Seconda prova intermedia di MATEMATICA 1
18 dicembre 2009

Fila 1

1. Sia data la seguente funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ -2x+2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Provare che f è lineare.

(b) Calcolare il nucleo di f e le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f. Dire se f è iniettiva.

(c) Determinare le matrici: $\quad {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}$ e ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$,
dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, mentre $\mathcal{B}$ è la base $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Nello spazio vettoriale $P_{\leq 2}[x]$ dei polinomi reali di grado minore o uguale a due, si consideri il sottoinsieme

$$U := \{ f(x) \in P_{\leq 2}[x] | f(-1) = 0 \}.$$

(a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $P_{\leq 2}[x]$.

(b) Trovare una base per U.

3. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando nei vari casi il numero delle soluzioni.

$$\begin{cases} \alpha x + y + 3z = 2\alpha \\ -y + z = \alpha - 2 \\ x + \alpha y = \alpha \end{cases}$$

4. Sia A la seguente matrice reale 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. Dire se A è diagonalizzabile, e, in caso affermativo, esplicitare una matrice diagonale simile ad A ed una base di autovettori associata a tale matrice.

Seconda prova intermedia di MATEMATICA 1
18 dicembre 2009

Fila 2

1. Nello spazio vettoriale $P_{\leq 2}[x]$ dei polinomi reali di grado minore o uguale a due, si consideri il sottoinsieme

$$U := \{f(x) \in P_{\leq 2}[x] | f(2) = 0\} .$$

(a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $P_{\leq 2}[x]$.

(b) Trovare una base per U.

2. Sia data la seguente funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(a) Provare che f è lineare.

(b) Calcolare il nucleo di f e le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f. Dire se f è iniettiva.

(c) Determinare le matrici: ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}$ e ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, mentre $\mathcal{B}$ è la base $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando nei vari casi il numero delle soluzioni.

$$\begin{cases} x - \alpha z = 2 + \alpha \\ y + z = -2\alpha \\ \alpha x - y + 2\alpha z = -3 \end{cases}$$

4. Sia A la seguente matrice reale 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. Dire se A è diagonalizzabile, e, in caso affermativo, esplicitare una matrice diagonale simile ad A ed una base di autovettori associata a tale matrice.

Seconda prova intermedia di MATEMATICA 1
18 dicembre 2009

Fila 3

1. Sia data la seguente funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} -2x + y \\ 4x - 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Provare che f è lineare.

(b) Calcolare il nucleo di f e le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f. Dire se f è iniettiva.

(c) Determinare le matrici: $\quad {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}$ e ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$,
dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, mentre $\mathcal{B}$ è la base $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Nello spazio vettoriale $P_{\leq 2}[x]$ dei polinomi reali di grado minore o uguale a due, si consideri il sottoinsieme

$$U := \{ f(x) \in P_{\leq 2}[x] | f(1) = 0 \} .$$

(a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $P_{\leq 2}[x]$.

(b) Trovare una base per U.

3. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando nei vari casi il numero delle soluzioni.

$$\begin{cases} -y + \alpha z = 1 - \alpha \\ x + \alpha y - 2z = -1 \\ 2x - 2\alpha^2 z = 2\alpha \end{cases}$$

4. Sia A la seguente matrice reale 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. Dire se A è diagonalizzabile, e, in caso affermativo, esplicitare una matrice diagonale simile ad A ed una base di autovettori associata a tale matrice.

Seconda prova intermedia di MATEMATICA 1
18 dicembre 2009

Fila 4

1. Nello spazio vettoriale $P_{\leq 2}[x]$ dei polinomi reali di grado minore o uguale a due, si consideri il sottoinsieme

$$U := \{f(x) \in P_{\leq 2}[x] | f(-2) = 0\}.$$

(a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $P_{\leq 2}[x]$.

(b) Trovare una base per U.

2. Sia data la seguente funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} y \\ -x - 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Provare che f è lineare.

(b) Calocare il nucleo di f e le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f. Dire se f è iniettiva.

(c) Determinare le matrici: $\quad {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}$ e ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$,
dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, mentre $\mathcal{B}$ è la base $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando nei vari casi il numero delle soluzioni.

$$\begin{cases} -x - y + \alpha z = 0 \\ -\alpha y + z = \alpha - 3 \\ x - 5y - z = 0 \end{cases}$$

4. Sia A la seguente matrice reale 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. Dire se A è diagonalizzabile, e, in caso affermativo, esplicitare una matrice diagonale simile ad A ed una base di autovettori associata a tale matrice.