Primo compito preliminare di Matematica I – FILA 1

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica 9 Novembre 2012

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

Esercizio 1. Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)}{1+i}.$$

Determinare modulo e argomento delle radici cubiche del numero trovato.

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x(e^{\sin x}-1)-x}{1-\cos\sqrt{x}}.$$

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x)=\sqrt{\frac{|x^3+1|}{x}}.$$

Determinare il dominio di f, le equazioni degli eventuali asintoti di f.
Disegnare un grafico approssimativo di f.
Facoltativo:
i) Determinare eventuali punti di massimo/minimo per f.
ii) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$x^2=\sqrt{\frac{|x^3+1|}{x}}.$$

Esercizio 4. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando in funzione di k il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} x-5y+(2k+3)t=2 \\ -x+5y-k^2t=2k \\ 3x-2z=-5 \\ (k-2)z-3t=-6 \\ 2x+5y-kz-2kt=-1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Riferito lo spazio a un SdR cartesiano ortogonale monometrico **Oxyz**, sono dati i punti $\mathbf{A}\equiv(1,0,-1)$, $\mathbf{B}\equiv(3,1,1)$, $\mathbf{C}\equiv(1,1,1)$, il piano

$$\alpha) \qquad 2x - y + 3z + 7 = 0$$

e la retta

$$r) \qquad \begin{cases} 2x + y - 2z + 3 = 0 \\ y + 2z - 6 = 0 \end{cases} .$$

Sia a la retta passante per **A** e ortogonale ad α, e sia b la retta passante per **B** e parallela a r. Si scrivano le equazioni della retta c che passa per **C** ed è complanare sia con a che con b (si ricordi che tale retta può essere espressa come intersezione tra il piano per **C** contenente a e il piano per **C** contenente b).

Primo compito preliminare di Matematica I – FILA 2

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica 9 Novembre 2012

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

Esercizio 1. Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso

$$\frac{\sqrt{3}-i}{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}.$$

Determinare modulo e argomento delle radici cubiche del numero trovato.

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin(e^x-1)+x}.$$

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{|x-1|}.$$

Determinare il dominio di f, le equazioni degli eventuali asintoti di f.
Disegnare un grafico approssimativo di f.
Facoltativo:
i) Determinare eventuali punti di massimo/minimo per f.
ii) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$e^{-x} = \frac{\sqrt{x^2+3}}{|x-1|}.$$

Esercizio 4. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando in funzione di k il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} 4x+y-z+5kt=-k^2 \\ x+5y-z+t=3 \\ (k-3)x+t=3 \\ 4x+y-z+k^2t=k-30 \\ -kx+4y-5kt=k^2 \end{cases}$$

Esercizio 5. Riferito lo spazio a un SdR cartesiano ortogonale monometrico **Oxyz**, sono dati i punti **A**$\equiv(0,1,-1)$, **B**$\equiv(1,3,1)$, **C**$\equiv(1,-1,0)$, il piano

α) $\qquad x - 2y - 3z + 5 = 0$

e la retta

r) $\qquad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad .$

Sia a la retta passante per **A** e ortogonale ad α, e sia b la retta passante per **B** e parallela a r. Si scrivano le equazioni della retta c che passa per **C** ed è complanare sia con a che con b (si ricordi che tale retta può essere espressa come intersezione tra il piano per **C** contenente a e il piano per **C** contenente b).

Primo compito preliminare di Matematica I – FILA 3

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica 9 Novembre 2012

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

Esercizio 1. Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso

$$\frac{-1}{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)(1+i)}.$$

Determinare modulo e argomento delle radici cubiche del numero trovato.

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x^5}} - \cos^2 x}{\ln\sqrt{1+\sin(x^2)}}.$$

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{|x^2-1|}}.$$

Determinare il dominio di f, le equazioni degli eventuali asintoti di f.
Disegnare un grafico approssimativo di f.
Facoltativo:
i) Determinare eventuali punti di massimo/minimo per f.
ii) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$\ln(x+1) = \sqrt{\frac{x^2+3}{|x^2-1|}}.$$

Esercizio 4. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando in funzione di k il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} x - y + z + k^2 t = 9 \\ 2x + 3z + k^2 t = 9 \\ (k-3)z + 2t = -6 \\ 2x + kz + 3kt = 3k \\ x - y + (k-2)z + 3kt = 3k \end{cases}$$

Esercizio 5. Riferito lo spazio a un SdR cartesiano ortogonale monometrico **Oxyz**, sono dati i punti **A**$\equiv(1, 0, -1)$, **B**$\equiv(3, 1, 1)$, **C**$\equiv(1, 2, 2)$, il piano

$$\alpha) \qquad 2x - y + 3z - 1 = 0$$

e la retta

$$r) \qquad \begin{cases} x + y - 3z + 9 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases} \quad .$$

Sia a la retta passante per **A** e ortogonale ad α, e sia b la retta passante per **B** e parallela a r. Si scrivano le equazioni della retta c che passa per **C** ed è complanare sia con a che con b (si ricordi che tale retta può essere espressa come intersezione tra il piano per **C** contenente a e il piano per **C** contenente b).

Primo compito preliminare di Matematica I – FILA 4

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica 9 Novembre 2012

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

Esercizio 1. Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso

$$\frac{-i}{(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)(1+i)}.$$

Determinare modulo e argomento delle radici cubiche del numero trovato.

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{e^{1-\cos x}-1}.$$

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-2}{|x+3|}.$$

Determinare il dominio di f, le equazioni degli eventuali asintoti di f.
Disegnare un grafico approssimativo di f.
Facoltativo:
i) Determinare eventuali punti di massimo/minimo per f.
ii) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$x^3 = \frac{x^2-2}{|x+3|}.$$

Esercizio 4.

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando in funzione di k il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} 2kx + y - kz + t = 2k \\ 2x + (k-1)z = 4 \\ -k^2x + 2y + 4z = 1 \\ k^2x + y - kz + t = 0 \\ 2x + 3y + 3z + t = 5 \end{cases}$$

Esercizio 5. Riferito lo spazio a un SdR cartesiano ortogonale monometrico **Oxyz**, sono dati i punti **A**$\equiv(-1,1,0)$, **B**$\equiv(1,3,1)$, **C**$\equiv(3,1,-3)$, il piano

$$\alpha) \qquad 3x + 2y - z + 4 = 0$$

e la retta

$$r) \qquad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases} .$$

Sia a la retta passante per **A** e ortogonale ad α, e sia b la retta passante per **B** e parallela a r. Si scrivano le equazioni della retta c che passa per **C** ed è complanare sia con a che con b (si ricordi che tale retta può essere espressa come intersezione tra il piano per **C** contenente a e il piano per **C** contenente b).

Secondo compito preliminare di Matematica I

– FILA 1–

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica– 20 Dicembre 2012

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

Esercizio 1. Data la fuzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}},$$

determinare dominio, eventuali asintoti, eventuali massimi e minimi locali e disegnarne il grafico.
Determinare l'insieme in cui la funzione $f(x)$ è continua e quello in cui è derivabile.
Facoltativo: calcolare la derivata seconda.

Esercizio 2. Calcolare l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione dell'esercizio precedente, l'asse x e le rette $x = 1$ e $x = 2$.

Esercizio 3. Sviluppare con la formula di Taylor al quarto ordine con resto di Peano, in un intorno di $x = 0$, la funzione

$$\ln[e^x - x - 1 + \cos(x + x^2)].$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln[e^x - x - 1 + \cos(x + x^2)]}{x - \sin x}.$$

Secondo compito preliminare di Matematica I

– FILA 2–

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica– 20 Dicembre 2012

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

Esercizio 1. Data la fuzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2},$$

determinare dominio, eventuali asintoti, eventuali massimi, minimi locali e flessi e disegnarne il grafico.
Determinare l'insieme in cui la funzione $f(x)$ è continua e quello in cui è derivabile.
Facoltativo: scrivere lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x)$ al secondo ordine con resto di Peano in un intorno di $x = 0$.

Esercizio 2. Calcolare l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione dell'esercizio precedente, l'asse x e le rette $x = 0$ e $x = 1$.

Esercizio 3. Sviluppare con la formula di Taylor al quarto ordine con resto di Peano, in un intorno di $x = 0$, la funzione

$$e^{x^2 \ln(1+x^2)} - \cos(x^2).$$

Esercizio 4. Usando lo sviluppo dell'esercizio precedente, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2 \ln(1+x^2)} - \cos(x^2)}{1 - \cos(x^2)}.$$

Secondo compito preliminare di Matematica I

– FILA 3–

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica– 20 Dicembre 2012

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

Esercizio 1. Data la fuzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{2x^2},$$

determinare dominio, eventuali asintoti, eventuali massimi e minimi locali e disegnarne il grafico.
Determinare l'insieme in cui la funzione $f(x)$ è continua e quello in cui è derivabile.
Facoltativo: calcolare la derivata seconda.

Esercizio 2. Calcolare l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione dell'esercizio precedente, l'asse x e le rette $x = 1$ e $x = \frac{1}{e}$.

Esercizio 3. Sviluppare con la formula di Taylor al quarto ordine con resto di Peano, in un intorno di $x = 0$, la funzione

$$\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x - 2.$$

Esercizio 4. Usando lo sviluppo precedente, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x - 2}{\ln\sqrt{1+x^4}}.$$

Secondo compito preliminare di Matematica I

– FILA 4–

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica– 20 Dicembre 2012

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

Esercizio 1. Data la fuzione

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x-3},$$

determinare dominio, eventuali asintoti, eventuali massimi e minimi locali e disegnarne il grafico.
Determinare l'insieme in cui la funzione $f(x)$ è continua e quello in cui è derivabile.
Facoltativo: calcolare la derivata seconda.

Esercizio 2. Calcolare l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione dell'esercizio precedente, l'asse x e le rette $x=-1$ e $x=0$.

Esercizio 3. Sviluppare con la formula di Taylor al quarto ordine con resto di Peano, in un intorno di $x=0$, la funzione

$$\sin(x^2e^{\sin(x^2)})-2+\cos x.$$

Esercizio 4. Usando lo sviluppo dell'esercizio precedente, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2e^{\sin(x^2)})-2+2\cos x}{\sin(x^2)(1-\cos x)}.$$

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN CHIMICA
SECONDA PROVA "IN ITINERE"
PER L'ESAME DI "MATEMATICA I" - 20121220

Fila "1"

Esercizio 5 (5 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni

$f(1,0,0)=(3,0,2), \quad f(0,1,0)=(-2,-1,-1), \quad f(0,0,1)=(-4,-1,-2)$.

Posto $v_1 :=(1,0,1)$, $v_2 :=(1,-1,1)$, $v_3 :=(1,1,0)$, si verifichi che $\mathcal{B} :=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^3$ e si scriva la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f})$ di f rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio 6 (5 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$f(x,y,z,t):=(2x+3y-3z, \quad 2y, \quad 3y-z, \quad -t)$.

Non è richiesta la verifica che f è effettivamente un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

Si trovi, qualora esista, una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f. Se una tale base non esiste, si spieghi perché.

Fila "2"

Esercizio 5 (5 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni

$f(1,0,0)=(-1,-1,-2), \quad f(0,1,0)=(-1,-2,-4), \quad f(0,0,1)=(0,2,3)$.

Posto $v_1 :=(0,1,1)$, $v_2 :=(-1,1,1)$, $v_3 :=(1,0,1)$, si verifichi che $\mathcal{B} :=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^3$ e si scriva la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f})$ di f rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio 6 (5 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$f(x,y,z,t):=(3x+4y-4z, \quad 3y, \quad 4y-z, \quad -t)$.

Non è richiesta la verifica che f è effettivamente un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

Si trovi, qualora esista, una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f. Se una tale base non esiste, si spieghi perché.

Fila "3"

Esercizio 5 (5 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni

$f(1,0,0)=(3,2,0), \quad f(0,1,0)=(-4,-2,-1), \quad f(0,0,1)=(-2,-1,-1)$.

Posto $v_1 :=(1,1,0)$, $v_2 :=(1,1,-1)$, $v_3 :=(1,0,1)$, si verifichi che $\mathcal{B} :=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^3$ e si scriva la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f})$ di f rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio 6 (5 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$f(x,y,z,t):=(-x, \quad 3z-y, \quad 2z, \quad 3z+2t-3y)$.

Non è richiesta la verifica che f è effettivamente un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

Si trovi, qualora esista, una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f. Se una tale base non esiste, si spieghi perché.

$\boxed{\text{Fila “4”}}$

Esercizio 5 (5 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni

$f(1,0,0){=}(-1,-2,-1), \quad f(0,1,0){=}(-1,-4,-2), \quad f(0,0,1){=}(0,3,2).$

Posto $v_1 :=(0,1,1)$, $v_2 :=(1,-1,-1)$, $v_3 :=(1,1,0)$, si verifichi che $\mathcal{B} :=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^3$ e si scriva la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{f})$ di f rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio 6 (5 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$f(x,y,z,t){:=}(-x,\quad 4z-y,\quad 3z,\quad 4z-4y+3t)\,.$

Non è richiesta la verifica che f è effettivamente un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

Si trovi, qualora esista, una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f. Se una tale base non esiste, si spieghi perché.