

Compito di Matematica I

A.A.2011/2012 – C.d.L. in Chimica 16 Novembre 2011

Prof. Elena Comparini, Dott. Fabio Vlacci

Gli esercizi sono da risolvere in modo esplicito. Nelle domande lo studente è invitato a giustificare sempre la risposta

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2} \right)^{(n+1)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right),$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\log(x+3)}.$$

Si determinino:

- i)* il dominio di f ;
- ii)* le equazioni degli eventuali asintoti di f ;
- iii)* la derivata prima e la derivata seconda di f (se esistono);
- iv)* punti di massimo/minimo o di flesso per f ;
- v)* il sottoinsieme di \mathbb{R} nel quale la funzione f risulta continua;
- vi)* il sottoinsieme di \mathbb{R} nel quale la funzione f risulta derivabile.

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{e^{2x} + 3}{e^x + 1} dx.$$

Esercizio 4. Stabilire se il seguente sistema ammette soluzioni ed eventualmente determinarle:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Primo Appello - Matematica I
C.d.L. in Chimica
Prof. Elena Comparini, Dott. Fabio Vlacci
a.a. 2011/2012 - 11 gennaio 2012

Esercizio 1. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\sin x}}{1 - \cos x}$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare T

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 2x + y \\ -x + y - z \end{pmatrix}$$

Determinare l'insieme (eventualmente vuoto) dei vettori \vec{v} di \mathbb{R}^3 tali che

$$T(\vec{v}) = \vec{b}$$

$$\text{con } \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il problema proposto equivale a cercare eventuali intersezioni tra la retta di equazione

$$r \dots \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

e il piano $\gamma \dots -x + y - z - 2 = 0$?

Stabilire infine se T risulta invertibile e/o diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si studi la funzione

$$f(x) = x^2(4-x)^{1/3}$$

e se ne tracci un grafico significativo.

Calcolare inoltre l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di f e dall'asse delle ascisse.

Appello Febbraio - Matematica I
C.d.L. in Chimica
Prof. Elena Comparini, Dott. Fabio Vlacci
a.a. 2011/2012 - febbraio 2012

Esercizio 1. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x) - \ln(2-x)}{(1-x)^2}.$$

Esercizio 2. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 1|}}$$

e se ne tracci un grafico significativo.

Facoltativo: si calcoli il seguente

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx.$$

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

risulta iniettiva e/o diagonalizzabile.

Stabilire inoltre se $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si trova nello spazio immagine di A .

Compito di Matematica I

C.d.L. in Chimica

Prof. Elena Comparini, Dott. Fabio Vlacci

a.a. 2011/2012 - 28 febbraio 2012

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{1-x} - 1}{x - 1},$$

e disegnarne un grafico significativo.

Determinare in quali punti la funzione è continua e in quali è derivabile.

Facoltativo: calcolare la derivata seconda della funzione e determinare eventuali punti di flesso.

Esercizio 2. Disegnare la regione del primo quadrante del piano x, y compresa tra i grafici delle due funzioni:

$$f_1(x) = x^2 - 2x, \quad f_2(x) = 2x\sqrt{1-x}.$$

e la retta $x = 1$ e calcolarne l'area.

Esercizio 3. Si stabilisca, al variare del parametro reale $t \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità della matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ t & t & 1-t \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appello Straordinario - Matematica I

C.d.L. in Chimica

Prof. Elena Comparini, Dott. Fabio Vlacci

a.a. 2011/2012 - 17 aprile 2012

Esercizio 1. Scrivere la formula di Taylor di ordine 4 con resto di Peano in un intorno dell'origine della funzione

$$\sin^2 x - 2(1 - \cos x).$$

Determinare l'ordine di infinitesimo nell'origine.

Esercizio 2. Si studi la funzione $f(x) = x(e^x - 1)$, stabilendo se è dotata di asintoti, punti di minimo/massimo e di flesso.

Si calcoli il seguente integrale indefinito.

$$\int f(x) dx,$$

e si determini inoltre la primitiva $F(x)$ di f , tale che $F(0) = 1$.

[FACOLTATIVO] Determinare se la funzione $F(x)$ risulta invertibile nel dominio di definizione.

Esercizio 3. Dati i tre vettori di \mathbb{R}^3

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

determinare se essi costituiscono una base di \mathbb{R}^3 . Stabilire inoltre se esistono scalari α, β, γ tali che

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{z}$$

$$\text{con } \vec{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix} \text{ o } \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Compito di Matematica I

C.d.L. in Chimica

Prof. Elena Comparini, Dott. Fabio Vlacci

a.a. 2011/2012 - 19 giugno 2012

Esercizio 1. Scrivere la formula di Taylor di ordine 4 con resto di Peano in un intorno dell'origine della funzione

$$\sqrt{e^x - \sin x}.$$

Esercizio 2. Studiare la funzione

$$f(x) = x\sqrt{1 - \ln x}$$

e disegnarne un grafico significativo.

Calcolare inoltre il seguente integrale:

$$\int_1^{\sqrt{e}} f^2(x) dx.$$

Esercizio 3. Data l'applicazione lineare f :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x - 4y - 2z \\ -x + 6y - 3z \\ -3x + 8y - 8z \end{pmatrix},$$

determinare la dimensione di $\text{Ker}(f)$ e di $\text{Im}(f)$.

Stabilire inoltre se f risulta diagonalizzabile.

Appello Estivo - Matematica I

C.d.L. in Chimica

Prof. Elena Comparini, Dott. Fabio Vlacci

a.a. 2011/2012 - 17 luglio 2011

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{1+\sqrt{x}+x}$$

si determinino il dominio, gli eventuali asintoti, gli eventuali minimi e massimi e se ne disegni un grafico significativo.

Esercizio 2 Calcolare l'area della regione di piano compresa tra l'asse x , l'asse y , la retta $x = 1$ e il grafico della funzione precedente.

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

si consideri l'applicazione lineare $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$. Stabilire quindi se l'applicazione lineare così definita risulta iniettiva e/o diagonalizzabile.

Appello Autunnale - Matematica I

C.d.L. in Chimica

Prof. Elena Comparini, Prof. Fabio Vlacci

a.a. 2011/2012 -18 Settembre 2012

Esercizio 1. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$$

e se ne tracci un grafico significativo. In particolare si determinino gli eventuali asintoti e i punti di massimo e minimo.

Esercizio 2. Scrivere la formula di Taylor in un intorno di $x = 1$ della funzione

$$f(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}},$$

al terzo ordine, con resto di Peano e con resto di Lagrange.

Facoltativo: usando la formula precedente calcolare un valore approssimato di $e^{\frac{19}{200}}$ con una stima dell'errore commesso.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

risulta invertibile e/o diagonalizzabile.