UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN CHIMICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE
PER L'ESAME DI "MATEMATICA I" - 20130617
DOMANDE DI "ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA"

Avvertenze
Le pagine dell'elaborato devono essere ordinatamente numerate. ***Gli esercizi di analisi*** (dal numero 1 al numero 3) ***devono essere svolti su un foglio o su fogli diversi da quelli su cui vengono svolti gli esercizi di algebra lineare e geometria*** (numero 4 e numero 5). Sul frontespizio di *ciascun* foglio devono essere indicati il nome e il cognome del candidato, il suo numero di matricola e la "fila" ($\boxed{1}$ oppure $\boxed{2}$) di pertinenza: in caso contrario il voto della prova sarà diminuito di n punti, con $n \leq 4$ dipendente da quali indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

Fila "1"

Esercizio 4 (4 punti). Riferito lo spazio a un SdR cartesiano ortogonale **O*xyz***, sono dati i punti

$$\mathbf{A} \equiv (7,4,3)\,; \qquad \mathbf{B} \equiv (4,3,1)$$

e, in dipendenza del parametro reale k, $\qquad \mathbf{C}_k \equiv (2, k, -3)\,.$

Siano poi

α il piano di equazione $\quad x - 8y + 9z - 14 = 0\,;$

β il piano di equazione $\quad 2x - y + 3z - 4 = 0\,;$

γ il piano di equazione $\quad x + 2y - z + 2 = 0\,;$

e $\quad \delta_k$ il piano passante per $\mathbf{C}_k$ ortogonale alla retta $\mathbf{AB}$.

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k i piani α, β, γ e δ_k appartengono a una stessa stella o a uno stesso fascio di piani, specificando in funzione di k se si tratta di una stella propria o impropria e se si tratta di un fascio proprio o improprio.

Esercizio 5 (6 punti). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

$$v_1 := (1, 0, -1, 0), \quad v_2 := (0,1,1,1), \quad v_3 := (-1,0,0,1), \quad v_4 := (0,1,0,1).$$

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ siano

$$w_1 := (1, -1, 2), \quad w_2 := (0, 1, -1), \quad w_3 := (1,0,1), \quad w_4 := (1,1,0).$$

Si dica, motivando la risposta, se esiste (e se è unico) un omomorfismo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathbf{f}(v_1) = w_1\,, \quad \mathbf{f}(v_2) = w_2\,, \quad \mathbf{f}(v_3) = w_3\,, \quad \mathbf{f}(v_4) = w_4\,.$$

Se un tale omomorfismo $\mathbf{f}$ esiste, si determini una base per **Ker f** e si dica, motivando la risposta, qual è la dimensione di $\mathbf{f}(\mathbb{R}^4)$.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN CHIMICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE
PER L'ESAME DI "MATEMATICA I" - 20130617
DOMANDE DI "ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA"

Avvertenze
Le pagine dell'elaborato devono essere ordinatamente numerate. ***Gli esercizi di analisi*** (dal numero 1 al numero 3) ***devono essere svolti su un foglio o su fogli diversi da quelli su cui vengono svolti gli esercizi di algebra lineare e geometria*** (numero 4 e numero 5). Sul frontespizio di *ciascun* foglio devono essere indicati il nome e il cognome del candidato, il suo numero di matricola e la "fila" ($\boxed{1}$ oppure $\boxed{2}$) di pertinenza: in caso contrario il voto della prova sarà diminuito di n punti, con $n \leq 4$ dipendente da quali indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

Fila "2"

Esercizio 4 (4 punti). Riferito lo spazio a un SdR cartesiano ortogonale $\mathbf{O}xyz$, sono dati i punti

$$\mathbf{A} \equiv (3,7,4)\,; \qquad \mathbf{B} \equiv (1,4,3)$$

e, in dipendenza del parametro reale k, $\qquad \mathbf{C}_k \equiv (-3,2,k)\,.$

Siano poi

α il piano di equazione $\qquad 9x + y - 8z - 14 = 0\,;$

β il piano di equazione $\qquad 3x + 2y - z - 4 = 0\,;$

γ il piano di equazione $\qquad x - y - 2z - 2 = 0\,;$

e $\qquad \delta_k$ il piano passante per $\mathbf{C}_k$ ortogonale alla retta $\mathbf{AB}$.

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k i piani α, β, γ e δ_k appartengono a una stessa stella o a uno stesso fascio di piani, specificando in funzione di k se si tratta di una stella propria o impropria e se si tratta di un fascio proprio o improprio.

Esercizio 5 (6 punti). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

$$v_1 := (1,-1,0,0), \quad v_2 := (0,1,1,1), \quad v_3 := (-1,0,0,1), \quad v_4 := (0,0,1,1).$$

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ siano

$$w_1 := (1,2,-1), \quad w_2 := (0,-1,1), \quad w_3 := (1,1,0), \quad w_4 := (1,0,1).$$

Si dica, motivando la risposta, se esiste (e se è unico) un omomorfismo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathbf{f}(v_1) = w_1\,, \quad \mathbf{f}(v_2) = w_2\,, \quad \mathbf{f}(v_3) = w_3\,, \quad \mathbf{f}(v_4) = w_4\,.$$

Se un tale omomorfismo $\mathbf{f}$ esiste, si determini una base per $\mathbf{Ker}\ \mathbf{f}$ e si dica, motivando la risposta, qual è la dimensione di $\mathbf{f}(\mathbb{R}^4)$.