

## Compito di Matematica I

12 Febbraio 2013 – fila 1

A.A.2012/2013 – C.d.L. in Chimica

Prof. Elena Comparini, Prof. Marco Barlotti

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x) = \frac{x \ln x}{1 - x},$$

determinare:

(a) dominio, limiti agli estremi del dominio, eventuali minimi e massimi relativi. Disegnare il grafico.

(b) Calcolare la derivata seconda di  $f$  e determinare eventuali punti di flesso.

(c) Determinare in quali punti la funzione  $f$  è continua e in quali è derivabile. Studiare il comportamento della derivata di  $f$  in un intorno dei punti in cui la funzione non è derivabile.

**Esercizio 2.** Linearizzare la funzione  $f(x)$  dell'esercizio precedente in un intorno di  $x = e$ .

**Facoltativo:** stimare l'errore che si commette con tale approssimazione.

**Esercizio 3.** Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$f(x) = \int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

**Facoltativo:** verificare il risultato.

**Esercizio 4** (4 punti). Riferito lo spazio a un SdR cartesiano ortogonale monometrico  $\mathbf{Oxyz}$ , sono dati i punti  $\mathbf{A} \equiv (1, -1, 2)$ ,  $\mathbf{B} \equiv (2, 0, 3)$ , e  $\mathbf{C} \equiv (3, -1, 2)$ , e il piano  $\alpha$  di equazione

$$2x + y + z = 0.$$

Detto  $\beta$  il piano per  $\mathbf{B}$  ortogonale alla retta  $\mathbf{AC}$ , e detto  $\gamma$  il piano per  $\mathbf{C}$  ortogonale alla retta  $\mathbf{AB}$ , si dica (motivando la risposta) se i piani  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  appartengono a uno stesso fascio (specificando se proprio o improprio) o a una stessa stella (specificando se propria o impropria).

**Esercizio 5** (6 punti). Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata  $x$  di grado non superiore a 3, e sia  $\varphi$  l'endomorfismo di  $\mathcal{V}$  che al generico  $p(x) \in \mathcal{V}$  associa  $p(x) + p'(x)$  (dove  $p'(x)$  è la derivata formale di  $p(x)$ ).

*Non è richiesta la verifica che  $\varphi$  è effettivamente un endomorfismo di  $\mathcal{V}$ .  
Scelta a piacere una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{V}$ , si scriva la matrice di  $\varphi$  rispetto a  $\mathcal{B}$  e si trovino tutti i polinomi  $p(x) \in \mathcal{V}$  tali che*

$$\varphi(p(x)) = 3x^2 + 7.$$