x \mapsto ax + b$ è un automorfismo di P_p , allora $a = \sigma(1) - \sigma(0)$ è un quadrato in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, e viceversa se $a \neq 0$ è un quadrato, $x \mapsto ax + b$ è un automorfismo di P_p . Dunque

$$\text{Aut}(P_p) = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, a \neq 0 \text{ è un quadrato}\}.$$

In particolare, $|\text{Aut}(P_p)| = p(p-1)/2$.

5.5 Expanders

In modo informale, con il termine *expander graphs* s'intendono grafi che siano al contempo "sparsi" e "altamente connessi". Proprio la congiunzione di questi requisiti, apparentemente poco compatibili, rende tali grafi (la cui semplice esistenza è forse già controintuitiva) interessanti e, soprattutto, estremamente utili in diversi campi di applicazione. I grafi expander sono stati introdotti da Bassalygo e Pinsker nei primi anni '70 e, da allora, oltre a rappresentare uno stimolante argomento di studio, hanno trovato impiego in diversi settori della matematica e dell'informatica teorica (combinatoria, analisi funzionale, meccanica statistica e probabilità, derandomizzazione, teoria dei codici, teoria della complessità, solo per citarne

alcuni), oltre che, nella pratica, nel disegno esplicito di algoritmi e reti con elevato grado di efficienza.

Cercheremo di dare solo un'idea introduttiva della teoria astratta dei grafi expanders: per un quadro molto più ampio e approfondito, consiglio il sostanzioso articolo di Hoory, Linial e Wigderson [?]

Parametro di espansione. Il concetto di espansione (che è alla base della teoria dei grafi expanders) ha, come già detto, motivazioni e applicazioni in diversi ambiti; a me sembra però che il senso delle definizioni che stiamo per dare possa essere meglio intuito pensando ad un grafo come allo schema di una rete che distribuisca qualcosa, che sia al contempo economica (da qui la richiesta che il grafo sia sparso) ed efficiente, cioè capace di diffondere rapidamente (alta connettività). Un grafo è sparso se il numero di archi è piccolo rispetto a quello dei vertici. Naturalmente, si tratta di una definizione generica e non formale, il cui senso si comprende meglio pensando ad una famiglia $(X_i)_{i \geq 0}$ di grafi di ordine crescente; diremo che tale famiglia è costituita da grafi sparsi se esiste una costante c tale che, per ogni $X_i = (V_i, E_i)$, $|E_i| \leq c|V_i|$. Nella costruzione delle famiglie di expanders, questo requisito è ottenuto richiedendo che i grafi della famiglia siano k -regolari, per un fissato $k \geq 2$.

Abbiamo già incontrato nozioni di "connettività" di un grafo: ad esempio (capitolo 3) come il minimo numero di archi che è necessario togliere dal grafo Γ per renderlo sconnesso. Questa misura è però ancora grossolana, può essere soggetta a perturbazioni locali, e non cattura compiutamente l'idea di capacità di diffusione. Infatti, più che assumere che occorra togliere un certo numero di archi per sconnettere il grafo in pezzi di cui non si ha alcun controllo, quello che sembra ragionevole richiedere è che per sconnettere il grafo in "pezzi grossi" occorra togliere molti più archi che per staccarne un pezzo piccolo.

Ora, se F è un sottoinsieme non vuoto dell'insieme V dei vertici del grafo Γ , gli archi che occorre togliere da Γ per staccare dal resto il sottografo indotto da F , sono chiaramente quelli che hanno un estremo in F e l'altro nel complementare $V \setminus F$. L'insieme di tali archi si chiama la *frontiera* di F , e si denota con ∂F ,

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo (non necessariamente finito). Il *parametro di espansione* di Γ è definito da

$$h(\Gamma) = \inf \left\{ \frac{|\partial F|}{\min\{|F|, |V \setminus F|\}} \mid F \subseteq V, 0 < |F| < \infty \right\}. \quad (5.26)$$

Se V è finito (che è il caso che ci interessa) si ha chiaramente

$$h(\Gamma) = \inf \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} \mid F \subseteq V, 0 < |F| \leq |V|/2 \right\}. \quad (5.27)$$

Esempi. 1) Consideriamo il grafo completo K_n (con $n \geq 3$). Se $F \neq \emptyset$ è un sottoinsieme di m vertici (quindi $1 \leq m \leq n$), allora $|\partial F| = m(n - m)$ e quindi $|\partial F|/|F| = n - m$, da cui segue che

$$h(K_n) = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ (n+1)/2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

2) Esaminiamo ora il caso del ciclo C_n ($n \geq 3$). Se $F \neq \emptyset$ è un suo sottoinsieme di vertici con $|F| \leq n/2$, allora $2 \leq |\partial F| \leq 2|F|$, e il valore minimo di $|\partial F|/|F|$ si ottiene prendendo

come F un insieme di $\lfloor n/2 \rfloor$ vertici consecutivi. Si ha dunque

$$h(C_n) = \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} = \begin{cases} 4/n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 4/(n-1) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

3) Un esempio un po' più elaborato, ma sostanzialmente della stessa natura del precedente, è quello di una griglia quadrata. Fissato $n \geq 2$, sia $V_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'insieme dei vertici, e ogni vertice (a, b) sia adiacente ai vertici $(a \pm 1, b)$ e $(a, b \pm 1)$ (ovviamente, la somma è modulo n). Il grafo che si ottiene, che denotiamo con X_n è 4-regolare, e può essere rappresentato come l'insieme di punti e archi in un reticolo quadrato di lato n , con gli ovvi archi aggiuntivi sul perimetro. Supponiamo, per semplicità, che n sia pari, e consideriamo l'insieme F dei vertici delle prime $n/2$ righe dal basso; quindi $F = \{(a, b) \in V_n \mid 0 \leq b < n/2\}$, e $|F| = n^2/2$. I soli vertici di F che sono adiacenti a qualche vertice del suo complementare sono quelli appartenenti alle due righe esterne di F , ed ognuno è incidente ad un solo arco che esce da F ; quindi $|\partial F| = 2n$. Dunque

$$h(X_n) \leq \frac{|\partial F|}{|F|} = \frac{2n}{n^2/2} = \frac{4}{n},$$

e, in particolare, $\lim_{n \rightarrow \infty} |h(X_n)| = 0$.

Teorema 5.19. *Sia Γ un grafo connesso, k -regolare, con n vertici, e sia $\mu_0 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ lo spettro della matrice di adiacenza di Γ . Allora*

$$h(\Gamma) \geq \frac{\mu_0 - \mu_1}{2} = \frac{k - \mu_1}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V, E)$ come nelle ipotesi, e sia F un sottoinsieme non-vuoto di V . Definiamo $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ponendo, per ogni $x \in V$,

$$f(x) = \begin{cases} |V| - |F| & \text{se } x \in F \\ -|F| & \text{se } x \in V \setminus F \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\sum_{x \in V} f(x) = |F|(|V| - |F|) - |V \setminus F||F| = 0,$$

e dunque (con le notazioni della sezione 5.1), $f \in \mathcal{Z}^\perp$. Inoltre

$$\langle f, f \rangle = \sum_{x \in V} f(x)^2 = (|V| - |F|)^2 |F| + |F|^2 (|V| - |F|) = |V||F|(|V| - |F|). \quad (5.28)$$

Fissato un orientamento di Γ , sia $\delta^* : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{E}(\Gamma)$ l'applicazione lineare definita in (5.6). Allora, per ogni $e \in E$,

$$\delta^* f(e) = f(e_+) - f(e_-) = \begin{cases} \pm |V| & \text{se } e \in \partial F \\ 0 & \text{se } e \notin \partial F \end{cases} \quad (5.29)$$

Sia $L = \delta\delta^*$ l'operatore di Laplace di Γ . Allora, tenendo conto di (5.29)

$$\langle Lf, f \rangle = \langle \delta^* f, \delta^* f \rangle = \sum_{e \in E} (\delta^* f(e))^2 = |V|^2 |\partial F|.$$

Applicando ora la Proposizione 5.6, si ricava

$$k - \mu_1 \leq \frac{\langle Lf, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{|V|^2 |\partial F|}{|V||F|(|V| - |F|)} = \frac{|V||\partial F|}{|F|(|V| - |F|)}. \quad (5.30)$$

Prendendo F tale che $|F| \leq |V|/2$, dalla (5.30) segue

$$\frac{|\partial F|}{|F|} \geq \frac{k - \mu_1}{2}.$$

da cui l'asserto. ■

Se Γ è un grafo connesso (e finito), il numero reale $k - \mu_1$ (o, più in generale, senza assunzione di regolarità, $\mu_0 - \mu_1$) è un parametro estremamente importante, e viene chiamato *intervallo spettrale principale* del grafo Γ . L'intervallo spettrale principale determina anche un limite superiore alla costante espansione di un grafo regolare. Si ha infatti il seguente risultato.

Teorema 5.20. *Sia Γ un grafo finito, connesso e k -regolare. Allora*

$$h(\Gamma) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo finito, connesso, k -regolare con n vertici. Sia $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$; diciamo che f è non-negativa se $0 \leq f(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in V$. La prima parte della dimostrazione consiste nel provare alcuni fatti relativi alle funzioni $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ non-negative. Fissiamo quindi $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, f non-negativa. Siano $b_0 < b_1 < \dots < b_r$ i valori distinti assunti da f su V , ordinati secondo l'ordine naturale. Scegliamo un'orientazione di Γ (cioè un ordinamento totale di V) in modo che per ogni $x, y \in V$ si abbia $f(x) > f(y) \Rightarrow x \geq y$ (questo è certamente possibile farlo). Poniamo

$$R_f = \sum_{e \in E} [f(e_+)^2 - f(e_-)^2].$$

Per ogni $i = 0, 1, \dots, r$ sia $F_i = \{x \in V \mid f(x) \geq b_i\}$. Il primo passo è provare la seguente uguaglianza.

$$R_f = \sum_{i=1}^r |\partial F_i| (b_i^2 - b_{i-1}^2) \quad (5.31)$$

(e $R_f = 0$ se f è una costante). Denotiamo con E_f l'insieme degli archi che danno un effettivo contributo nella somma R_f , cioè (per come è stata scelta l'orientazione)

$$E_f = \{e \in E \mid f(e_+) > f(e_-)\}.$$

Quindi, per ogni $i = 0, 1, \dots, r - 1$, si ha

$$\partial F_i \setminus \partial F_{i+1} = \{e \in E_f \mid f(e_+) = b_i\} \quad \text{e} \quad \partial F_{i+1} \setminus \partial F_i = \{e \in E_f \mid f(e_-) = b_i\}$$

Dunque

$$|\partial F_i| - |\partial F_{i+1}| = |\{e \in E_f \mid f(e_+) = b_i\}| - |\{e \in E_f \mid f(e_-) = b_i\}|.$$

Inoltre $\partial F_1 = \{e \in E_f \mid f(e_-) = b_0\}$ e $\partial F_r = \{e \in E_f \mid f(e_+) = b_r\}$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} R_f &= \sum_{e \in E_f} [f(e_+)^2 - f(e_-)^2] = \sum_{e \in E_f} f(e_+)^2 - \sum_{e \in E_f} f(e_-)^2 = \\ &= |\partial F_r| b_r^2 - |\partial F_1| b_0^2 + \sum_{i=1}^{r-1} (|\partial F_i| - |\partial F_{i+1}|) b_i^2 = \sum_{i=1}^r |\partial F_i| b_i^2 - \sum_{i=0}^{r-1} |\partial F_{i+1}| b_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^r |\partial F_i| b_i^2 - \sum_{i=1}^r |\partial F_i| b_{i-1}^2 = \sum_{i=1}^r |\partial F_i| (b_i^2 - b_{i-1}^2) \end{aligned}$$

e l'uguaglianza (5.31) è provata.

Il secondo passo consiste nel provare (sempre assumendo f non-negativa) che

$$R_f^2 \leq 2k \langle Lf, f \rangle \langle f, f \rangle. \quad (5.32)$$

Dove $L = kI_n - A(\Gamma)$ è l'operatore di Laplace di Γ . Infatti, applicando la formula di Cauchy-Schwartz e il fatto che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, si ha

$$\begin{aligned} R_f^2 &= \left[\sum_{e \in E} (f(e_+) - f(e_-))(f(e_+) + f(e_-)) \right]^2 \\ &\leq \sum_{e \in E} (f(e_+) - f(e_-))^2 \sum_{e \in E} (f(e_+) + f(e_-))^2 \\ &\leq 2 \langle \delta^* f, \delta^* f \rangle \sum_{e \in E} (f(e_+)^2 - f(e_-)^2) \\ &= 2 \langle Lf, f \rangle \cdot k \sum_{x \in V} f(x)^2 = 2k \langle Lf, f \rangle \langle f, f \rangle, \end{aligned}$$

e anche la (5.32) è provata.

Sia $\text{supp}(f) = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$. Nel terzo passo proviamo che, se f è non-negativa,

$$|\text{supp}(f)| \leq |V|/2 \quad \Rightarrow \quad R_f \geq h(\Gamma) \langle f, f \rangle. \quad (5.33)$$

Se f è non-negativa e $|\text{supp}(f)| \leq |V|/2$ allora, con le notazioni usate in precedenza, $b_0 = 0$, e per ogni $i = 1, \dots, r$, $|F_i| \leq |V|/2$. Quindi, per $i = 1, \dots, r$, $|\partial F_i| \geq h(\Gamma)|F_i|$. Dunque, applicando (5.31)

$$\begin{aligned} R_f &\geq h(\Gamma) \sum_{i=1}^r |F_i| (b_i^2 - b_{i-1}^2) = h(\Gamma) \left\{ |F_r| b_r^2 - |F_1| b_0^2 + \sum_{i=1}^{r-1} |F_i \setminus F_{i-1}| b_i^2 \right\} \\ &= h(\Gamma) \sum_{x \in V} f(x)^2 = h(\Gamma) \langle f, f \rangle. \end{aligned}$$

Conclusion. Sia $0 \neq g \in \mathcal{C}(\Gamma)$ un autovettore per L relativo all'autovalore $k - \mu_1$. Poiché L e $k - \mu_1$ sono reali, possiamo assumere che g sia a valori reali. Sia $U = \{x \in V \mid g(x) > 0\}$; rimpiazzando eventualmente g con $-g$, possiamo supporre $|U| \leq |V|/2$ (osserviamo che $U \neq \emptyset$ perché - vedi il commento che segue il Lemma 5.5 - $\sum_{x \in V} g(x) = 0$).

Definiamo una funzione non-negativa $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ponendo, per ogni $x \in V$, $f(x) = \max\{g(x), 0\}$. Poiché g è negativa in $V \setminus U$, per ogni $x \in U$ si ha

$$Lf(x) = kf(x) - \sum_{x \sim y \in U} f(y) = kg(x) - \sum_{x \sim y \in U} g(y) \leq$$

$$\leq kg(x) - \sum_{y \in V} g(y) = (kI_n - A)g(x) = Lg(x) = (k - \mu_1)g(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle Lf, f \rangle &= \sum_{x \in U} Lf(x)f(x) = \sum_{x \in U} Lf(x)g(x) \leq \\ &\leq (k - \mu_1) \sum_{x \in U} g(x)^2 = (k - \mu_1) \sum_{x \in U} f(x)^2 = (k - \mu_1) \langle f, f \rangle. \end{aligned}$$

e pertanto $\langle Lf, f \rangle \leq (k - \mu_1) \langle f, f \rangle$.. Applicando (5.33) e (5.32) si ricava finalmente

$$h(\Gamma) \langle f, f \rangle \leq R_f \leq \sqrt{2k \langle Lf, f \rangle \langle f, f \rangle} \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)} \langle f, f \rangle$$

da cui (poiché $\langle f, f \rangle \neq 0$) segue l'asserto del Teorema. ■

Expanders. Sia $k \geq 3$; una famiglia infinita di grafi finiti $\Gamma_n = (V_n, E_n)$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$ si dice una *famiglia di k -expanders* se

- Γ_n è k -regolare per ogni $n \geq 1$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$;
- esiste $\epsilon > 0$ tale che $h(\Gamma_n) \geq \epsilon$ per ogni $n \geq 1$.

Dato un grafo connesso e k -regolare Γ , denotiamo con $\mu_1(\Gamma)$ il massimo autovalore di $A(\Gamma)$ diverso da k . Dai Teoremi 5.19 e 5.20 segue immediatamente il seguente importante fatto.

Corollario 5.21. *Una famiglia di grafi connessi k -regolari $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$, è una famiglia di k -expanders se e solo se esiste un numero reale $\epsilon > 0$ tale che $k - \mu_1(\Gamma_n) \geq \epsilon$ per ogni $n \geq 1$.*

La costruzione esplicita di famiglie di expanders, è una questione di grande interesse, anche in considerazione delle importanti applicazioni in vari settori dell'informatica. I primi esempi di famiglie infinite di 4-expanders sono dovuti a Margulis (1973); in seguito diversi altri metodi per costruire famiglie di expanders sono stati trovati.

Si capisce che una famiglia $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ di k -expanders sarà tanto più pregiata quanto maggiore è il limite inferiore delle costanti $h(\Gamma_n)$. Si può provare che questo, asintoticamente, non può essere molto grande. Sussiste infatti il seguente risultato (che non dimostriamo).

Teorema 5.22. *Sia $k \geq 2$, e sia $\Gamma_n = (V_n, E_n)$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, una famiglia di grafi connessi, k -regolari, tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$. Allora*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_1(\Gamma_n) \geq 2\sqrt{k-1}.$$

Sia $k \geq 3$. Un grafo finito connesso e k -regolare Γ si dice un *grafo di Ramanujan* se ogni autovalore $\mu \neq \pm k$ della sua matrice di adiacenza soddisfa $\mu \leq 2\sqrt{k-1}$. Il Teorema 5.22 ci dice che le famiglie di k -expanders teoricamente più efficienti sono quelle (se esistono) costituite da grafi di Ramanujan.

Negli ultimi anni, famiglie infinite di grafi k -regolari di Ramanujan sono state costruite per $k = 3$ e $k = q + 1$ dove q è una potenza di un numero primo dispari². La costruzione esplicita di famiglie infinite di grafi di Ramanujan per un $k \geq 3$ arbitrario è ancora una questione aperta. Recentemente, è stato provato da Friedman che, per ogni $k \geq 3$ e $\epsilon > 0$, la probabilità che per un grafo connesso k -regolare Γ , $\mu_1(\Gamma) \leq 2\sqrt{k-1} + \epsilon$ (e quindi che Γ sia di Ramanujan) tende ad 1 quando il numero di vertici di Γ tende ad infinito. Sempre di recente, Kassabov, Lubotzky e Nikolov hanno dimostrato che esistono $k \geq 3$ e $\epsilon > 0$ con la proprietà che per quasi tutti i gruppi semplici finiti è possibile determinare un sistema di k generatori tale che per il grafo di Cayley corrispondente si ha $k - \mu_1 \geq \epsilon$.

5.6 Esercizi e complementi.

Esercizio 5.21. Sia Γ un grafo. Una passeggiata in Γ di lunghezza $t \geq 0$, è una successione x_0, x_1, \dots, x_t di vertici consecutivamente adiacenti. Sia A la matrice di adiacenza di Γ . Si provi che, per ogni $t \geq 0$ e ogni coppia x, y di vertici, $(A^t)_{xy}$ è uguale al numero di passeggiate di lunghezza t il cui primo e ultimo vertice sono, rispettivamente, x e y .

Esercizio 5.22. Sia Γ un grafo connesso finito e denotiamo con $\Delta(\Gamma)$ il massimo tra i gradi dei suoi vertici. Sia $A = A(\Gamma)$ la sua matrice di adiacenza. Si provi che per ogni autovalore μ di A si ha $|\mu| \leq \Delta(\Gamma)$. Si provi quindi che $\Delta(\Gamma)$ è un autovalore di A se e solo se Γ è regolare.

Esercizio 5.23. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo, e sia $\alpha : V \rightarrow V$ una permutazione dei vertici che induce un isomorfismo di Γ . Per ogni $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ sia $f^\alpha \in \mathcal{C}(\Gamma)$ definita da $f^\alpha(x) = f(\alpha^{-1}(x))$, per ogni $x \in V$. Si provi che se f è un autovettore di $A(\Gamma)$ allora f^α è autovettore relativo allo stesso autovalore.

Esercizio 5.24. Usando la tecnica della dimostrazione del Teorema 5.11 si determini lo spettro della matrice di adiacenza del grafo di Petersen.

Esercizio 5.25. Per $n \geq 2$, sia $A_n = A(Q_n)$ la matrice di adiacenza del cubo Q_n . Si provi che, per ogni $n \geq 2$, e considerato un opportuno ordinamento dei vertici di Q_{n+1} si ha

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.26. Procedendo per induzione su $n \geq 2$, si provi che gli autovalori di $A(Q_n)$ sono tutti e soli del tipo $n - 2t$, con $t \in \mathbb{N}$ e $0 \leq t \leq n$; e che la molteplicità dell'autovalore $n - 2t$ è $\binom{n}{t}$. [Si osservi che se A, M, P sono matrici quadrate con P invertibile, M diagonale e $PA = MP$, allora

$$\begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M+I & 0 \\ I & M-I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$$

(dove I è la matrice identica), e si applichi l'esercizio precedente].

²Per una trattazione accessibile del caso $k = p+1$ (p un primo dispari) si veda il testo: G. Davidoff, P. Sarnak, A. Valette, *Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs*, London Mathematical Society Student Texts 55, 2003

Esercizio 5.27. Sia Γ un grafo k -regolare e fortemente regolare. Si provi che se Γ non è connesso allora è isomorfo all'unione disgiunta di copie del grafo completo K_{k+1} .

Esercizio 5.28. Si descrivano i grafi fortemente regolare per i quali $a = k - 1$, e quelli per i quali $b = k$.

Esercizio 5.29. Quali sono i grafi bipartiti fortemente regolari?

Esercizio 5.30. Sia p un numero primo, e sia Γ un grafo fortemente regolare con p vertici. Si provi Γ è un conference graph (vedi la definizione al termine della dimostrazione del Teorema 5.9).

Esercizio 5.31. Si provi che un grafo vertex-transitivo con un numero primo di vertici è un grafo di Cayley [sugg.: usare il fatto che, se p è un primo, un sottogruppo transitivo di S_p contiene un ciclo di lunghezza p].

Esercizio 5.32. Si provi che un grafo vertex- ed edge-transitivo ma non arc-transitivo è regolare di grado pari.

Esercizio 5.33. Si provi che per ogni $n \geq 2$, l'ipercubo Q_n è arc-transitivo.

Esercizio 5.34. Si provi che un grafo circolante connesso con almeno 2 vertici è 2-connesso.

Esercizio 5.35. Si provi che ogni grafo completo bipartito $K_{n,n}$ è un grafo circolante.

Esercizio 5.36. Sia Γ un grafo circolante con n vertici. Si provi che Γ è isomorfo ad un grafo di Cayley sul gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Esercizio 5.37. Si provi che un grafo circolante connesso è hamiltoniano. [sugg.: usare l'esercizio precedente]

Esercizio 5.38. Sia Γ un albero finito e sia n il numero di vertici di grado 1 di Γ . Si provi che $Aut(\Gamma)$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo simmetrico S_n .

Esercizio 5.39. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo, $G = Aut(\Gamma)$. Per ogni vertice $x \in V$ sia $N(x) = \{y \in V \mid \{x, y\} \in E\}$ e $G_x = \{\beta \in G \mid \beta(x) = x\}$ (è un fatto standard che G_x è un sottogruppo di G). Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) Γ è arc-transitivo;
- (ii) Γ è vertex-transitivo e, per ogni $x \in V$, G_x opera transitivamente su $N(x)$.

Esercizio 5.40. Sia p un numero primo con $p \equiv 1 \pmod{4}$. Si provi che il grafo di Paley P_p è arc-transitivo.

Esercizio 5.41. Sia G un gruppo finito, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un sistema *minimale* di generatori di G , e $S = A \cup A^{-1}$. Si provi che il grado di connessione del grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$ è uguale a n .

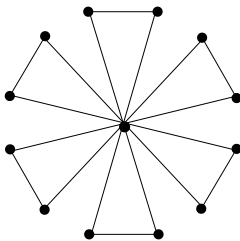
Complementi.

1. *Mulini a vento.* In inglese lo chiamano “friendship theorem”: in una società con un numero finito $n \geq 4$ di persone ed in cui ogni coppia di membri ha un unico amico in comune esiste uno ed un solo membro che è amico di tutti. Ne vediamo una dimostrazione che utilizza i grafi.

Esercizio 5.42. Sia Γ un grafo finito con n vertici in cui per ogni coppia di vertici distinti x e y esiste un unico vertice che è adiacente sia ad x che a y . Si osservi che Γ non ha quadrati; si provi quindi che se x e y sono vertici non adiacenti allora $d_\Gamma(x) = d_\Gamma(y)$. Si provi poi che se non esiste alcun vertice di grado $n - 1$ allora per ogni coppia di vertici esiste almeno un vertice che non è adiacente ad entrambi. Si concluda che Γ è regolare oppure ammette un vertice di grado $n - 1$.

Esercizio 5.43. Nelle stesse ipotesi su Γ provare, usando il metodo degli autovalori, che se Γ è regolare allora Γ è un triangolo. [studiare il quadrato della matrice di adiacenza ...]

Esercizio 5.44. Nelle stesse ipotesi su Γ dell'esercizio 5.42, si provi che se Γ ammette un elemento di grado $n - 1$, allora Γ è un grafo del tipo "mulino a vento":



2. *Il grafo di Hoffman-Singleton.* A meno di isomorfismi, esiste un unico grafo di Moore di valenza 7 e diametro 2, detto grafo di Hoffman–Singleton; tale grafo ha 50 vertici e 175 archi. Ne esistono diverse costruzioni in letteratura; nei prossimi esercizi ne vediamo una classica.

Esercizio 5.45. Sia T l'insieme delle terne (sottoinsiemi di ordine 3) di $\{1, 2, \dots, 7\}$; quindi $|T| = 35$. Si provi che se $S \subseteq T$ è tale che $|a \cap b| = 1$ per ogni $a, b \in S$, allora $|S| \leq 7$. Un sottoinsieme di ordine 7 di T con tale proprietà si chiama *settetto*; ad esempio

123 145 167 246 257 347 356.

Una *triade* in T è un insieme di tre elementi a, b, c di T tali che $a \cap b = a \cap c = b \cap c$ ha ordine 1; ad esempio è una triade: 123, 145, 167. Si provi che il numero di triadi di T è 105; si provi quindi che ogni triade è contenuta in esattamente 2 settetti. Dedurre che il numero di settetti distinti di T è 30. L'azione su $\{1, 2, \dots, 7\}$ del gruppo S_7 si estende in modo naturale ad una azione di S_7 su T , e di conseguenza sull'insieme dei settetti; si provi che tale ultima azione è transitiva.

Esercizio 5.46. Usiamo le notazioni dell'esercizio precedente. Si considera un'orbita del gruppo alterno A_7 sull'insieme dei settetti di T . Tale orbita, che denotiamo con U contiene

15 settetti. Ad esempio, fissiamo l'orbita (dove i settetti sono le colonne):

123	123	123	124	127	125	125	124	124	125	127	127	126	126	126
145	157	147	135	136	136	134	137	136	137	135	134	137	135	134
167	146	156	167	145	147	167	156	157	146	146	156	145	147	157
247	245	246	236	246	234	246	235	237	236	234	236	234	237	235
256	267	257	257	235	267	237	267	256	247	256	245	257	245	247
357	356	345	347	347	357	356	346	345	345	367	357	356	346	367
346	347	367	456	567	456	457	457	467	567	457	467	467	567	456

Definiamo quindi il grafo Γ il cui insieme dei vertici è $T \cup U$ e gli archi sono descritti dalle seguenti regole di adiacenza:

- se $a, b \in T$, $a \sim b \Leftrightarrow a \cap b = \emptyset$;
- se $a \in T$ e $\sigma \in U$, $a \sim \sigma \Leftrightarrow a \in \sigma$;
- non ci sono archi tra gli elementi di U .

(si osservi quindi, che il sottografo di Γ indotto da T è il grafo di Kneser $K(7, 3)$). Si dimostri che il grafo Γ così definito è un grafo di Moore di diametro 2 e valenza 7.

Esercizio 5.47. Si provi che il grafo di Kneser $K(7, 3)$ ha numero cromatico 3. Si deduca che il grafo di Hoffman–Singleton ha numero cromatico 4.

Esercizio 5.48. (Un'altra costruzione, dovuta a Hafner a partire da una di Robertson) In questa costruzione, l'insieme dei vertici è l'insieme delle terne: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. La relazione di adiacenza \sim è definita nel modo seguente:

- 1) $(0, x, y) \sim (0, x', y')$ se e solo se $x = x'$ e $y - y' = \pm 1$
- 2) $(1, m, c) \sim (1, m', c')$ se e solo se $m = m'$ e $c - c' = \pm 2$
- 3) $(0, x, y) \sim (1, m, c)$ se e solo se $y = mx + c$

dove i calcoli si intendono modulo 5. Si provi che il grafo così definito è 7-regolare con diametro 2, e che quindi è un grafo di Moore (per l'unicità è il grafo di Hoffman–Singleton).

Esercizio 5.49. Si provi che, per ogni $n \geq 2$, $h(Q_n) = 1$.

Esercizio 5.50. Sia P il grafo di Petersen; si provi che $h(P) = (k - \mu_1)/2$. Si verifichi che lo stesso vale per il grafo bipartito completo $K_{n,n}$ con n pari.

Esercizio 5.51. Per ogni $n \geq 2$ si determini la costante di espansione del grafo bipartito completo $K_{n,n}$. [Si distinguono i casi n pari e n dispari]

Esercizio 5.52. Sia Γ un grafo connesso 3-regolare. Si provi che $h(\Gamma) \leq 1$.