UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN CHIMICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE
PER L'ESAME DI "MATEMATICA I" - 20140617
DOMANDE DI "ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA"

Avvertenze
Le pagine dell'elaborato devono essere ordinatamente numerate. ***Gli esercizi di analisi*** (dal numero 1 al numero 3) ***devono essere svolti su un foglio o su fogli diversi da quelli su cui vengono svolti gli esercizi di algebra lineare e geometria*** (numero 4 e numero 5). Sul frontespizio di *ciascun* foglio devono essere indicati il nome e il cognome del candidato, il suo numero di matricola e la "fila" ($\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ o $\boxed{4}$) di pertinenza: in caso contrario il voto della prova sarà diminuito di n punti, con $n \leq 4$ dipendente da quali indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{Fila "1"}}$

Esercizio 4 (5 punti). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, siano

$$\mathbf{u}_1 := (3,\ 2,\ 0,\ 1,\ 3), \quad \mathbf{u}_2 := (4,\ 6,\ -5,\ -2,\ -1)$$

e, in dipendenza del parametro reale k,

$$\mathbf{v}_k := (0,\ -6,\ (k+5)^2,\ 6,\ (k+5)^2)\,.$$

Sia inoltre, sempre in dipendenza dello stesso parametro reale k,

$$\mathbf{w}_k := (k-1,\ k,\ 3,\ -1,\ k+2)\,.$$

Si stabilisca, motivando la risposta, per quali valori del parametro reale k il vettore $\mathbf{w}_k$ appartiene al sottospazio vettoriale $\mathbf{S}_k$ di $\mathbb{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_k$.

Esercizio 5 (5 punti). Sia $\mathbf{f}$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\mathbf{f}(x,y,z,t) := (2x - z + t,\ \ y + z - t,\ \ x + z,\ \ x - t)$$

(***non*** è richiesto di verificare che $\mathbf{f}$ è effettivamente un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$) e siano

$$\mathbf{v}_1 := (2,\ 0,\ 1,\ 1),\ \ \mathbf{v}_2 := (0,\ 1,\ 0,\ 0),\ \ \mathbf{v}_3 := (1,\ -1,\ -1,\ 0),\ \ \mathbf{v}_4 := (1,\ -1,\ 0,\ -1)\,.$$

Si verifichi che $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^4$ e si scriva la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{f}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ ($:= ((1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1))$ in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN CHIMICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE
PER L'ESAME DI "MATEMATICA I" - 20140617
DOMANDE DI "ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA"

Avvertenze

Le pagine dell'elaborato devono essere ordinatamente numerate. ***Gli esercizi di analisi*** (dal numero 1 al numero 3) ***devono essere svolti su un foglio o su fogli diversi da quelli su cui vengono svolti gli esercizi di algebra lineare e geometria*** (numero 4 e numero 5). Sul frontespizio di *ciascun* foglio devono essere indicati il nome e il cognome del candidato, il suo numero di matricola e la "fila" ($\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ o $\boxed{4}$) di pertinenza: in caso contrario il voto della prova sarà diminuito di n punti, con $n \leq 4$ dipendente da quali indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{Fila “2”}}$

Esercizio 4 (5 punti). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, siano

$$\mathbf{u}_1 := (2,\ 0,\ 1,\ 3,\ 3), \quad \mathbf{u}_2 := (6,\ -5,\ -2,\ -1,\ 4)$$

e, in dipendenza del parametro reale k,

$$\mathbf{v}_k := (-6,\ (k+5)^2,\ 6,\ (k+5)^2,\ 0)\,.$$

Sia inoltre, sempre in dipendenza dello stesso parametro reale k,

$$\mathbf{w}_k := (k,\ 3,\ -1,\ k+2,\ k-1)\,.$$

Si stabilisca, motivando la risposta, per quali valori del parametro reale k il vettore $\mathbf{w}_k$ appartiene al sottospazio vettoriale $\mathbf{S}_k$ di $\mathbb{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_k$.

Esercizio 5 (5 punti). Sia $\mathbf{f}$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\mathbf{f}(x,y,z,t) := (x+2y-t,\quad -x+z+t,\quad y+t,\quad y-x)$$

(***non*** è richiesto di verificare che $\mathbf{f}$ è effettivamente un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$) e siano

$$\mathbf{v}_1 := (1,\ -1,\ 0,\ -1), \quad \mathbf{v}_2 := (2,\ 0,\ 1,\ 1), \quad \mathbf{v}_3 := (0,\ 1,\ 0,\ 0), \quad \mathbf{v}_4 := (1,\ -1,\ -1,\ 0)\,.$$

Si verifichi che $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^4$ e si scriva la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{f}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ ($:= ((1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1))$ in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN CHIMICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE
PER L'ESAME DI "MATEMATICA I" - 20140617
DOMANDE DI "ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA"

Avvertenze
Le pagine dell'elaborato devono essere ordinatamente numerate. ***Gli esercizi di analisi*** (dal numero 1 al numero 3) ***devono essere svolti su un foglio o su fogli diversi da quelli su cui vengono svolti gli esercizi di algebra lineare e geometria*** (numero 4 e numero 5). Sul frontespizio di *ciascun* foglio devono essere indicati il nome e il cognome del candidato, il suo numero di matricola e la "fila" ($\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ o $\boxed{4}$) di pertinenza: in caso contrario il voto della prova sarà diminuito di n punti, con $n \leq 4$ dipendente da quali indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{Fila “3”}}$

Esercizio 4 (5 punti). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, siano

$$\mathbf{u}_1 := (0,\ 1,\ 3,\ 3,\ 2), \quad \mathbf{u}_2 := (-5,\ -2,\ -1,\ 4,\ 6)$$

e, in dipendenza del parametro reale k,

$$\mathbf{v}_k := ((k+5)^2,\ 6,\ (k+5)^2,\ 0,\ -6)\,.$$

Sia inoltre, sempre in dipendenza dello stesso parametro reale k,

$$\mathbf{w}_k := (3,\ -1,\ k+2,\ k-1,\ k)\,.$$

Si stabilisca, motivando la risposta, per quali valori del parametro reale k il vettore $\mathbf{w}_k$ appartiene al sottospazio vettoriale $\mathbf{S}_k$ di $\mathbb{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_k$.

Esercizio 5 (5 punti). Sia $\mathbf{f}$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\mathbf{f}(x,y,z,t) := (y+2z-x,\ \ x-y+t,\ \ x+z,\ \ z-y)$$

(***non*** è richiesto di verificare che $\mathbf{f}$ è effettivamente un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$) e siano

$$\mathbf{v}_1 := (1,\ -1,\ -1,\ 0),\ \ \mathbf{v}_2 := (1,\ -1,\ 0,\ -1),\ \ \mathbf{v}_3 := (2,\ 0,\ 1,\ 1),\ \ \mathbf{v}_4 := (0,\ 1,\ 0,\ 0)\,.$$

Si verifichi che $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^4$ e si scriva la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{f}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ ($:= ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN CHIMICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE
PER L'ESAME DI "MATEMATICA I" - 20140617
DOMANDE DI "ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA"

Avvertenze
Le pagine dell'elaborato devono essere ordinatamente numerate. ***Gli esercizi di analisi*** (dal numero 1 al numero 3) ***devono essere svolti su un foglio o su fogli diversi da quelli su cui vengono svolti gli esercizi di algebra lineare e geometria*** (numero 4 e numero 5). Sul frontespizio di *ciascun* foglio devono essere indicati il nome e il cognome del candidato, il suo numero di matricola e la "fila" ($\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ o $\boxed{4}$) di pertinenza: in caso contrario il voto della prova sarà diminuito di n punti, con $n \leq 4$ dipendente da quali indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{Fila “4”}}$

Esercizio 4 (5 punti). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, siano

$$\mathbf{u}_1 := (1,\ 3,\ 3,\ 2,\ 0), \quad \mathbf{u}_2 := (-2,\ -1,\ 4,\ 6,\ -5)$$

e, in dipendenza del parametro reale k,

$$\mathbf{v}_k := (6,\ (k+5)^2,\ 0,\ -6,\ (k+5)^2)\,.$$

Sia inoltre, sempre in dipendenza dello stesso parametro reale k,

$$\mathbf{w}_k := (-1,\ k+2,\ k-1,\ k,\ 3)\,.$$

Si stabilisca, motivando la risposta, per quali valori del parametro reale k il vettore $\mathbf{w}_k$ appartiene al sottospazio vettoriale $\mathbf{S}_k$ di $\mathbb{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_k$.

Esercizio 5 (5 punti). Sia $\mathbf{f}$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\mathbf{f}(x,y,z,t) := (z+2t-y,\ \ x+y-z,\ \ y+t,\ \ t-z)$$

(***non*** è richiesto di verificare che $\mathbf{f}$ è effettivamente un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$) e siano

$$\mathbf{v}_1 := (0,\ 1,\ 0,\ 0),\ \ \mathbf{v}_2 := (1,\ -1,\ -1,\ 0),\ \ \mathbf{v}_3 := (1,\ -1,\ 0,\ -1),\ \ \mathbf{v}_4 := (2,\ 0,\ 1,\ 1)\,.$$

Si verifichi che $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^4$ e si scriva la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{f}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ ($:= ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,\ 1))$ in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.