ATTIVITÀ SCIENTIFICA

Nel periodo seguente la laurea, mi sono occupata di problemi riguardanti la propagazione di campi elettromagnetici in guide d'onda con pareti non perfettamente conducibili o costituite di dielettrico eterogeneo (strutture per circuiti miniaturizzati, strutture per la trasmissione di onde millimetriche e submillimetriche). In particolare, nel primo lavoro, che riprende l'argomento trattato nella Tesi di laurea, si è dimostrato che, in prima approssimazione, una cavità risonante con un'unica parete debolmente assorbente, si comporta come una cavità perfetta. Nei due lavori seguenti si sono determinate condizioni sulla geometria delle guide d'onda, tali da permettere la propagazione di campi elettromagnetici di tipo trasversale. Questi tre lavori sono basati sullo studio delle soluzioni delle equazioni di Maxwell.

A partire dal 1980 ho iniziato ad occuparmi di problemi a frontiera libera per equazioni a derivate parziali di tipo parabolico. In questo ambito ho studiato alcuni modelli per fenomeni fisici che si riconducono a problemi simili al classico problema di cambiamemto di fase (problema di Stefan).
Il lavoro n. 4 riguarda un problema a fontiera libera, unidimensionale, a una fase, per un'equazione parabolica nonlineare con condizioni nonlineari sulla frontiera libera e una condizione di secondo tipo sul bordo fisso. Vengono dimostrate l'esistenza e l'unicità della soluzione tramite un argomento di punto fisso.
Nell'articolo n. 5 si e’ preso in considerazione il modello di Crank-Gupta per la diffusione dell'ossigeno in un tessuto vivente, studiando il comportamento della fontiera libera, che rappresenta il fronte di penetrazione dell'ossigeno nel tessuto, nell'ipotesi in cui l'immissione di ossigeno dalla parete esterna sia una funzione decrescente del tempo.
I lavori n. 6 e n. 10 trattano dell'esistenza, unicità e comportamento asintotico delle soluzioni per un modello a frontiera libera per la penetrazione di solventi in polimeri vetrosi. In questo modello si suppone che il polimero sia suddiviso in due regioni morfologicamente diverse separate da un'interfaccia assimilabile a una superficie di transizione di fase. Da un lato della superficie il polimero si presenta allo stato vetroso e la concentrazione del solvente è trascurabile. Dall'altra parte il polimero si trova in uno stato gelatinoso in cui il solvente può diffondere (si usa il semplice schema della legge di Fick per descrivere questo processo di diffusione). La superficie di separazione tra le due fasi si muove in accordo a una legge cinetica che fa intervenire il valore della concentrazione vicino alla frontiera. Nel primo
lavoro si considera il caso di un polimero in contatto con un serbatoio contenente una quantità finita di solvente (le condizioni sul bordo sono quindi dette "di quarto tipo"). Il lavoro n. 10 considera il caso di un polimero che sia spazialmente non omogeneo.
Il lavoro n. 7 riguarda lo studio della conduzione del calore in una regione di spessore variabile, nell'ipotesi in cui sia nota in ogni istante l'energia termica. Questo problema si riconduce allo studio di esistenza, unicità, comportamento asintotico della soluzione di un problema di Stefan per l'equazione del calore con una condizione di tipo integrale, al posto delle classiche condizioni al contorno sulla parete fissa.
L'articolo n. 8 tratta di un modello per il congelamento di un mezzo poroso saturo. Il modello è basato sulla suddivisione del mezzo in tre zone distinte: una zona occupata dalla sola acqua, una zona in cui acqua e ghiaccio coesistono in proporzioni dipendenti dalla temperatura, dalla pressione e dalle proprietà fisiche del mezzo, e una zona completamente ghiacciata. Le equazioni differenziali che descrivono il processo sono ottenute dal bilancio di massa ed energia, a cui vengono aggiunte alcune leggi fisiche (in particolare Darcy e Clapeyron). La lentezza del processo di congelamento giustifica l'uso di un modello quasi stazionario, che permette di determinare, mediante formule esplicite, la posizione delle due superfici di separazione tra le zone considerate, la velocità dell'acqua attraverso la zona parzialmente ghiacciata, e la localizzazione di lenti di ghiaccio che si possono formare durante il processo.
Nell'articolo n. 9 si considera un problema di combustione lenta (ossidazione), modellizzato tramite

una frontiera mobile di reazione chimica. Le equazioni che reggono questo modello sono fondamentalmente le stesse di quelle che descrivono la penetrazione di solventi nei polimeri. Il problema particolare studiato e' quello di dimostrare la validità matematica di una approssimazione del modello ottenuta formalmente ponendo uguale a zero la porosità del materiale (indicata con (nel lavoro). Assumendo questa approssimazione la frontiera libera diventa la soluzione di un'equazione differenziale ordinaria. Si dimostra che la differenza tra la frontiera ottenuta tramite questa approssimazione e la frontiera libera del problema parabolico è di ordine (.

Nel lavoro n. 11 si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema a frontiera libera derivato da un modello di origine biologica, per lo studio della fecondazione negli echinodermi. Anche in questo caso le condizioni di frontiera libera sono di tipo non standard e abbastanza simili al modello per la penetrazione di solventi nei polimeri. Qui inoltre è presente un termine di convezione nell'equazione della diffusione e la velocità di convezione è proprio la velocità (a priori ncognita) della frontiera libera. Si dimostra anche che la frontiera è convessa.

I lavori n. 12, 13 e 14 riguardano un modello per la fabbricazione delle bronzine, mediante un processo di colata continua, che consiste nel colare bronzo fuso su una barra d'acciaio in moto a velocità costante, e nel raffreddarla finche il bronzo non si è solidificato. Nel primo dei due lavori, viene determinata la distribuzione spaziale della temperatura in ciascun metallo, in corrispondenza a diversi valori della velocità della barra, usando un modello stazionario semplificato per la media delle temperature sulle sezioni trasversali dei due distinti metalli. Nel n. 14, lo studio di due diversi modelli matematici, usati per descrivere il processo di cambiamento di fase nel bronzo, ci ha permesso di determinare una stima della lunghezza della zona di solidificazione, dipendente dallo spessore della bronzina e dalla sua velocità. Il n. 13 contiene i risultati presentati al convegno ECMI IV, contenuti nei lavori 12 e 14.

Gli articoli n. 15, 19, 21, 22 riguardano il moto di un fluido di Bingham: tale fluido, supposto incomprimibile, sottoposto ad un gradiente di pressione, si muove come un sistema rigido se lo sforzo di taglio non raggiunge un certo valore di soglia caratteristico del mezzo, o come un fluido viscoso nel caso in cui questo valore venga superato. Il modello consiste nel considerare una regione viscosa separata dalla zona rigida per mezzo di una frontiera libera. L'equazione di Navier-Stokes descrive la velocità del fluido nella zona viscosa, mentre le condizioni sulla frontiera libera sono fornite da una condizione di non deformazione e dall'equazione dei moti rigidi. Nel lavoro n.15, si studia il flusso tra due piani paralleli: con l'ipotesi di moto laminare, il problema per l'accelerazione del fluido si riduce a un problema di Stefan, per la cui soluzione vengono determinate esistenza, unicità e comportamento asintotico. Nel n.19 e nel n.21 si studia il flusso laminare e tangenziale tra due cilindri concentrici.Partendo da un modello in cui esistono una zona fluida ed una zona solida, abbiamo studiato la possibile formazione di nuove zone rigide all'interno del fluido. Per descrivere questo fenomeno, si è introdotta una sorta di "regolarizzazione" del problema che interviene ogni volta che lo sforzo di taglio raggiunge il valore di soglia: il problema viene riformulato, definendo nuove frontiere libere che separano il fluido dalla nuova regione solida che si è formata. Il lavoro n. 22 riguarda il flusso unidimensionale di un fluido di Bingham in contatto con un fluido viscoso: in particolare si studia il comportamento asintotico della soluzione in relazione al comportamento dei dati.

Il lavoro n. 16 riguarda un modello per la crescita delle alghe nell'acqua di mare. In questo modello si considera una famiglia di phytoplankton che si sviluppa in un tubo, collocato in posizione verticale, riempito di acqua di mare, sotto l'effetto della luce proveniente dall'alto e della presenza nell'acqua di un nutriente (per esempio fosforo). Il nutriente diffonde nell' acqua e viene assorbito, secondo una legge assegnata, dalle alghe che si suppongono ferme finché sono in vita. Dopo la morte, le alghe si decompongono, restituendo alla soluzione una parte di nutriente, e cadono verso il fondo, dove si accumulano. Le leggi di conservazione per il nutriente e per la biomassa forniscono le equazioni che schematizzano il modello. Per il caso stazionario si dimostrano l'esistenza, l'unicità della soluzione e la dipendenza continua dall'altezza del cilindro. Inoltre si studia la

variazione del fondo del cilindro, dovuta alla sedimentazione, e si fornisce una stima del tempo al di sotto del quale questo effetto è trascurabile.
Nel lavoro n. 17 si studia il comportamento asintotico della soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione nonlineare di Fokker-Planck. Questo problema nasce da un modello per il flusso di un fluido attraverso un mezzo poroso insaturo: in questo caso la frontiera libera separa la regione bagnata da
quella asciutta. In particolare si dimostra che la soluzione del problema converge uniformemente alla soluzione del problema stazionario con gli stessi dati al bordo. Inoltre si fornisce una stima della velocità di convergenza, provando che questa è di tipo esponenziale nel caso in cui il dato al bordo sia costante. Lo studio è basato sul metodo delle sopra e sottosoluzioni.
Il problema studiato nel lavoro n. 18 nasce da un modello per la filtrazione di un fluido in un mezzo poroso, la cui porosità cambia a causa della reazione con il fluido. L'equazione per il moto del fluido e quella per la dinamica della reazione chimica, accoppiate con la legge di conservazione per la concentrazione della sostanza solubile nel fluido, costituiscono un sistema del tipo reazione-diffusione. Considerate soluzioni del tipo onde viaggianti, si dimostra esistenza e unicità (modulo traslazione) della soluzione. Inoltre, se si esegue il limite formale per il parametro (che compare nelle equazioni tendente a zero, si ottiene un problema a frontiera libera: abbiamo dimostrato che la soluzione del problema con (>0 tende alla soluzione di questo problema a frontiera libera.
Nell'articolo n. 20 si prova l'esistenza e l'unicità della soluzione classica per un problema a frontiera libera che descrive la filtrazione di un fluido in un mezzo poroso. A causa della gravità e di un gradiente di pressione, il fluido penetra nel mezzo asciutto, creando un fronte di separazione fra il mezzo asciutto e il mezzo bagnato. Inoltre il flusso provoca una deformazione del mezzo poroso che attraversa. Le equazioni che governano il modello sono la legge di Darcy per il flusso, una relazione che descrive il processo di deformazione del solido compresso dal fluido e la legge di conservazione della massa.
Gli articoli 23, 25, 27, 28 riguardano un problema di filtrazione di un fluido in un mezzo poroso incomprimibile, soggetto a deformazione: in particolare si considera il caso in cui la conduttività idraulica e la porosità dipendano dalla velocità volumetrica del fluido, immesso nel mezzo con una pressione assegnata p(0, t). Una frontiera libera separa la zona asciutta dalla zona bagnata. Il problema che si ottiene è un problema a frontiera libera per un sistema quasilineare strettamente iperbolico: la stretta iperbolicità è dovuta al fatto che la porosità si suppone che sia una funzione strettamente decrescente della velocità volumetrica. Il comportamento della soluzione è legato alla concavità della funzione p(0, t). Nel lavoro n.23 si dimostra che esiste un'unica soluzione nel caso in cui p(0, t) sia concava. Inoltre si propone un esempio in cui la pressione sul bordo ha derivata costante a tratti: nel caso di derivata crescente si ottiene una soluzione esplicita con infiniti shocks, corrispondenti dal punto di vista fisico a degenerazioni del mezzo, che partono dalla frontiera libera e viaggiano verso il bordo esterno. Nel caso di derivata decrescente la soluzione, esplicita, è continua. Il lavoro n.25 è dedicato al caso in cui la pressione sul bordo è una funzione convessa: qui si danno condizioni sufficienti per garantire l'esistenza di una soluzione continua fino ad un tempo assegnato e si studia il comportamento della soluzione dopo l'istante in cui una linea di shock ha raggiunto il bordo esterno, dimostrando in particolare un teorema di esistenza locale e unicità della soluzione dopo questo istante. Nei lavori 27 e 28 abbiamo esaminato la possibilità, verosimile da un punto di vista fisico, che la porosità sia una funzione non crescente della velocità volumetrica: i risultati, riguardanti buona posizione del problema e comportamento asintottico della soluzione, ancora tenendo conto della possibile formazione di shocks, sono stati ottenuti con metodi diversi da quelli usati nei lavori precedenti, in quanto in questo caso l'equazione iperbolica che esprime la legge di conservazione può
degenerare. Il lavoro 30) riassume i risultati ottenuti su questo argomento che sono stati presentati al Convegno SIMAI06.
Il lavoro 24 studia un modello di filtrazione in un mezzo poroso contenente granuli che assorbono acqua, variando il loro volume: di conseguenza varia la porosità del mezzo, la cui conducibilità

idraulica dipende dalla porosità stessa e dalla saturazione. Il problema è un problema a frontiera libera, con due fronti, uno di penetrazione ed uno di saturazione. Si dimostra l’esistenza di una soluzione che è unica se si assumono opportune condizioni sui dati.

Nel lavoro 26 si studiano le soluzioni tipo onda viaggiante per un problema di cristallizzazione dei polimeri. Il modello consiste in un sistema di due equazioni, l'equazione del calore, con una sorgente (presente soltanto se la temperatura ha valori in un intervallo finito) dipendente da un parametro d'ordine (a valori nell'intervallo [0,1], i cui valori estremi corrispondono alle fasi pure: 0 fase liquida, 1 fase cristallina) e l'equazione cinetica.

Nel lavoro 29 si presenta un modello generale per il processo di formazione di depositi nei greggi cerosi. La cera è presente sia disciolta nell’olio che in sospensione in fase cristallizzata, e la sua solubilità decresce con la temperatura. La presenza di un gradiente termico induce un processo di cambiamento di fase della cera oltre alla formazione di un deposito in una fase gel alla parete fredda. Il processo tiene conto di tre stadi differenti: a partire dal sistema saturo, dopo la nascita di un fronte di desaturazione che separa la zona satura dalla insatura, si arriva alla completa desaturazione del sistema.

I lavori dal 31 al 37 si occupano del modello Pescatore per la diffusione di isotopi radioattivi, basato sull’ipotesi che il potenziale chimico dell’elemento stesso, e di conseguenza il flusso totale di ciascun isotopo, siano costituiti da due componenti, una dovuta alle interazioni tra differenti isotopi A_i dello stesso elemento A (interazioni A-A), e l’altra alle interazioni degli isotopi con le molecole del solvente B (interazioni A_i-B). Nel lavoro 31 si studia il problema nel caso di N specie di isotopi, con i coefficienti di diffusione tutti diversi tra loro, provando l’esistenza e l’unicità di una soluzione classica di un sistema parabolico quasilineare con condizioni di Dirichlet, nell’ipotesi fisica che la concentrazione totale dell’elemento sia positiva e limitata. Nel lavoro 32 si assume che la componente del flusso di ciascun isotopo di tipo A_i-B sia trascurabile rispetto alla componente dovuta all’interazione A-A. Sotto questa ipotesi, il modello si riduce a un’equazione parabolica per la concentrazione totale dell’elemento A, accoppiata con equazioni iperboliche per la concentrazione dei singoli isotopi (modello iperbolico). I lavori 33 e 34, che contengono il testo di due conferenze tenute al Convegno SIMAI08, riassumono i risultati teorici dei due precedenti lavori e contengono inoltre risultati numerici. Il comportamento asintotico iniziale della soluzione del problema iperbolico, studiando l'influenza di irregolarità del dato sul comportamento iniziale delle caratteristiche è oggetto del lavoro 35, mentre il 36 e il 37 studiano il comportamento asintotico per tempi grandi.