

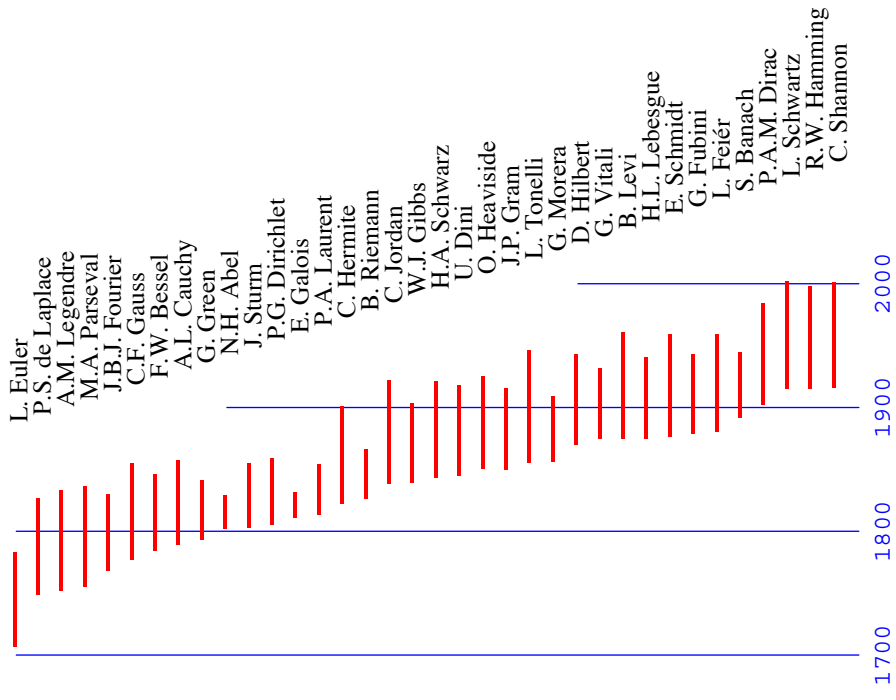
Giulio Cesare Barozzi

Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione

Sintesi dei primi 7 Capitoli

Zanichelli Editore 2001

Cronologia



1. Elementi di analisi funzionale

1.1. Spazi vettoriali

Definizione 1.1-1. Un insieme \mathbb{K} si dice un *campo* se in esso sono definite due operazioni, denominate addizione e moltiplicazione, che associano ad ogni coppia di elementi x e y di \mathbb{K} rispettivamente un elemento somma $x + y$ e un elemento prodotto xy , per cui valgono le proprietà:

$$\text{commutativa: } x + y = y + x, \quad xy = yx$$

$$\text{associativa: } x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z$$

$$\text{distributiva: } x(y + z) = xy + xz,$$

quali che siano gli elementi $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Esistono due elementi tra loro distinti, 0 e 1, che sono elementi neutri delle due operazioni:

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x$$

per ogni $x \in \mathbb{K}$.

Per ogni $x \in \mathbb{K}$ esiste un elemento *opposto* y , cioè un elemento tale che $x + y = 0$; tale elemento verrà indicato col simbolo $-x$. Per ogni $x \neq 0$ esiste un elemento *reciproco* z , cioè un elemento tale che $xz = 1$; tale elemento verrà indicato col simbolo x^{-1} oppure $1/x$.

NOTA. Una struttura in cui valgano tutte le proprietà elencate, tranne al più la proprietà commutativa del prodotto, viene chiamata *corpo*. Dunque un campo è un *corpo commutativo*, cioè un corpo in cui entrambe le operazioni sono commutative.

In ambito fisico si dà il nome di *campo vettoriale* ad un'applicazione $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $D \subseteq \mathbb{R}^3$ (si pensi al campo elettrico o al campo magnetico).

Definizione 1.1-2. Sia V un insieme (non vuoto) e \mathbb{K} un campo. Siano definite le seguenti operazioni:

a) un'addizione in V , cioè una corrispondenza che ad ogni coppia (\mathbf{x}, \mathbf{y}) di elementi di V associa un elemento di V stesso, detto somma di \mathbf{x} e \mathbf{y} e indicato $\mathbf{x} + \mathbf{y}$;

b) una moltiplicazione degli elementi di \mathbb{K} per gli elementi di V , cioè una corrispondenza che ad ogni coppia (a, \mathbf{x}) con $a \in \mathbb{K}$, $\mathbf{x} \in V$ associa un elemento di V detto prodotto di a per \mathbf{x} e indicato $a\mathbf{x}$.

Supponiamo che le operazioni a) e b) godano delle seguenti proprietà:

$$\text{a.1) } \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad (\text{commutatività});$$

$$\text{a.2) } \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \quad (\text{associatività});$$

$$\text{a.3) } \text{esiste un elemento di } V, \text{ indicato } \mathbf{0} \text{ (zero), tale che } \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \text{ per ogni } \mathbf{x} \quad (\text{esistenza dell'elemento neutro additivo});$$

$$\text{a.4) } \text{per ogni } \mathbf{x} \in V \text{ esiste un elemento } \mathbf{y} \in V \text{ tale che } \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (\text{esistenza dell'opposto});$$

$$\text{b.1) } a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y} \quad (\text{distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione tra vettori});$$

$$\text{b.2) } (a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x} \quad (\text{distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione tra scalari});$$

$$\text{b.3) } a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x};$$

$$\text{b.4) } 1\mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ (1 è l'elemento neutro moltiplicativo di } \mathbb{K}\text{)}.$$

In tali ipotesi diremo che V , con le operazioni definite, è uno *spazio vettoriale* sul campo \mathbb{K} . Gli elementi di V si dicono *vettori*, gli elementi di \mathbb{K} si dicono *scalari*.

Useremo l'abbreviazione s.v. per spazio vettoriale.

Definizione 1.1-3. Sia V uno s.v. su \mathbb{K} , W un sottoinsieme di V ; diremo che W è un *sottospazio* di V se

$$(a, b \in \mathbb{K} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W) \implies a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in W.$$

Un modo semplice per costruire un sottospazio di uno s.v. V (non necessariamente distinto da V stesso) si ottiene scegliendo un insieme di $r \geq 1$ vettori

$$A := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

e considerando l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari:

$$W := \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_r\mathbf{v}_r, a_j \in \mathbb{K}, \forall j\}.$$

Si verifica che W è effettivamente uno s.v.; si dice che esso è *generato* da A , oppure che A è un *insieme di generatori* di W , e si scrive

$$W = \langle A \rangle.$$

Se lo s.v. V ammette un insieme finito di generatori, si dice che esso è *finitamente generato*.

Definizione 1.1-4. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ dello s.v. V si dicono *linearmente indipendenti* se dall'uguaglianza

$$\mathbf{0} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_r \mathbf{v}_r$$

segue necessariamente $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$. In caso contrario essi si dicono *linearmente dipendenti*.

Anziché dire che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ sono linearmente indipendenti si dice anche che l'insieme da essi costituito è *libero*.

Definizione 1.1-5. Un insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di generatori del sottospazio W dello s.v. V si dice una *base* di W se i vettori che lo costituiscono sono linearmente indipendenti. In tal caso, per ogni $x \in W$ la rappresentazione

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

è univocamente determinata; gli scalari c_1, c_2, \dots, c_n si dicono le *coordinate* di \mathbf{x} rispetto ai vettori della base.

Proposizione 1.1-1. Se V è uno s.v. finitamente generato, allora due diverse basi sono necessariamente costituite da un ugual numero di vettori; tale numero si chiama *dimensione* di V e si indica col simbolo

$\dim V$.

Se $\dim V = n$, ogni insieme libero contiene al più n elementi.

Proposizione 1.1-2. Se V è uno s.v. di dimensione finita, allora ogni sottospazio W è di dimensione finita; si ha $\dim W \leq \dim V$, dove vale il segno di uguaglianza se e solo se $W = V$.

Vale il *teorema dell'alternativa*:

Proposizione 1.1-3. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, n vettori di uno s.v. V di dimensione n ; allora sono equivalenti le condizioni:

- i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ generano V ;
- ii) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

Siano V_1 e V_2 due s.v. sul campo \mathbb{K} .

Definizione 1.1-6. La trasformazione $f : V_1 \rightarrow V_2$ si dice *lineare* se

$$f(ax + by) = af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y})$$

per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$.

Se la trasformazione lineare f è una biiezione, cioè

$$f : V_1 \xrightarrow[\text{su}]{1-1} V_2,$$

si dice che f è un *isomorfismo* di V_1 su V_2 . In tale ipotesi anche la funzione inversa è un isomorfismo, cioè si ha

$$f^{-1} : V_2 \xrightarrow[\text{su}]{1-1} V_1.$$

Si dice che V_1 e V_2 sono *isomorfi* se esiste un isomorfismo che trasforma uno di essi nell'altro.

Proposizione 1.1-4. Lo s.v. V sul campo \mathbb{K} ha dimensione $n \geq 1$ se e solo se esso è isomorfo a \mathbb{K}^n .

1.2. Spazi vettoriali normati

Definizione 1.2-1. Sia V uno s.v. reale o complesso; si chiama *norma* una corrispondenza $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ da V a \mathbb{R} tale che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \|\mathbf{x}\| > 0; \tag{1}$$

$$\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|, \forall a \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{x} \in V; \tag{2}$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \tag{3}$$

La coppia $(V, \|\cdot\|)$ si dice *spazio vettoriale normato*, abbreviato s.v.n.

Definizione 1.2-2. Sia X insieme (non vuoto); una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice una *distanza* (o *metrica*) in X se

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y; \tag{5}$$

$$d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X; \tag{6}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X. \tag{7}$$

La coppia (X, d) si dice *spazio metrico*.

Sia V uno s.v.n.

Definizione 1.2-3. La *palla* di centro $\mathbf{x} \in V$ e raggio $r > 0$ è definita da

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in V \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}.$$

La definizione posta si estende in modo naturale a qualunque spazio metrico (X, d) :

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Una volta definita la nozione di palla, possiamo estendere ad un qualsivoglia s.v.n. le usuali nozioni topologiche. Ad esempio, dato un insieme $A \subset V$, diremo che un elemento $\mathbf{x} \in V$ è

- *interno* ad A se esiste un intorno di \mathbf{x} contenuto in A : $\exists r > 0, B_r(\mathbf{x}) \subset A$;
- *esterno* ad A se esso è interno al complementare di A .

I punti che non sono né interni né esterni si dicono *punti di frontiera* di A ; il loro insieme (che può essere vuoto) costituisce la *frontiera* (o *bordo*) di A .

Analogamente possiamo definire la nozione di *successione convergente* in uno s.v.n. Diremo che la successione (\mathbf{x}_n) converge al limite $\mathbf{x} \in V$ se una qualsivoglia palla centrata in \mathbf{x} contiene “definitivamente” i termini della stessa successione, cioè tutti i termini a partire da un certo indice (che dipenderà ovviamente dal raggio della palla considerata).

Ciò significa semplicemente che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0, \quad (8)$$

e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}, \quad \text{in } (V, \|\cdot\|).$$

Il teorema di unicità del limite sussiste in ogni s.v.n., e più in generale in ogni spazio metrico, in quanto punti distinti ammettono intornoi disgiunti: basta considerare gli intornoi di raggio inferiore alla metà della distanza tra i due punti:

$$((\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \wedge (r < d(\mathbf{x}, \mathbf{y})/2)) \implies B_r(\mathbf{x}) \cap B_r(\mathbf{y}) = \emptyset.$$

Anche la proprietà di linearità per le successioni convergenti vale in ogni s.v.n.: se (\mathbf{x}_n) converge a \mathbf{x} e (\mathbf{y}_n) converge a \mathbf{y} , per ogni coppia di scalari a e b la successione $(a\mathbf{x}_n + b\mathbf{y}_n)$ converge al limite $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$.

Definizione 1.2-4. Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme sullo s.v. V ; diremo che $\|\cdot\|_2$ è *più fine* di $\|\cdot\|_1$ se esiste una costante positiva c_2 tale che

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (9)$$

Diremo che $\|\cdot\|_1$ è *equivalente* a $\|\cdot\|_2$ se ciascuna delle due norme è più fine dell'altra.

Dunque $\|\cdot\|_1$ è equivalente a $\|\cdot\|_2$ se (e solo se) esistono due costanti positive c_1, c_2 tali che valga la (9) e la

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq c_1 \|\mathbf{x}\|_1, \quad (9')$$

per ogni $\mathbf{x} \in V$.

Proposizione 1.2-1. Se V è uno s.v. di dimensione finita, due norme qualunque definite su di esso sono equivalenti.

Definizione 1.2-5. La funzione $f : V_1 \rightarrow V_2$ si dice *continua* in $\mathbf{x}_0 \in V_1$ se

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_0) \right)$$

cioè

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_1 = 0 \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x}_0)\|_2 = 0 \right).$$

Proposizione 1.2-2. Se $(V_1, \|\cdot\|_1)$ e $(V_2, \|\cdot\|_2)$ sono s.v.n., ed $f : V_1 \rightarrow V_2$ è una trasformazione lineare, sono equivalenti le proprietà

- a) f è continua in V_1 ;
- b) f è continua in $\mathbf{0} \in V_1$;
- c) f è limitata, nel senso che esiste una costante $C > 0$ per cui si ha $\|f(\mathbf{x})\|_2 \leq C \|\mathbf{x}\|_1$ per ogni $\mathbf{x} \in V_1$.

Proposizione 1.2-3. Se V_1 e V_2 sono s.v.n. di dimensione finita, ogni trasformazione lineare $f : V_1 \rightarrow V_2$ è continua.

Definizione 1.2-6. La successione (\mathbf{x}_n) nello s.v.n. V si dice *successione di Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_ε tale che

$$\forall n, m > n_\varepsilon \implies \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon.$$

Le successioni di Cauchy vengono anche chiamate *successioni fondamentali*.



A.L. Cauchy

1789 - 1857

Definizione 1.2-7. Lo s.v.n. V si dice *completo* se le successioni di Cauchy in esso definite sono convergenti.

Gli s.v.n. completi si chiamano anche *spazi di Banach*.



S. Banach

1892 - 1945

Proposizione 1.2-4. Ogni s.v.n. di dimensione finita su \mathbb{R} o \mathbb{C} è completo, cioè uno spazio di Banach.

1.3. Spazi vettoriali con prodotto scalare

Definizione 1.3-1. Sia V uno s. v. complesso; una funzione

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

si dice un *prodotto scalare* (o *prodotto interno*) su V se verifica le proprietà:

$$a(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta a(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad (1)$$

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{a(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0. \quad (3)$$

Nel seguito indicheremo semplicemente con la notazione $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ il prodotto scalare tra \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Il prodotto scalare induce una norma ponendo

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x} | \mathbf{x})}.$$

Se V è completo rispetto alla norma considerata (dunque è uno spazio di Banach) esso viene chiamato *spazio di Hilbert*.



D. Hilbert

1870 - 1943

Vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

Proposizione 1.3-1. Per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ si ha

$$|(\mathbf{x} | \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \quad (6)$$

S'intende che la norma è indotta dal prodotto scalare.



H.A. Schwarz

1843 - 1921.

Definizione 1.3-2. Sia V uno s.v. con prodotto scalare; i vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è nullo: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff (\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$.

Vale il *teorema di Pitagora*:

Proposizione 1.3-2. Si ha

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0 \implies \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2. \quad (10)$$

Definizione 1.3-3. Sia V uno s.v. con prodotto scalare. Una famiglia di vettori non nulli $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ si dice *ortogonale* se i vettori che la compongono sono a due a due ortogonali:

$$(h \neq k) \implies (\mathbf{x}_h | \mathbf{x}_k) = 0. \quad (11)$$

Più in particolare, tale famiglia si dice *ortonormale* se

$$(\mathbf{x}_h | \mathbf{x}_k) = \delta_{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se } h = k, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (11')$$

Proposizione 1.3-3. Ogni famiglia ortogonale di vettori è libera, cioè formata da vettori linearmente indipendenti.

Proposizione 1.3-4. Se $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ è una famiglia ortogonale (rispettivamente ortogonale normale), essa genera un sottospazio di V di dimensione n :

$$V_n := \langle \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \rangle, \quad \dim V_n = n.$$

Si dirà che $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ è una *base ortogonale* (risp. *ortonormale*) di V_n .

Se $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{x}_k$ è un vettore di V_n si avrà

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\mathbf{x}_k\|^2, \tag{12}$$

e rispettivamente

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \tag{12'}$$

1.4. Proiezioni ortogonali

Definizione 1.4-1. Sia V uno s.v. con prodotto scalare, S un sottoinsieme (non necessariamente un sottospazio) di V ; chiameremo *complemento ortogonale* di S l'insieme S^\perp dei vettori di V ortogonali ad ogni elemento di S :

$$S^\perp := \{ \mathbf{x} \in V \mid (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{y} \in S \}.$$

Si dimostra che S^\perp è un sottospazio di V .

Proposizione 1.4-1. Sia V s.v. con prodotto scalare, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti, V_n il sottospazio da essi generato: $V_n := \langle \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \rangle$. Per ogni $\mathbf{x} \in V$ esiste un $\mathbf{y} \in V_n$ (ed uno solo) tale che

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \text{ con } \mathbf{z} \in V_n^\perp, \quad (1)$$

cioè $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$ è ortogonale a tutti i vettori di V_n . Diremo che \mathbf{y} è la *proiezione ortogonale* di \mathbf{x} su V_n ; per tale vettore si ha

$$\forall \mathbf{y}' \in V_n \quad (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|). \quad (2)$$

Se $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ è una famiglia ortogonale (dunque una base ortogonale di V_n), allora \mathbf{y} è dato da

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \frac{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_k)}{\|\mathbf{x}_k\|^2} \mathbf{x}_k. \quad (3)$$

Proposizione 1.4-2. Se $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, allora la matrice

$$\mathbf{G} := [(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_i)], \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

(cioè la matrice avente come termine di indici (i, j) il prodotto scalare $(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_i)$) è definita positiva, dunque è invertibile.

Proposizione 1.4-3. Sia $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti nello s.v. V con prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$; è possibile costruire una famiglia ortonormale

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

in modo tale che, per ogni indice k compreso tra 1 e n , il vettore \mathbf{e}_k sia combinazione lineare dei vettori $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$.

Il procedimento di *Gram-Schmidt* realizza quanto sopra descritto:

1. $\mathbf{e}_1 := \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\|$
2. per $k = 2, 3, \dots, n$, ripetere:
 - 2.1 $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{h=1}^{k-1} (\mathbf{x}_k | \mathbf{e}_h) \mathbf{e}_h$
 - 2.2 $\mathbf{e}_k := \mathbf{z}_k / \|\mathbf{z}_k\|$

Appendice 1-A. Campi finiti

Dati i numeri interi x e y ed un intero $m > 1$ detto *modulo*, diremo che x e y sono *congrui* modulo m , e scriveremo $x \equiv y \pmod{m}$, se $x - y$ è multiplo di m :

$$x \equiv y \pmod{m} \iff \exists q \in \mathbb{Z}, x - y = qm.$$

La congruenza modulo m è una relazione d'equivalenza; le classi di equivalenza sono precisamente m , e sono identificabili con i resti $0, 1, 2, \dots, m - 1$ che si ottengono dividendo per m un qualsivoglia intero. La classe di equivalenza di x si indica $[x]$.

Lo spazio quoziente (cioè l'insieme delle classi d'equivalenza) viene indicato in letteratura col simbolo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, che nel seguito verrà abbreviato in \mathbb{Z}_m .

Le operazioni su \mathbb{Z} possono essere trasportate su \mathbb{Z}_m ponendo

$$[x] + [y] := [x + y], \quad [x] \cdot [y] := [x \cdot y].$$

Mostriamo le tabelle di addizione e moltiplicazione in \mathbb{Z}_3 e \mathbb{Z}_4 :

$m = 3$

+	0	1	2	×	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	0	1	0	1	2
2	2	0	1	2	0	2	1

$m = 4$

+	0	1	2	3	×	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	2	3	0	1	0	1	2	3
2	2	3	0	1	2	0	2	0	2
3	3	0	1	2	3	0	3	2	1

Per ogni modulo m , l'applicazione $n \mapsto [n]$ è un *omomorfismo* (= trasformazione che conserva la struttura) dell'anello \mathbb{Z} sull'anello \mathbb{Z}_m .

Gli anelli commutativi in cui tutti gli elementi diversi da zero, cioè diversi dal neutro additivo, sono dotati di reciproco sono campi.

■ **Teorema.** \mathbb{Z}_m è un campo se e solo se m è primo.

I campi finiti vengono detti *campi di Galois*. Se il campo contiene n elementi, esso viene indicato col simbolo $\text{GF}(n)$. Dunque per ogni primo p , esiste un campo del tipo $\text{GF}(p)$, e precisamente \mathbb{Z}_p .



E. Galois

1811 - 1832

La cardinalità di un campo finito è la potenza di un primo, p^n con p primo e $n \geq 1$. Un campo avente una tale cardinalità viene indicato col simbolo $\text{GF}(p^n)$.

Per mostrare come si possa costruire un campo di cardinalità p^n è essenziale la conoscenza del campo $\text{GF}(p) = \mathbb{Z}_p$. Infatti $\text{GF}(p^n)$ viene costruito come il campo che ha come elementi i polinomi di grado $\leq n - 1$ con coefficienti prelevati in $\text{GF}(p)$.

Ad esempio, supponiamo di voler costruire un campo con $2^4 = 16$ elementi. Gli elementi di tale campo saranno polinomi di terzo grado con coefficienti prelevati in $\text{GF}(2)$, dunque polinomi del tipo $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, dove i coefficienti a_k valgono 0 oppure 1.

Ciascun polinomio è identificato dalla quaterna $(a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{Z}_2^4$, e tale quaterna può anche essere interpretata come la scrittura in base due dei naturali da zero a quindici. La tabella seguente mostra i sedici polinomi che si possono ottenere procedendo nel modo indicato.

coeff.	indice	polinomio	coeff.	indice	polinomio
0000	0	$p_0(x) = 0$	1000	8	$p_8(x) = x^3$
0001	1	$p_1(x) = 1$	1001	9	$p_9(x) = x^3 + 1$
0010	2	$p_2(x) = x$	1010	10	$p_{10}(x) = x^3 + x$
0011	3	$p_3(x) = x + 1$	1011	11	$p_{11}(x) = x^3 + x + 1$
0100	4	$p_4(x) = x^2$	1100	12	$p_{12}(x) = x^3 + x^2$
0101	5	$p_5(x) = x^2 + 1$	1101	13	$p_{13}(x) = x^3 + x^2 + 1$
0110	6	$p_6(x) = x^2 + x$	1110	14	$p_{14}(x) = x^3 + x^2 + x$
0111	7	$p_7(x) = x^2 + x + 1$	1111	15	$p_{15}(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Nell'insieme indicato l'addizione non pone alcun problema: si sommano due polinomi e si effettua la riduzione modulo 2 dei coefficienti del polinomio somma.

Ad esempio

$$p_5(x) + p_3(x) = (x^2 + 1) + (x + 1) = x^2 + x = p_6(x).$$

Per definire una moltiplicazione, occorre scegliere un polinomio di grado 4, a coefficienti in $\mathbb{GF}(2)$, che sia *irriducibile*, cioè non sia fattorizzabile nel prodotto di due polinomi di grado positivo.

Un tale polinomio, nel caso indicato, è $h(x) = x^4 + x + 1$. La nozione di polinomio irriducibile gioca, nell'anello dei polinomi, un ruolo simile a quello della nozione di numero primo nell'anello degli interi.

Per definire il prodotto di due polinomi di $\mathbb{GF}(2^4)$, si esegue il loro prodotto nel senso usuale (sempre modulo 2) e si prende il quoziente della divisione di tale prodotto per il polinomio $h(x)$.

Ad esempio, si voglia eseguire il prodotto

$$p_9(x) \cdot p_{11}(x) = (x^3 + 1)(x^3 + x + 1).$$

Il prodotto dei due polinomi indicati (modulo 2) vale $x^6 + x^4 + x + 1$. Ma la divisione di tale polinomio per $h(x)$ fornisce

$$x^6 + x^4 + x + 1 = (x^2 + 1)h(x) + x^3 + x^2,$$

dove $x^3 + x^2$ è il polinomio resto (di grado < 4). Dunque in $\mathbb{GF}(2^4)$ si ha

$$(x^3 + 1)(x^3 + x + 1) = x^3 + x^2,$$

cioè $p_9 \cdot p_{11} = p_{12}$.

L'irriducibilità di $h(x)$ garantisce che la struttura che così è stata introdotta su $\mathbb{GF}(2^4)$ lo rende un campo e non soltanto un anello commutativo con unità. In altri termini, ogni polinomio diverso da p_0 ammette reciproco, cioè per ogni indice i compreso tra 1 e 15 esiste un indice j compreso tra i medesimi estremi tale che

$$p_i(x) \cdot p_j(x) = 1 = p_1(x).$$

Appendice 1-B. Il problema lineare dei minimi quadrati

Sia A una matrice $m \times n$ a termini reali, con $m > n$, e \mathbf{b} sia un vettore di \mathbb{R}^m . Consideriamo il sistema di m equazioni lineari in n incognite

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo che le colonne di A , che indicheremo con i simboli \mathbf{a}_j , $j = 1, 2, \dots, n$, siano linearmente indipendenti e quindi il rango di A sia n , cioè uguale al numero delle colonne. Se esiste una soluzione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ del sistema (1), ciò significa che

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

dunque \mathbf{b} appartiene al sottospazio

$$V_n := \langle \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \} \rangle$$

generato dalle colonne di A .

Se \mathbf{b} è un arbitrario vettore di \mathbb{R}^m non v'è alcuna ragione perché esso appartenga allo spazio V_n , e dunque, in generale, il sistema considerato è privo di soluzioni. In altri termini, non esiste alcun $x \in \mathbb{R}^n$ per cui i *residui*

$$b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

siano tutti nulli.

Possiamo allora cercare di minimizzare la somma dei quadrati dei residui, cioè la funzione di \mathbf{x}

$$\sum_{i=1}^m \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 = \|\mathbf{b} - (x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n)\|_2^2.$$

Ciò equivale alla ricerca dell'elemento di V_n avente distanza minima da \mathbf{b} : è il problema di cui ci siamo occupati nella Proposizione 1.4-1, salvo un cambiamento di notazioni.

La matrice di Gram \mathbf{G} (↑ Prop. 1.4-2) è data da $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (dove \mathbf{A}^T indica la trasposta di \mathbf{A}): infatti gli elementi di tale matrice prodotto sono $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i$. Il vettore dei termini noti, avendo come componenti $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{b}$ (prodotto di una matrice $1 \times n$ con una matrice $n \times 1$), si scrive $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

Il sistema (4) del paragrafo 1.4 si scrive dunque

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (2)$$

(sistema delle *equazioni normali*), la cui soluzione è data formalmente da

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (3)$$

La matrice $n \times m$

$$\mathbf{A}^+ := (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T,$$

che rappresenta la trasformazione lineare che ad ogni vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ associa la “soluzione nel senso dei minimi quadrati” del sistema iniziale, si chiama *inversa generalizzata* (o *pseudo-inversa*) della matrice \mathbf{A} . Se \mathbf{A} è quadrata e invertibile, allora $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

2. Elementi di teoria dell'integrazione

2.1. Richiami sull'integrale di Riemann

Consideriamo funzioni a valori reali non negativi, definite su un intervallo compatto $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; ogni funzione a valori reali si può scrivere come differenza tra due funzioni a valori non negativi. Dire che f è integrabile nel senso di Riemann (abbreviato: R -integrabile) significa che è possibile inscrivere e circoscrivere il *trapezioido* (o *sottografico*) di f :

$$\text{trap}(f) := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in [a, b]) \wedge (0 \leq y \leq f(x)) \}$$

mediante pluri-rettangoli, unione di un numero *finito* di rettangoli con i lati paralleli agli assi coordinati, in modo che la differenza tra le aree dei pluri-rettangoli inscritti e circoscritti si possa rendere piccola ad arbitrio.



G.F.B. Riemann

1826 - 1866

Più precisamente: ad ogni scomposizione dell'intervallo base $[a, b]$ in un numero finito di parti mediante i punti

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b,$$

dove $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, possiamo associare due funzioni *costanti a tratti*:

$$f_1(x) := \begin{cases} e_k := \inf\{f(x) \mid x_{k-1} < x < x_k\}, & \text{se } x_{k-1} < x < x_k, \quad k = 1, \dots, n; \\ f(x), & \text{se } x = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

$$f_2(x) := \begin{cases} E_k := \sup\{f(x) \mid x_{k-1} < x < x_k\}, & \text{se } x_{k-1} < x < x_k, \quad k = 1, \dots, n; \\ f(x), & \text{se } x = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

che sono rispettivamente *minorante* e *maggiorante* di f :

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Gli integrali di f_1 e f_2 sono rispettivamente la *somma inferiore* e la *somma superiore* relative alla funzione f e alla scomposizione considerata: se indichiamo con la lettera σ la scomposizione (1), possiamo usare i simboli:

$$s(f; \sigma) := \int_a^b f_1(x) dx = \sum_{k=1}^n e_k(x_k - x_{k-1}),$$

$$S(f; \sigma) := \int_a^b f_2(x) dx = \sum_{k=1}^n E_k(x_k - x_{k-1}).$$

La funzione f è R -integrabile se gli insiemi numerici costituiti dalle somme inferiori e dalle somme superiori sono *contigui*, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare una somma superiore ed una somma inferiore la cui differenza è minore di ε . In tal caso l'*integrale* di f è l'elemento di separazione tra i due insiemi considerati, cioè l'unico numero per cui valga la doppia disegualianza

$$s(f; \sigma) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f; \sigma)$$

quale che sia la scomposizione σ .

2.2. La misura di Lebesgue

Chiamiamo *intervallo* (o *iper-intervallo*) in \mathbb{R}^n il prodotto cartesiano di n intervalli contenuti in \mathbb{R} :

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n];$$

la *misura* di I è definita come il prodotto delle lunghezze dei singoli intervalli $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$m(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Un *pluri-intervallo* è l'unione di una famiglia *finita o numerabile* di intervalli

$$P = \bigcup_k I_k, \quad I_k \text{ intervallo } \subset \mathbb{R}^n.$$

Nella formula scritta s'intende che l'indice k descriva una insieme finito o numerabile di indici. Ogni pluri-intervallo si può scrivere come unione di intervalli a due a due privi di punti interni in comune; in tale ipotesi la *misura* di P è definita come

$$m(P) := \sum_k m(I_k). \tag{1}$$



H.L. Lebesgue

1875 - 1941

La somma a secondo membro di (1) è convergente ad un valore positivo oppure positivamente divergente:

$$m(P) \in \overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty) \cup \{+\infty\};$$

in ogni caso tale somma non dipende dall'ordine con cui gli addendi vengono considerati, in quanto le serie a termini positivi sono “incondizionatamente regolari”, nel senso che la loro somma (finita o infinita) è invariante rispetto a permutazioni dei termini.

Se E è un qualsivoglia insieme contenuto in \mathbb{R}^n possiamo definire la sua *misura esterna* come l'estremo inferiore (finito o infinito) delle misure dei pluri-intervalli che contengono E :

$$m^*(E) := \inf_P m(P), \quad (2)$$

dove s'intende che l'estremo inferiore è considerato al variare del pluri-intervallo P nell'insieme dei pluri-intervalli che contengono E : $E \subseteq P$.

Se E è un pluri-intervallo, la sua misura esterna coincide con la misura: $m^*(P) = m(P)$.

Proposizione 2.2-1. La misura esterna dell'insieme vuoto vale 0:

$$m^*(\emptyset) = 0; \quad (3)$$

la misura esterna è monotona nel senso che

$$E_1 \subseteq E_2 \implies m^*(E_1) \leq m^*(E_2); \quad (4)$$

la misura esterna è sub-additiva, cioè

$$m^*(E_1 \cup E_2) \leq m^*(E_1) + m^*(E_2). \quad (5)$$

Definizione 2.2-1. Un insieme E di \mathbb{R}^n si dice *misurabile* se, per ogni intervallo I , si ha

$$m(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E). \quad (6)$$

Proposizione 2.2-2. La famiglia \mathcal{M} degli insiemi misurabili di \mathbb{R}^n è una σ -algebra di parti di \mathbb{R}^n contenente l'insieme vuoto, vale a dire

- i)* se E_1, E_2, \dots sono elementi di \mathcal{M} , in quantità finita o numerabile, tali sono anche la loro unione e la loro intersezione;
- ii)* se \mathcal{M} contiene un insieme E , contiene anche il suo complementare rispetto a \mathbb{R}^n .
- iii)* La misura m è σ -additiva su \mathcal{M} (= numerabilmente additiva), cioè per ogni famiglia finita o numerabile E_1, E_2, \dots di parti di \mathcal{M} , a due a due disgiunte, si ha $m(\cup_i E_i) = \sum_i m(E_i)$.

Definizione 2.2-2. Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita sull'insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^n$; diremo che essa è *misurabile* se, per ogni $a \in \mathbb{R}$; è misurabile l'insieme dei punti di E su cui f vale meno di a : $\{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) < a\}$.

Definizione 2.2-3. Si chiama *funzione semplice* una funzione misurabile che assume soltanto un numero finito di valori.

Proposizione 2.2-3. Ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ misurabile non negativa è limite di una successione crescente di funzioni semplici non negative $f_j(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Definizione 2.2-4. Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ una funzione semplice, non negativa, che assume i valori c_1, c_2, \dots, c_N sugli insiemi misurabili E_1, E_2, \dots, E_N . Se μ_k è la misura di E_k , $\mu_k := m(E_k)$, definiamo l'integrale di Lebesgue di g ponendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \sum_{k=1}^N c_k \mu_k, \quad (8)$$

con le convenzioni: $0 \cdot \infty := 0$, $c \cdot \infty := \infty$ se $c > 0$, $c + \infty = \infty + \infty := \infty$.

Sia ora f una funzione misurabile non negativa; approssimiamola (\uparrow Proposizione 2.2-3) mediante una successione crescente di funzioni semplici e non negative f_j , per le quali è stato appena definito l'integrale. Si pone

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (9)$$

Il limite a secondo membro, in quanto limite di una successione crescente in $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, esiste finito o infinito. Si può dimostrare che, se f viene approssimata in modi diversi da successioni crescenti di funzioni semplici, il limite in questione è indipendente dalla scelta della successione approssimante.

Definizione 2.2-5. Diremo che $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ è *sommabile* (= Lebesgue-integrabile, abbreviato L -integrabile) se il limite (9) sussiste finito. Se poi f non è di segno costante, si ha

$$f = f^+ - f^-;$$

si dice in tal caso che f è sommabile se tali sono f^+ e f^- e si pone

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (10)$$

2.3. L'integrale di Lebesgue

Teorema di Lebesgue (convergenza dominata):

Proposizione 2.3-1. Se la successione di funzioni sommabili $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, converge q.o. verso la funzione limite f , ed esiste una funzione sommabile $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che si abbia

$$\forall n, |f_n(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \text{q.o. su } E,$$

allora:

- a) la funzione limite f è sommabile;
- b) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Teorema di B. Levi (convergenza monotona):

Proposizione 2.3-2. Sia $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, una successione crescente di funzioni sommabili. Se esiste un numero A tale che sia

$$\int_E f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq A, \quad \forall n,$$

allora

- a) f_n tende q.o. verso una funzione sommabile f ;
- b) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$



B. Levi
1875 - 1961

Teorema di Fubini:

Proposizione 2.3-3. Sia $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Allora

- i)* per quasi ogni y la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è sommabile su \mathbb{R} ;
- ii)* la funzione $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$ è sommabile su \mathbb{R} ;
- iii)* si ha

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$



G. Fubini
1879 - 1943

Teorema di Tonelli:

Proposizione 2.3-4. Sia $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ una funzione misurabile su \mathbb{R}^2 e non negativa: $f(x, y) \geq 0$ q.o. su \mathbb{R}^2 . Se valgono le condizioni *i*) e *ii*) della proposizione precedente, allora f è sommabile su \mathbb{R}^2 .



L. Tonelli
1855 - 1946

Teorema di Lebesgue-Vitali:

Proposizione 2.3-5. La funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è R -integrabile se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è di misura nulla.

Definizione 2.3-1. La funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* su $[a, b]$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni insieme finito di sottointervalli aperti $(\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, p$, a due a due disgiunti, si abbia

$$\sum_{k=1}^p |\beta_k - \alpha_k| < \delta \implies \sum_{k=1}^p |g(\beta_k) - g(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

Proposizione 2.3-6. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è sommabile, allora la sua funzione integrale $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$ è assolutamente continua e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \text{q.o. su } [a, b].$$

Inversamente, se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assolutamente continua su $[a, b]$, allora essa è derivabile q.o. su tale intervallo e, posto $f(x) := F'(x)$, si ha

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], \quad F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

2.4. Spazi di funzioni sommabili

Sia E un insieme misurabile di \mathbb{R}^n , $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione a valori complessi. Se $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ sono la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di $f(\mathbf{x})$, dunque $f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + if_2(\mathbf{x})$, con $f_1, f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che f è *sommabile* se tali sono f_1 e f_2 e porremo

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_E f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + i \int_E f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1)$$

La funzione f è sommabile se e solo se è sommabile $|f|$. L'insieme delle funzioni sommabili $f : E \rightarrow \mathbb{C}$, munito delle consuete operazioni di addizione tra funzioni e moltiplicazione di una funzione per una costante, è uno s.v. complesso che viene indicato col simbolo $L^1(E)$.

La quantità

$$\|f\|_1 := \int_E |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \quad (2)$$

è una norma a patto di identificare funzioni quasi ovunque uguali tra loro.

Più in generale, possiamo considerare per ogni $p \geq 1$ lo spazio $L^p(E)$ costituito dalle funzioni f per cui è sommabile la funzione $|f|^p$; $L^p(E)$ è uno s.v.n. con norma

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}. \quad (3)$$

In particolare ci interessa il caso $p = 2$, cioè lo spazio delle *funzioni di quadrato sommabile* $L^2(E)$; la sua norma è generata dal prodotto scalare

$$(f | g) := \int_E f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})^* d\mathbf{x}. \quad (4)$$

Abbiamo usato l'asterisco per indicare il coniugato. Gli spazi L^p sono *completi*, dunque spazi di Banach; in particolare L^2 è uno spazio di Hilbert.

Quanto alla possibilità di definire una norma del tipo $\|\cdot\|_\infty$, dobbiamo ritoccare la definizione di *maggiorante* di una funzione, nel senso che diremo che il numero M è un maggiorante di $|f(\mathbf{x})|$ se la relazione $|f(\mathbf{x})| \leq M$ è verificata q.o. in E .

Ciò posto, possiamo definire $L^\infty(E)$ come lo spazio delle funzioni $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ che sono *limitate*, nel senso che

$$\|f\|_\infty := \sup_x |f(\mathbf{x})| < \infty.$$

Se E è un insieme di misura finita, $m(E) < \infty$, è facile stabilire le inclusioni

$$L^\infty(E) \subset L^2(E) \subset L^1(E). \quad (5)$$

Sia $f \in L^2(E)$; sfruttando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$\|f\|_1 = \int_E |f(x)| \, dx = \int_E 1 \cdot |f(x)| \, dx \leq \|1\|_2 \|f\|_2 = \sqrt{m(E)} \|f\|_2. \quad (6)$$

Supponiamo ora $f \in L^\infty(E)$; abbiamo

$$\|f\|_2^2 = \int_E |f(x)|^2 \, dx \leq \int_E \|f\|_\infty^2 \, dx = m(E) \|f\|_\infty^2,$$

da cui

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{m(E)} \|f\|_\infty. \quad (7)$$

Combinando la (6) con la (7) si ottiene

$$\|f\|_1 \leq m(E) \|f\|_\infty. \quad (8)$$

Se E è un insieme di misura infinita, $m(E) = \infty$, le inclusioni (5) non sussistono. Se E è un insieme misurabile qualsivoglia ci limitiamo ad osservare l'inclusione

$$(L^1(E) \cap L^\infty(E)) \subset L^2(E). \quad (9)$$

Infatti si ha

$$\|f\|_2^2 = \int_E |f(x)| |f(x)| \, dx \leq \|f\|_\infty \int_E |f(x)| \, dx = \|f\|_\infty \|f\|_1.$$

3. Serie di Fourier

3.1. Polinomi di Fourier

La famiglia di funzioni esponenziali $x \mapsto e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, è ortogonale nello spazio $L^2([-\pi, \pi])$, così come in un qualunque spazio $L^2([a, a + 2\pi])$.

Per ciascuna delle funzioni in esame si ha

$$\|e^{inx}\|^2 = 2\pi. \quad (1)$$

S'intende che la norma è quella di L^2 . Le $2n + 1$ funzioni $x \mapsto e^{ikx}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, forniscono una base ortogonale del sottospazio \mathcal{F}_n di L^2 costituito dai polinomi trigonometrici di ordine $\leq n$:

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}. \quad (2)$$



J.B.J. Fourier

1768 - 1830

Un'altra base di \mathcal{F}_n è costituita dalle $2n + 1$ funzioni reali

$$\begin{aligned} &1/2, \\ &\cos x, \quad \sin x, \\ &\cos 2x, \quad \sin 2x, \\ &\dots\dots\dots \\ &\cos nx, \quad \sin nx. \end{aligned}$$

Si tratta ancora di una base ortogonale; le funzioni che la costituiscono hanno tutte come quadrato della norma π , ad eccezione della costante $x \mapsto 1/2$, per cui il quadrato della norma vale $\pi/2$.

Ogni $p_n \in \mathcal{F}_n$ è dunque esprimibile nella forma

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx],$$

con certi coefficienti reali a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, e b_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Le formule di passaggio dai coefficienti di p_n rispetto alla prima base agli analoghi coefficienti rispetto alla seconda base sono le (17) e (17') del paragrafo 1.3:

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k}, & k &= 0, 1, \dots, n, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}), & k &= 1, 2, \dots, n; \end{aligned}$$

e inversamente

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0/2, \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k), & k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Il teorema di Pitagora consente di calcolare la norma di p_n :

$$\begin{aligned} \|p_n\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |p_n(x)|^2 dx = \\ &= 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n [|a_k|^2 + |b_k|^2] \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Se $f \in L^2$ possiamo calcolare la sua proiezione ortogonale sul sottospazio \mathcal{F}_n , in base alla Proposizione 1.4-1: tale proiezione ammette un'espressione del tipo (2), con i coefficienti calcolati secondo la formula (3) dello stesso paragrafo 1.4: essi sono dati dai prodotti scalari tra la funzione f e i singoli vettori della base, divisi per il quadrato della norma degli stessi vettori, dunque

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \quad (3)$$

Il polinomio ottenuto si chiama *polinomio di Fourier* di ordine n della funzione f ; per esso utilizzeremo il simbolo $s_n[f](x)$, o più semplicemente $s_n(x)$. Dunque

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx}.$$

Anche per i coefficienti di Fourier sarebbe più appropriata una notazione del tipo $c_k[f]$, per porre in evidenza la dipendenza dalla funzione f ; si osservi che tale dipendenza è *lineare*, cioè

$$c_k[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 c_k[f_1] + \lambda_2 c_k[f_2].$$

Alternativamente possiamo utilizzare la base reale, costituita da seni e coseni; avremo in tal caso una espressione di s_n del tipo

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

dove i coefficienti sono dati, sempre in base alla (3) del paragrafo 1.4, dalle formule

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad (4)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Si riconosce che la (4) rientra nella formula (5) ponendo in essa $k = 0$ (in ciò consiste la ragione della scelta della funzione costante $1/2$ in luogo della costante 1 come primo elemento della base di \mathcal{F}_n).

Il passaggio da s_n a s_{n+1} richiede l'aggiunta della quantità

$$a_{n+1} \cos((n+1)x) + b_{n+1} \sin((n+1)x);$$

la successione (s_n) dei polinomi di Fourier di f si presenta dunque come una serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx],$$

che verrà chiamata *serie di Fourier* di f . Scriveremo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx], \quad (7)$$

intendendo sempre che i coefficienti a_k e b_k siano dati dalle (5)-(6).

Se si utilizza la successione ortogonale (e^{ikx}) , la serie di Fourier si scrive

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (7')$$

dove i coefficienti c_k sono dati dalla formula (3).

La disuguaglianza di Bessel (↑ formule (7)-(7')) del paragrafo 1.4) si scrive, in base alla (3),

$$\|s_n\|^2 = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2, \quad (8)$$

o, in forma equivalente

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2. \quad (8')$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2. \quad (9)$$

Analogamente, se si utilizza la forma reale, si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2] \leq \frac{1}{\pi} \|f\|^2. \quad (9')$$



F.W. Bessel

1784 - 1846

Poiché $\|s_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \|s_n\|^2$ (si riveda la formula (6) del paragrafo 1.4), si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\| = \|f\|. \quad (10)$$

D'altra parte l'ultima uguaglianza sussiste se e solo se nella disequaglianza di Bessel (9)-(9') si ha il segno di uguaglianza; in definitiva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\| = 0 \iff \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|^2 \quad (11)$$

o, in forma equivalente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\| = 0 \iff \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2] = \frac{1}{\pi} \|f\|^2.$$

3.2. Serie di Fourier: convergenza puntuale

Lemma di Riemann-Lebesgue:

Proposizione 3.2-1. Per ogni $f \in L^1([a, b])$ si ha

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0 \quad (\lambda \text{ reale}).$$

Teorema di localizzazione:

Proposizione 3.2-2. Il comportamento nel punto x della serie di Fourier della funzione f dipende esclusivamente dai valori assunti dalla funzione stessa nell'intorno $(x - \delta, x + \delta)$, con $\delta > 0$ ad arbitrio.

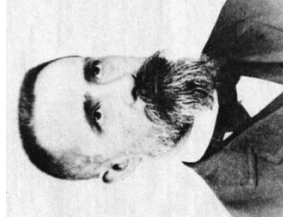
Il criterio di Dini:

Proposizione 3.2-3. Se la funzione

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t}$$

è sommabile sull'intervallo $[0, \delta]$, con $\delta > 0$ ad arbitrio, allora sussiste la (6), vale a dire si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = s(x). \quad (6')$$



U. Dini
1845 - 1918

Proposizione 3.2-4. Se esistono finiti i limiti a sinistra e a destra della funzione f nel punto x :

$$f(x^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x+t), \quad f(x^-) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x-t),$$

e se, per due costanti positive L e α sono verificate (per $t > 0$ abbastanza piccolo) le condizioni

$$|f(x+t) - f(x^+)| \leq Lt^\alpha, \quad |f(x-t) - f(x^-)| \leq Lt^\alpha, \quad (7)$$

la serie di Fourier di f converge in x alla somma

$$s(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \quad (8)$$

Criterio di Dirichlet. Se f è una funzione periodica di periodo 2π e se ogni intervallo di periodicità si può scomporre in un numero finito di sottointervalli, in modo tale che all'interno di ciascuno di essi la funzione f sia continua e monotona, mentre nei punti di scomposizione essa ammette al più discontinuità di prima specie, allora la (8) sussiste per ogni $x \in \mathbb{R}$.



P.G. Dirichlet
1805 - 1859

3.3. Serie di Fourier: convergenza uniforme

Definizione 3.3-1. Sia $u_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una successione di funzioni continue sull'intervallo $[a, b]$; diremo che la serie $\sum_{k \geq 1} u_k(x)$, cioè quella avente come somme parziali le funzioni

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x),$$

è *totalmente convergente* se è convergente la serie a termini positivi $\sum_{k \geq 1} \|u_k\|_\infty$.

Diremo che $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ se essa è continua su (\mathbb{R}) e periodica di periodo 2π . In particolare ciò implica che $f(\pi) = f(-\pi)$.

Proposizione 3.3-1. Se $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ è derivabile q.o. con derivata prima continua a tratti, allora la sua serie di Fourier converge totalmente, dunque uniformemente, alla funzione f .

Poniamo

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}; \quad (5)$$

diremo che $\sigma_n(x)$ è il *polinomio di Fejér* di f di ordine n . Si tratta di un polinomio trigonometrico di ordine n . Sostituendo al posto di ciascuna s_k , $k = 0, 1, \dots, n$, la relativa espressione, si trova

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) = & \frac{a_0}{2} + \frac{n}{n+1} [a_1 \cos x + b_1 \sin x] + \frac{n-1}{n+1} [a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x] + \dots + \\ & + \frac{1}{n+1} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]. \end{aligned}$$

Proposizione 3.3-2. Per ogni $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ la successione dei relativi polinomi di Fejér (σ_n) converge uniformemente alla funzione f .

3.4. Serie di Fourier: convergenza in media quadratica

Il Teorema di Riesz e Fischer:

Proposizione 3.4-1. Sia (\mathbf{e}_n) una successione ortonormale nello spazio di Hilbert V , (c_n) una successione di ℓ^2 , cioè tale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Esiste allora un elemento $\mathbf{x} \in V$ tale che, per ogni n , $c_n = (\mathbf{x} | \mathbf{e}_n)$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Ricordiamo che ℓ^2 è uno spazio di Hilbert; v. esempio 1.3-5.

Proposizione 3.4-2. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare, (\mathbf{e}_n) una successione ortonormale in esso; per ogni fissato $\mathbf{x} \in V$ sono equivalenti le proposizioni

$$i) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{e}_k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k = \mathbf{x}, \text{ dove } c_k := (\mathbf{x} | \mathbf{e}_k);$$

$$ii) \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Se $i)$ e $ii)$ sono verificate per ogni $\mathbf{x} \in V$, allora si ha

$$iii) (\forall n, (\mathbf{x} | \mathbf{e}_n) = 0) \implies (\mathbf{x} = \mathbf{0}).$$

Se V è completo (dunque uno spazio di Hilbert), allora $iii)$ implica $i)$ e $ii)$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.

La $iii)$ esprime il fatto che l'unico elemento ortogonale a tutti gli elementi della successione (\mathbf{e}_n) è l'elemento nullo:

$$\langle (\mathbf{e}_n) \rangle^\perp = \{ \mathbf{0} \}.$$

Si esprime tale proprietà dicendo che la successione (\mathbf{e}_n) è *totale* (o *massimale*) in V .

Lemma. La successione

$$1/2, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, \quad (1)$$

è totale in $C_{2\pi}(\mathbb{R})$, munito del prodotto scalare di $L^2[-\pi, \pi]$.

Proposizione 3.4-3. La successione (1) è totale nello spazio $L^2[-\pi, \pi]$, e dunque è una base dello stesso spazio.

Corollario. Per ogni f di $L^2[-\pi, \pi]$ vale l'identità di Parseval

$$2\pi \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \right) = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2] \right) = \|f\|^2. \quad (2)$$

3.5. Serie di Fourier: ulteriori risultati

Proposizione 3.5-1. Sia $f \in L^2[-\pi, \pi]$ e sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (1)$$

Per ogni coppia di punti $x_0, x \in [-\pi, \pi]$, si ha

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{x_0}^x \cos kt dt + b_k \int_{x_0}^x \sin kt dt \right), \quad (2)$$

dove, per ogni fissato x_0 , la serie a secondo membro converge uniformemente al variare di x nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Tutti i risultati precedenti si estendono a funzioni periodiche di periodo $T > 0$ arbitrario. Spesso la variabile indipendente viene interpretata come un tempo e per questa ragione viene indicata con la lettera t . Lo spazio $L^2[0, T]$, oppure $L^2[-T/2, T/2]$, ammette come base ortogonale la famiglia di funzioni a valori complessi

$$(e^{in\omega t})_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \text{dove } \omega := 2\pi/T;$$

tali funzioni ammettono T come quadrato della norma.

La quantità ω è la cosiddetta *pulsazione* (o *frequenza angolare*) della funzione in esame.

Alternativamente, si può utilizzare la base

$$\begin{aligned} & 1/2 \\ & \cos \omega t, \quad \sin \omega t, \\ & \cos 2\omega t, \quad \sin 2\omega t, \\ & \dots\dots\dots \\ & \cos n\omega t, \quad \sin n\omega t, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il quadrato della norma di ciascuna di tali funzioni (ad eccezione della prima) è $T/2$. Si osservi che la trasformazione lineare $t = \omega\tau = (2\pi/T)\tau$ muta l'intervallo $[0, T]$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

La serie di Fourier di un'assegnata funzione f sommabile su $[0, T]$, che supponiamo prolungata con periodo T a tutta la retta reale, si scrive in una delle due forme

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (3)$$

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad (3')$$

dove

$$a_k := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos k\omega\tau \, d\tau, \quad b_k := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin k\omega\tau \, d\tau, \quad (4)$$

e rispettivamente

$$c_k := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau} \, d\tau. \quad (4')$$

Si hanno le uguaglianze

$$c_k + c_{-k} = a_k, \quad c_k - c_{-k} = -ib_k \quad (5)$$

o, in forma equivalente,

$$\frac{1}{2}(a_k - ib_k) = c_k, \quad \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = c_{-k}. \quad (5')$$

Le formule scritte sono valide per ogni naturale k se si conviene di porre $b_0 = 0$.

In certe situazioni è preferibile fare comparire al posto di ω (pulsazione), la frequenza $1/T$. Se indichiamo col simbolo

$$f_0 := \frac{1}{T}$$

la *frequenza fondamentale*, allora il prodotto $k\omega t$ si scrive

$$k\omega t = k \frac{2\pi}{T} t = 2\pi k f_0 t.$$

Se indichiamo col simbolo $t \mapsto x(t)$ la funzione da sviluppare (per evitare confusioni tra il simbolo che indica la funzione e quello che indica la frequenza fondamentale), abbiamo, al posto della (3) e della (3'), le formule

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)), \quad (3'')$$

$$x(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi k f_0 t}. \quad (3''')$$

Se la funzione x è di quadrato sommabile, vale l'identità di Parseval che si scrive

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{2}{T} \|x\|^2,$$

oppure

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \|x\|^2.$$

Supponiamo che la funzione x sia a valori reali, dunque anche i coefficienti a_k e b_k sono reali. Osserviamo che se, per un assegnato k , i coefficienti a_k e b_k non sono entrambi nulli, ponendo

$$A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (6)$$

si può scrivere il k -esimo addendo a secondo membro della (3) nella forma

$$a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega t = A_k \left(\frac{a_k}{A_k} \cos k\omega t + \frac{b_k}{A_k} \sin k\omega t \right),$$

dove $(a_k/A_k)^2 + (b_k/A_k)^2 = 1$.

Si osservi che $A_k = |a_k \pm ib_k| = 2|c_{\mp k}|$ (↑ formula (5')); se dunque si pone

$$\phi_k := \text{Arg}(a_k + ib_k) \in (-\pi, \pi], \quad (7)$$

si ha $a_k/A_k = \cos \phi_k$, $b_k/A_k = \sin \phi_k$. Ne segue

$$\begin{aligned} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t &= A_k (\cos k\omega t \cos \phi_k + \sin k\omega t \sin \phi_k) = \\ &= A_k \cos(k\omega t - \phi_k). \end{aligned}$$

Se si pone $A_0 := a_0/2$, si può scrivere la serie di Fourier nella forma

$$x(t) \sim A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \phi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t - \phi_k), \quad (8)$$

intendendo che sia $A_k = 0$ (e ϕ_k arbitrario) per i valori di k per cui risulta $a_k = b_k = 0$.

La successione (A_k) , costituita da numeri ≥ 0 (ad eccezione al più di A_0), viene chiamata *spettro di ampiezza* della funzione f , mentre la successione (ϕ_k) viene chiamata *spettro di fase* della stessa funzione.

Si osservi che se x è reale e pari (dunque $b_k = 0$ per ogni k), si ha $\phi_k = 0$ se $a_k > 0$, $\phi_k = \pi$ se $a_k < 0$; se x è reale e dispari (dunque $a_k = 0$ per ogni k), si ha $\phi_k = \pi/2$ se $b_k > 0$, $\phi_k = -\pi/2$ se $b_k < 0$.

Per la funzione $x(t) - A_0$, periodica di periodo T con media integrale nulla su ogni intervallo di lunghezza T , abbiamo

$$x(t) - A_0 \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \phi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t - \phi_k). \quad (8')$$

La sostituzione di x con $x - A_0$ equivale in termini geometrici alla traslazione del grafico di x , parallelamente all'asse delle ordinate, della quantità $-A_0$.

Se x è sviluppabile in serie di Fourier, la formula scritta presenta la stessa x come somma di una *armonica fondamentale*

$$A_1 \cos(\omega t - \phi_1) = A_1 \cos(2\pi f_0 t - \phi_1),$$

funzione di periodo T e frequenza f_0 al pari di f , più una serie di *armoniche superiori*

$$A_k \cos(k\omega t - \phi_k) = A_k \cos(2\pi k f_0 t - \phi_k), \quad k \geq 2,$$

con frequenze multiple della frequenza dell'armonica fondamentale, ed ampiezze A_k che tendono a 0 al tendere di k all'infinito.

4. Funzioni di una variabile complessa

4.1. Il campo complesso

L'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi è l'insieme \mathbb{R}^2 delle coppie ordinate di numeri reali, munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione seguenti:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2). \quad (2)$$

È facile verificare che \mathbb{C} è un campo (↑ Definizione 1.1-1). Se $z = (x, y)$ è un numero complesso, si dice che x è la *parte reale* di z e y il *coefficiente della parte immaginaria*; si scrive

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

Il *coniugato* di z è

$$z^* = \bar{z} := (x, -y);$$

si trova

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$$

L'insieme dei numeri complessi del tipo $(x, 0)$ è un sottocampo di \mathbb{C} , isomorfo a \mathbb{R} tramite l'isomorfismo $(x, 0) \mapsto x$; identificheremo $(x, 0)$ con x e pertanto scriveremo semplicemente x in luogo di $(x, 0)$.

I numeri del tipo $(0, y)$ si dicono *immaginarî*. Il numero immaginario $(0, 1)$, detto *unità immaginaria*, ha la proprietà

$$(0, 1)(0, 1) = -1;$$

se si pone

$$i := (0, 1), \tag{3}$$

allora

$$i^2 = -1. \tag{4}$$

Poiché $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, la (3) fornisce la formula

$$z = x + iy. \tag{5}$$

Usando quest'ultima, le (1) e (2) diventano

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

A differenza di \mathbb{R} , il campo \mathbb{C} non è ordinato, nel senso che non esiste alcun ordinamento totale compatibile con le operazioni.

Il campo complesso \mathbb{C} è *algebricamente chiuso*, cioè ogni polinomio (non costante) a coefficienti complessi si annulla in un punto (almeno) di \mathbb{C} (↓ Proposizione 4.6-4).



C.F. Gauss

1777 - 1855

Poiché i numeri complessi sono coppie ordinate di numeri reali, essi ammettono una rappresentazione come punti del piano \mathbb{R}^2 . I numeri reali corrispondono ai punti dell'asse x (asse reale), mentre i numeri immaginari corrispondono ai punti dell'asse y (asse immaginario). L'addizione tra numeri complessi corrisponde all'addizione in \mathbb{R}^2 come spazio vettoriale reale.

Alle coordinate polari nel piano corrispondono il *modulo* e l'*argomento* per i numeri complessi. Il modulo (= valore assoluto) di $z = x + iy$ è

$$|z| := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si verificano le proprietà:

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0,$$

$$|z| = |z^*|,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$\left. \begin{array}{l} |x| \\ |y| \end{array} \right\} \leq |z| \leq |x| + |y|,$$

dove s'intende che sia $z = x + iy$.

Se $z \neq 0$, esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \iff \frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (6)$$

in quanto $z/|z|$ è un numero di modulo unitario. Dunque

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{y}{|z|}.$$

Si dice che θ è un *argomento* di z ; se θ è un argomento di z , lo sono anche tutti (e soltanto) i numeri $\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. L'insieme degli argomenti di z verrà indicato col simbolo

$\arg(z)$;

un qualunque elemento di $\arg(z)$ si dirà una *determinazione* dell'argomento di z .

In ogni intervallo semi-aperto della retta reale, di lunghezza 2π , cioè ogni intervallo del tipo $[a, a + 2\pi)$ oppure $(a, a + 2\pi]$, esiste una ed una sola determinazione dell'argomento di z . Se si sceglie l'intervallo $(-\pi, \pi]$ si ottiene l'*argomento principale* di z ; per tale determinazione useremo il simbolo $\text{Arg}(z)$.

Tutti i numeri reali positivi hanno argomento principale uguale a 0, tutti i numeri reali negativi hanno argomento principale uguale a π .

Da $z_k = |z_k|(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, $k = 1, 2$, segue

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] = \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \tag{7}$$

A parole: per moltiplicare due numeri complessi si moltiplicano i moduli, si sommano gli argomenti.

Se $z_1 = z_2 = z$ si ha $z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$; procedendo per induzione si ottiene la formula di De Moivre (\rightarrow PCAM par. 2.5, formula (17)):

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Se $z \neq 0$ da

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{|z|}{|z|^2} (\cos \theta - i \sin \theta) = |z|^{-1} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)],$$

segue la validità della (8) per ogni $n \in \mathbb{Z}$.



A. De Moivre
1667 - 1754

La struttura di spazio metrico di cui è munito \mathbb{R}^2 con la distanza euclidea (\uparrow Esempio 1.2-3) si trasporta in modo naturale in \mathbb{C} . Con i simboli che già conosciamo, la distanza tra z_1 e z_2 è

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|, \quad (10)$$

l'*intorno circolare* (= *palla*) di centro z_0 e raggio $r > 0$ è

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Ricordiamo che, dato un insieme $A \subset \mathbb{C}$, un punto z si dice *interno* ad A se esiste un intorno di z contenuto in A , si dice *esterno* se è interno al complementare $A^c = \mathbb{C} \setminus A$, si dice *punto di frontiera* se non è né interno né esterno.

In simboli:

z è punto interno ad $A \iff \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A$,

z è punto esterno ad $A \iff \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A^c$,

z è punto di frontiera di $A \iff \forall r > 0 : (B_r(z) \cap A \neq \emptyset) \wedge (B_r(z) \cap A^c \neq \emptyset)$.

Ricordiamo che un insieme A si dice *aperto* se ogni suo punto è punto interno all'insieme stesso, si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto. Ricordiamo ancora che z si dice *punto di accumulazione* di A se, $\forall r > 0$, l'intersezione $B_r(z) \cap A$ contiene infiniti elementi.

4.2. Funzioni di una variabile complessa

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, dove A è un aperto connesso di \mathbb{C} . L'aperto A è *connesso* se, per ogni coppia di punti $z_1, z_2 \in A$, esiste una poligonale che li congiunge, interamente contenuta in A stesso.

Si dice che la funzione f *tende* (o *converge*) a $\lambda \in \mathbb{C}$ per z che tende a z_0 (punto di accumulazione di A), se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ (dipendente da ε), tale

$$(z \in A) \wedge (0 < |z - z_0| < \delta) \implies |f(z) - \lambda| < \varepsilon.$$

In particolare, la funzione f si dice *continua* in $z_0 \in A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ (dipendente da ε), tale

$$(z \in A) \wedge (|z - z_0| < \delta) \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

A parole: fissato ad arbitrio un intorno $B_\varepsilon(f(z_0))$ (intorno “bersaglio”), esiste un intorno $B_\delta(z_0)$ (intorno “controllo”) la cui immagine tramite f è contenuta nell'intorno precedentemente fissato.

Se f è continua in tutti i punti del proprio dominio A , si dirà brevemente che essa è *continua* in A .

Sia $z = x + iy$, $w = f(z) = u + iv$, dunque

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y);$$

dalle diseguaglianze

$$\left. \begin{aligned} |u(x, y) - u(x_0, y_0)| \\ |v(x, y) - v(x_0, y_0)| \end{aligned} \right\} \leq |f(z) - f(z_0)| \leq \\ \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| + |v(x, y) - v(x_0, y_0)|,$$

dove s'intende che sia $z_0 = x_0 + iy_0$, segue subito che la continuità di f in z_0 equivale alla continuità in (x_0, y_0) delle due funzioni (reali di due variabili reali) $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione non iniettiva; diremo che $A_0 \subset A$ è una *regione fondamentale* per f se:

- i*) la restrizione di f ad A_0 è iniettiva;
- ii*) l'immagine della stessa restrizione, cioè $f(A_0)$, coincide con $f(A)$.

In altri termini: A_0 è una regione fondamentale per f se è un insieme abbastanza “piccolo” affinché la restrizione ad esso di f sia iniettiva, ma al tempo stesso sia abbastanza “grande” perché f assuma su di esso (una sola volta) tutti i valori assunti su A .

Ricordiamo che una funzione è iniettiva (= uno a uno) se trasforma elementi distinti del dominio in elementi distinti dell'immagine.

4.3. Funzioni olomorfe

Proposizione 4.3-1. La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, con A aperto $\subseteq \mathbb{C}$, è differenziabile in $z \in A$ se e solo se essa è ivi derivabile; in tal caso il differenziale si scrive $df : \Delta z \mapsto f'(z) \cdot \Delta z$.

Proposizione 4.3-2. Sia funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, con A aperto $\subseteq \mathbb{C}$, differenziabile in z come funzione (complessa) delle due variabili reali x e y ; allora f è differenziabile in z come funzione di una variabile complessa se e solo se ivi risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (3)$$

Se la (3) è soddisfatta, si ha

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Se si pone $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, allora la (3) equivale alla coppia di uguaglianze

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

note come *condizioni di Cauchy-Riemann*.

Proposizione 4.3-3. Siano $z \neq 0$ e a due numeri complessi. Allora:

- 1) se a è intero, $a = m \in \mathbb{Z}$, $z^a = z^m$ assume un solo valore;
- 2) se a è razionale $\notin \mathbb{Z}$, $a = m/n$, con $n \geq 2$, m ed n primi tra loro, z^a assume n valori, e precisamente le radici n -esime di z^m ;
- 3) se a è irrazionale, z^a assume un'infinità numerabile di valori, che differiscono a due a due per un fattore del tipo $\exp(2k\pi ai)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.4. Serie di potenze

Lemma di Abel. Se la serie $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge in un punto $\tilde{z} \neq 0$, allora essa converge assolutamente in ogni z con $|z| < |\tilde{z}|$.



N.H. Abel
1802 - 1829

Segue dal Lemma di Abel che ad ogni serie di potenze resta associata una quantità non negativa R (eventualmente $R = +\infty$) detta *raggio di convergenza* della serie stessa, tale che:

- 1) se $R = 0$, la serie converge soltanto per $z = 0$;
- 2) se $0 < R < +\infty$, la serie converge (assolutamente) per $|z| < R$, non converge per $|z| > R$;
- 3) se $R = +\infty$, la serie converge (assolutamente) per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se $R > 0$, l'intorno circolare (palla) $B_R(0)$ viene detto *cerchio di convergenza* della serie data; s'intende che esso coincida con \mathbb{C} se $R = +\infty$.

Se $R > 0$, per ogni $r < R$ la convergenza della serie in esame è *totale* nel disco compatto $|z| \leq r$. Ciò significa (\uparrow Definizione 3.3-1) che converge la serie

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{|z| \leq r} |a_n z^n| = \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n.$$

Teorema di Cauchy-Hadamard (per il calcolo del raggio di convergenza):

Proposizione 4.4-1. Posto $\lambda := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, si ha

$$R = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda = +\infty \\ 1/\lambda, & \text{se } 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty, & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$



J. Hadamard
1865 - 1963

Proposizione 4.4-2. Sia $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$; posto

$$s(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad |z| < R, \quad (2)$$

la serie delle derivate

$$\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1},$$

ha ancora raggio di convergenza R e si ha $s'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Corollario. Se $s(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, per $|z| < R$, allora s è una funzione di classe $C^{(\infty)}$ (cioè infinitamente derivabile) nel cerchio $|z| < R$, e per ogni $k > 0$ si ha

$$s^{(k)}(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2) \dots (n+k) a_{n+k} z^n, \quad (4)$$

da cui, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{s^{(k)}(0)}{k!}. \quad (5)$$

4.5. Integrazione in campo complesso

Definizione 4.5-1. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare a tratti la cui traccia è contenuta in A : $\gamma([a, b]) \subset A$. Definiremo l'integrale di f su γ ponendo

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (1)$$

Proposizione 4.5-1. Sia $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, una successione di funzioni continue sull'aperto A , γ una curva regolare a tratti la cui traccia è contenuta in A ; se la successione (f_n) converge uniformemente ad f su γ , allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Definizione 4.5-2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$; diremo che una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ è una *primitiva* di f se

$$\forall z \in A, F'(z) = f(z).$$

Proposizione 4.5-2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$, $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ una primitiva di f , $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ un cammino regolare a tratti; allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad (6)$$

Proposizione 4.5-3. Sia f una funzione continua sull'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$. Sono equivalenti le proposizioni:

- 1) f ammette primitiva in A ;
- 2) l'integrale di f su ogni cammino γ regolare a tratti, con traccia contenuta in A , dipende soltanto dagli estremi di γ ;
- 3) l'integrale di f è nullo su ogni curva γ , chiusa e regolare a tratti, con traccia contenuta in A .

Teorema di Jordan. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva continua, semplice e chiusa, il complementare della sua traccia, $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, è l'unione di due aperti connessi e disgiunti.

Convenzione sull'orientamento dei circuiti. D'ora in poi supporremo costantemente che ogni circuito γ sia orientato positivamente rispetto all'aperto D interno ad esso.

In questa sintesi utilizzeremo il simbolo

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

per indicare l'integrale di f sul circuito γ .

Teorema di Cauchy (prima versione):

Proposizione 4.5-4. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'aperto connesso A . Per ogni circuito regolare a tratti contenuto in A assieme al proprio interno D , si ha

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Teorema di Cauchy (seconda versione):

Proposizione 4.5-5. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'aperto connesso A , γ_1 e γ_2 due circuiti regolari a tratti contenuti in A , con γ_2 interno a γ_1 . Siano poi D_1 e D_2 gli aperti interni a γ_1 e γ_2 rispettivamente; se $D_1 \setminus D_2 \subset A$, allora

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (8)$$

Formula integrale di Cauchy:

Proposizione 4.5-6. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'aperto connesso A e sia γ un circuito contenuto in A assieme al proprio interno D ; per ogni $z_0 \in D$ si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (9)$$

Definizione 4.5-3. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$; diremo che essa è *analitica* in A se, per ogni $z_0 \in A$, essa è sviluppabile in serie di Taylor in ogni intorno $B_r(z_0) \subseteq A$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n,$$

dove $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Analiticità delle funzioni olomorfe:

Proposizione 4.5-7. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$, z_0 un punto qualsivoglia di A ; posto $r :=$ distanza $(z_0, \partial A)$ (con l'intesa che sia $r = \infty$ se $A = \mathbb{C}$, dunque $\partial A = \emptyset$), nell'intorno $|z - z_0| < r$ si ha

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n, \quad (11)$$

dove

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds, \quad (12)$$

γ essendo una circonferenza di centro z_0 e raggio minore di r .

Teorema di Morera:

Proposizione 4.5-8. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$; se per ogni poligonale semplice e chiusa γ contenuta in A si ha $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$, allora f è analitica in A .

Proposizione 4.5-8'. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$; se per ogni terna di punti z_1, z_2, z_3 contenuta in A assieme al triangolo $T = T(z_1, z_2, z_3)$ si ha $\oint_{\partial T} f(z) dz = 0$, allora f è analitica in A .

Teorema di Goursat:

Proposizione 4.5-9. Se $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione derivabile in tutti i punti dell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$, essa è analitica in A .

4.6. Proprietà delle funzioni analitiche

Proposizione 4.6-1. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$; sono equivalenti le proposizioni:

- 1) $\exists a \in A, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$;
- 2) f è nulla in un intorno di a ;
- 3) f è nulla in A .

Proposizione 4.6-2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione (non identicamente nulla) analitica nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$; l'insieme degli zeri di f (se non è vuoto) è costituito da punti isolati ed è privo di punti di accumulazione appartenenti ad A .

Teorema di Liouville:

Proposizione 4.6-3. Se f è una funzione *intera*, cioè analitica su \mathbb{C} , ed è limitata in valore assoluto, $|f(z)| \leq M$, allora essa è costante.



J. Liouville
1809 - 1882

Teorema di fondamentale dell'algebra:

Proposizione 4.6-4. Ogni polinomio a coefficienti complessi, non costante, ammette almeno uno zero.

Una condizione sufficiente per l'analiticità della funzione limite di una successione di funzioni analitiche:

Proposizione 4.6-5. Sia $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ una successione di funzioni analitiche nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$; se f_n converge uniformemente su ogni insieme compatto contenuto in A , posto $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$, si ha che f è analitica in A e, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $z \in A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)$.

4.7. Punti singolari. Serie bilatere

Definizione 4.7-1. Il punto z_0 si dice *punto singolare isolato* (= *singularità isolata*) per la funzione analitica $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, se $z_0 \notin A$, ma esiste un intorno forato $B_r^*(z_0) \subseteq A$.

Definizione 4.7-2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica, e z_0 un suo punto singolare isolato; diremo che esso è *eliminabile* se esiste un prolungamento analitico di f in un intorno di z_0 .

Definizione 4.7-3. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica, e z_0 un suo punto singolare isolato; diremo che esso è un *polo* di ordine $n \in \mathbb{N}^*$, se la funzione $(z - z_0)^n f(z)$ tende al limite $\lambda \neq 0$ per $z \rightarrow z_0$.

Un punto singolare isolato ce non sia né eliminabile, né un polo si dice *punto singolare essenziale*.

Definizione 4.7-4. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica, e z_0 un suo punto singolare isolato; si chiama *residuo* di f nel punto z_0 il numero

$$\operatorname{res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (2)$$

dove γ è un circuito contenente z_0 e non (eventuali) altri punti singolari di f .

Proposizione 4.7-1. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica, e z_0 un polo di ordine n ; allora

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)). \quad (3)$$

Teorema di Laurent:

Proposizione 4.7-2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analitica nella corona

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2 \leq \infty\};$$

per ogni $z \in A$ si ha

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (6)$$

dove i coefficienti c_n , per ogni $n \in \mathbb{Z}$, sono dati dalla formula

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (7)$$

dove γ è una qualunque circonferenza di centro z_0 e raggio r con $R_1 < r < R_2$.

Proposizione 4.7-3. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica, z_0 un suo punto singolare isolato, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ il suo sviluppo di Laurent in un intorno forato di z_0 . Allora:

- 1) z_0 è eliminabile se e solo se la parte caratteristica è nulla: $\forall n < 0, c_n = 0$;
- 2) z_0 è un polo di ordine n se e solo se $(c_{-n} \neq 0) \wedge (\forall k > n, c_{-k} = 0)$;
- 3) z_0 è un punto singolare essenziale se e solo se, per infiniti $n \in \mathbb{N}^*$, si ha $c_{-n} \neq 0$.

Proposizione 4.7-4. Sia $f = p/q$, una funzione razionale fratta propria, cioè sia $n = \text{grado}(p) < m = \text{grado}(q)$; allora essa coincide con la somma delle parti caratteristiche degli sviluppi di Laurent relativi agli zeri del polinomio q a denominatore: $f(z) = \sum_{j=1}^r \sigma_j(z)$.

4.8. Il teorema dei residui

Proposizione 4.8-1. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analitica nell'aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$, γ un circuito contenuto in A . Se z_1, z_2, \dots, z_r sono i punti singolari isolati di f appartenenti all'aperto D interno a γ e $D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_r\} \subset A$, allora

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{res}(f, z_k). \quad (1)$$

Corollario. Nelle ipotesi della Proposizione precedente, con le condizioni aggiuntive che f non s'annulla su γ e possiede soltanto poli in D , allora, detti z_1, z_1, \dots, z_p gli zeri di f in D e $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q$ i poli di f in D , si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (m_1 + m_2 + \dots + m_p) - (n_1 + n_2 + \dots + n_q),$$

dove m_j è l'ordine dello zero z_j e n_j è l'ordine del polo ζ_j .

Lemma 4.8-1 (del grande cerchio). Sia f una funzione definita e continua nel settore $\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$, almeno per $|z|$ abbastanza grande. Se $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

dove γ_R è l'intersezione della circonferenza di centro l'origine e raggio R con il settore angolare considerato.

Lemma 4.8-2 (del piccolo cerchio). Sia f una funzione definita e continua nel settore $\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$, almeno per $|z|$ abbastanza piccolo. Se $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0$ allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0,$$

dove γ_r è l'intersezione della circonferenza di centro l'origine e raggio r con il settore angolare considerato.

Lemma 4.8-3 (di C. Jordan). Sia f una funzione definita e continua in un settore S del semipiano $\text{Im}(z) \geq 0$:

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2 \leq \pi\}.$$

Se $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz = 0,$$

dove γ_R è l'intersezione della circonferenza di centro l'origine e raggio R con il settore angolare considerato.



C. Jordan

1838 - 1922

Lemma 4.8-4. Sia f analitica in un intorno forato dell'origine ed abbia in tale punto un polo semplice; allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i\pi \text{res}(f, 0),$$

dove γ_r è la semicirconferenza di equazione $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

5. La trasformata di Laplace

5.1. Introduzione alla trasformata di Laplace



P.S. Laplace

1749 - 1827

Definizione 5.1-1. Diremo che f è trasformabile secondo Laplace (brevemente: L -trasformabile) se esiste un $s \in \mathbb{C}$ tale che la funzione $t \mapsto e^{-st}f(t)$ sia sommabile su \mathbb{R}_+ ; in tal caso chiameremo *integrale di Laplace di f* l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1)$$

Definizione 5.1-2. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ (dove $\mathbb{R}_+ \subseteq I$) una funzione trasformabile secondo Laplace; posto

$$\sigma[f] := \inf \{ \operatorname{Re}(s) \mid e^{-st} f(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \},$$

per ogni s con $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$ chiameremo *trasformata di Laplace di f* la funzione

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Proposizione 5.1-1. Se f_1 e f_2 sono funzioni Laplace-trasformabili con ascisse di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente, per ogni coppia di costanti c_1, c_2 la funzione $t \mapsto c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ è Laplace-trasformabile nel semipiano $\text{Re}(s) > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$ e per gli s di tale insieme si ha

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2](s).$$

Convenzione sui simboli. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita su un intervallo I , con $\mathbb{R}_+ \subseteq I$; indicheremo col simbolo f_+ la funzione

$$f_+(t) := \begin{cases} f(t), & \text{per } t \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1)$$

Definizione 5.1-3. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nulla per valori negativi del suo argomento e trasformabile secondo Laplace, viene detta un *segnale*.

Proposizione 5.1-2. Sia f una funzione Laplace-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$; allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$, la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0$ e

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} F(s) = 0.$$

Proposizione 5.1-3. Sia f una funzione Laplace-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$; allora la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ è olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$. La funzione $t \mapsto tf(t)$ è Laplace-trasformabile, ancora con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, e si ha

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} (-tf(t)) dt,$$

cioè

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s). \quad (2)$$

Lemma 1. La funzione identità $t \mapsto t$ è di ordine esponenziale δ per ogni $\delta > 0$, cioè esiste una costante positiva C_δ tale che

$$t \leq C_\delta e^{\delta t} \iff te^{-\delta t} \leq C_\delta, \forall t \geq 0.$$

Lemma 2. Per ogni $z \neq 0$ si ha

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| \leq e^{|z|}. \quad (3)$$

Corollario. Se f è una funzione Laplace-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, allora per la trasformata $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ si ha

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s) \quad (2')$$

per ogni naturale $n \geq 1$ e per ogni s con $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$.

5.2. Proprietà della trasformata di Laplace

Proposizione 5.2-1. Sia f una funzione Laplace-trasformabile, nulla per $t < 0$, con ascissa di convergenza $\sigma[f]$; allora si ha

- i) $\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right)$, $\forall c > 0$, $\operatorname{Re}(s) > c\sigma[f]$;
- ii) $\mathcal{L}[f(t - t_0)](s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t)](s)$, $\forall t_0 > 0$, $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$;
- iii) $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s - a)$, $\forall a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f] + \operatorname{Re}(a)$.

Proposizione 5.2-2. Sia f un segnale periodico per $t \geq 0$, con (minimo) periodo T : $f(t + T) = f(t)$, $\forall t \geq 0$; se f è sommabile sull'intervallo $[0, T]$, allora per $\operatorname{Re}(s) > 0$ si ha

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \quad (1)$$

Proposizione 5.2-3. Sia f un segnale continuo per $t \geq 0$, derivabile con derivata prima continua a tratti e Laplace-trasformabile. Allora per ogni s con $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$ si ha

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0), \quad (2)$$

dove F è la trasformata di f .

Corollario. Se esiste finito il limite di f per $t \rightarrow +\infty$, esiste ed ha lo stesso valore il limite di $sF(s)$ per $s \rightarrow 0$.

Proposizione 5.2-4. Se f e g sono due segnali Laplace-trasformabili con ascisse di convergenza $\sigma[f]$ e $\sigma[g]$ rispettivamente, allora $f * g$ è Laplace-trasformabile nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$, e si ha

$$\mathcal{L}[f * g](s) = F(s)G(s),$$

dove F e G sono le trasformate di f e g rispettivamente.

Tabella 5.2-1. PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2](s)$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$
$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right)$	$\forall c > 0, \operatorname{Re}(s) > c\sigma[f]$
$\mathcal{L}[f(t - t_0)](s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t)](s)$	$\forall t_0 > 0, \operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$
$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s - a)$	$\forall a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > \sigma[f] + \operatorname{Re}(a)$
$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$	$\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$
$\mathcal{L}[f_1 * f_2](s) = \mathcal{L}[f_1](s) \cdot \mathcal{L}[f_2](s)$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$
$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0)$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$
$\mathcal{L}[H * f](s) = \mathcal{L}[\int_0^t f(\tau) d\tau](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{0, \sigma[f]\}$

5.3. Le funzioni beta e gamma di Eulero



L. Euler

1709 - 1783

La funzione *gamma* di Eulero è definita, per ogni numero complesso z con parte reale > 0 , mediante la formula:

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad x = \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1')$$

Le due proprietà principali della funzione gamma sono

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad (2)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (3)$$

Possiamo utilizzare la (3), scritta nella forma

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad (3')$$

per prolungare la Γ nel semipiano $x < 0$: si può definire la Γ in tutti i punti del semipiano $x < 0$ eccettuati gli opposti dei numeri naturali.

In definitiva il dominio della funzione Γ è \mathbb{C} privato dei punti $0, -1, -2, \dots$. Si può dimostrare che Γ è analitica nel proprio dominio; nei punti $z = -n$, $n \in \mathbb{N}$ essa ammette dei poli semplici.

La funzione *beta* di Eulero è definita, per $\alpha, \beta > 0$, dalla formula

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt. \quad (4)$$

La funzione B è simmetrica rispetto alle variabili indipendenti:

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha). \quad (5)$$

Questo risultato segue anche dall'identità

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad (6)$$

che mostra come il calcolo della funzione B sia riconducibile alla Γ .

5.4. Inversione della trasformata di Laplace

Definizione 5.4-1. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice di classe $C^{(1)}$ a tratti (brevemente: regolare a tratti) se in ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tanto f quanto f' ammettono al più un numero finito di punti di discontinuità di prima specie.

Proposizione 5.4-1. Se f è un segnale regolare a tratti, con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$, per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2} [f(t^-) + f(t^+)]. \quad (6)$$

Proposizione 5.4-2. Sia $s \mapsto F(s)$ una funzione analitica nel semipiano $\sigma = \text{Re}(s) > \sigma_0$ e tale che si abbia

$$|F(s)| = O(1/s^k), \quad s \rightarrow \infty \quad (7)$$

con $k > 1$. Allora, per ogni $\alpha > \sigma_0$, la formula

$$f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (8)$$

definisce un segnale continuo su \mathbb{R} , indipendente da α , avente F come trasformata.

5.5. Equazioni differenziali ordinarie

Un problema di valori iniziali per un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, viene ricondotto, mediante la L -trasformata, in un problema algebrico, nel senso che la trasformata della soluzione, sia $Y(s)$, è data sotto forma di funzione razionale fratta propria

$$Y(s) = \frac{A(s)}{P(s)},$$

dove P è il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale e A dipende dalle condizioni iniziali.

Decomposta Y in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{-j}^{(k)}}{(s - s_k)^j}. \quad (3)$$

la soluzione è data da

$$y(t) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{-j}^{(k)}}{(j-1)!} t_+^{j-1} e^{s_k t}. \quad (4)$$

6. La trasformata di Fourier

6.1. Introduzione alla trasformata di Fourier

Definizione 6.1-1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; chiameremo *trasformata di Fourier* (in breve: *F*-trasformata) di f la funzione

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

Definizione alternativa (in termini di frequenza il luogo della pulsazione):

Definizione 6.1-1'. Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$; chiameremo *trasformata di Fourier* di x la funzione

$$X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} x(t) dt. \quad (1')$$

Proposizione 6.1-1. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora \widehat{f} è continua e infinitesima all'infinito:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

Proposizione 6.1-2. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è reale e pari, allora \widehat{f} è reale e pari, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è reale e dispari, allora \widehat{f} è puramente immaginaria e dispari.

Formula d'inversione:

Proposizione 6.1-3. Sia f una funzione sommabile su \mathbb{R} , regolare a tratti (cioè $C^{(1)}$ a tratti), normalizzata in modo da aversi

$$f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad \forall x.$$

Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega := \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

Corollario. Sia f una funzione sommabile su \mathbb{R} , di classe $C^{(1)}$ a tratti, con trasformata di Fourier \widehat{f} ; allora, posto $f(\omega) = [f(\omega^+) + f(\omega^-)]/2$, si ha

$$\mathcal{F}[\widehat{f}](\omega) = 2\pi f(-\omega), \quad (4)$$

a patto di intendere l'integrale che definisce la trasformata di Fourier come valore principale.

Tabella 6.2-1. ALCUNE TRASFORMATE DI FOURIER

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$	
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$	$a > 0$
$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0$
$\text{sign}(x) e^{-a x }$	$\frac{-2i\omega}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0$
$\chi_{[-a,a]}(x)$	$\frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}$	$a > 0$
$\frac{\sin(ax)}{\pi x}$	$\chi_{[-a,a]}(\omega)$	$a > 0$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}$	$a > 0$
$(a - x)^+$	$\frac{4 \sin^2(a\omega/2)}{\omega^2}$	$a > 0$

6.2. Alcune proprietà della trasformata di Fourier

Proposizione 6.2-1. Sia f una funzione sommabile su \mathbb{R} con trasformata \widehat{f} ; allora, per ogni $c \neq 0$ la funzione $f(cx)$ ha come trasformata $(1/|c|)\widehat{f}(\omega/c)$.

Proposizione 6.2-2. Sia f una funzione sommabile con trasformata \widehat{f} ; allora, per ogni x_0 reale, la funzione $f(x - x_0)$ ha come trasformata $e^{-ix_0\omega}\widehat{f}(\omega)$.

Proposizione 6.2-3. Sia f una funzione sommabile con trasformata \widehat{f} ; allora, per ogni ω_0 reale, la funzione $e^{i\omega_0 x}f(x)$ ha come trasformata $\widehat{f}(\omega - \omega_0)$.

Proposizione 6.2-4. Se f è una funzione continua e sommabile su \mathbb{R} , con derivata continua a tratti e sommabile, allora f' ha come trasformata $i\omega\widehat{f}(\omega)$:

$$\mathcal{F}[f'(x)](\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega). \quad (1)$$

Corollario 1. Se $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sono funzioni continue e sommabili su \mathbb{R} , e $\widehat{f}^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile, allora quest'ultima funzione ha come trasformata $(i\omega)^n\widehat{f}(\omega)$:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\omega) = (i\omega)^n\widehat{f}(\omega). \quad (1')$$

Corollario 2. Nelle stesse ipotesi del Corollario precedente si ha

$$\widehat{f}(\omega) = o\left(\frac{1}{\omega^n}\right), \quad |\omega| \rightarrow \infty.$$

In particolare, per $n \geq 2$ si ha che \widehat{f} è sommabile su \mathbb{R} .

Proposizione 6.2-5. Se $f(x)$ e $xf(x)$ sono funzioni sommabili su \mathbb{R} , allora $\widehat{f}'(\omega)$ è la trasformata di $(-ix)f(x)$:

$$\widehat{f}'(\omega) = \mathcal{F}[(-ix)f(x)](\omega). \quad (2)$$

In forma equivalente: $xf(x)$ ha come trasformata $i\widehat{f}'(\omega)$.

Corollario. Se la funzione $x^n f(x)$ è sommabile su \mathbb{R} , allora

$$\widehat{f}^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)](\omega). \quad (2')$$

Se per ogni naturale n la funzione $x^n f(x)$ è sommabile su \mathbb{R} , allora la sua trasformata di Fourier è di classe $C^{(\infty)}$.

Proposizione 6.2-6. Se f_1 e f_2 sono funzioni sommabili su \mathbb{R} , la loro convoluzione $(f_1 * f_2)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi$ ha come trasformata $\widehat{f}_1(\omega) \widehat{f}_2(\omega)$.

Definizione 6.2-1. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ appartiene allo spazio \mathcal{S} se, per ogni coppia di numeri naturali p e q esiste una costante $C_{p,q}$ (dipendente da f oltre che da p e q) tale che

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Proposizione 6.2-7. La trasformazione di Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ è una biiezione dello spazio \mathcal{S} su se stesso.

6.3. Trasformata di Fourier delle funzioni di quadrato sommabile

Lemma. Per ogni coppia f_1, f_2 di funzioni dello spazio \mathcal{S} si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_1(\omega) \overline{\widehat{f}_2(\omega)} d\omega, \quad (1)$$

cioè

$$(\widehat{f}_1 | \widehat{f}_2) = 2\pi (f_1 | f_2) \quad (1')$$

dove i prodotti scalari s'intendono in $L^2(\mathbb{R})$. In particolare, per ogni funzione $f \in \mathcal{S}$ si ha

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2. \quad (2)$$

Proposizione 6.3-1. Per ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ la funzione

$$g_n(\omega) := \int_{-n}^n e^{-i\omega x} f(x) dx = \mathcal{F}[\chi_{[-n,n]}(x) f(x)](\omega)$$

appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ per ogni naturale n ; la successione $n \mapsto g_n$ converge in $L^2(\mathbb{R})$ ad una funzione g che viene chiamata trasformata di Fourier di f : $g(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$, dove il limite indicato s'intende nel senso della norma di $L^2(\mathbb{R})$. Per tale funzione si ha l'uguaglianza

$$\|g\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2. \quad (2')$$

Se poi f appartiene anche a $L^1(\mathbb{R})$, g coincide con la trasformata di Fourier di f nel senso ordinario: $g(\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

6.4. Il teorema di Shannon



C. Shannon
1916-2001

Sia $x(t)$ un segnale la cui F -trasformata è nulla fuori dell'intervallo $[-a, a]$:

$$|f| > a \implies X(f) = 0,$$

e sia di quadrato sommabile sullo stesso intervallo. Allora

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x\left(\frac{n}{2a}\right) \operatorname{sinc}(2at - n).$$

Ricordiamo che la funzione sinc è definita ponendo $\operatorname{sinc}(t) := \sin(\pi t) / (\pi t)$.

Tabella 6.3-1. PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER
(con i simboli della Definizione 6.1-1)

Definizione: $\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$

Formula d'inversione: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega.$

$$\mathcal{F}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)](\omega) = c_1 \mathcal{F}[f_1(x)](\omega) + c_2 \mathcal{F}[f_2(x)](\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(cx)](\omega) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad \forall c \neq 0$$

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\omega) = e^{-ix_0\omega} \mathcal{F}[f(x)](\omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x} f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega - \omega_0)$$

$$\mathcal{F}[f'(x)](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f(x)](\omega)$$

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(x)](\omega) = \mathcal{F}[-ixf(x)](\omega)$$

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(x)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(x)](\omega) \cdot \mathcal{F}[f_2(x)](\omega)$$

$$(\hat{f}_1 | \hat{f}_2) = 2\pi (f_1 | f_2) \implies \|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2$$

Tabella 6.3-1'. PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER
(con i simboli della Definizione 6.1-1')

Definizione: $\mathcal{F}[x(t)](f) = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} x(t) dt$

Formula d'inversione: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} X(f) df$

$$\mathcal{F}[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)](f) = c_1X_1(f) + c_2X_2(f)$$

$$\mathcal{F}[x(ct)](f) = \frac{1}{|c|} X\left(\frac{f}{c}\right), \quad \forall c \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)](f) = e^{-it_0f} X(f)$$

$$\mathcal{F}[e^{i2\pi f_0 t} x(t)](\omega) = X(f - f_0)$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](f) = i2\pi f X(f)$$

$$X'(f) = \mathcal{F}[-i2\pi t x(t)](f)$$

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](f) = X_1(f) \cdot X_2(f)$$

$$(X_1 | X_2) = (x_1 | x_2) \implies \|X\|^2 = \|x\|^2$$

7. Distribuzioni

7.1. Il concetto di distribuzione

Definizione 7.1-1. La funzione $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ appartiene allo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ se essa è di classe $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ e il suo supporto:

$$\text{supp } v := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid v(x) \neq 0\}}$$

è compatto, dunque contenuto in un intervallo limitato della retta reale.

Definizione 7.1-2. Diremo che la successione $v_k(x)$ di funzioni dello spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge alla funzione nulla se:

i) esiste un intervallo $[a, b]$ che contiene i supporti di tutte le funzioni v_k : $\forall k, \text{supp } v_k \subseteq [a, b]$;
ii) per ogni naturale p la successione delle derivate $k \mapsto v_k^{(p)}(x)$ converge uniformemente alla funzione nulla: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k^{(p)}\|_{\infty} = 0$.

Diremo poi che $v_k(x)$ tende a $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se $v_k - v$ tende alla funzione nulla nel senso appena specificato.

Definizione 7.1-3. Si chiama distribuzione su \mathbb{R} ogni funzionale $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ lineare e continuo, nel senso che

$$(v_k \rightarrow v \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R})) \implies (T(v_k) \rightarrow T(v)).$$

Proposizione 7.1-1. La corrispondenza che ad $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ associa la distribuzione $v \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx$ è iniettiva.

Definizione 7.1-4. Data la successione di distribuzioni (f_k) , diremo che f_k converge a $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (3)$$

Proposizione 7.1-2. Sia $f_k(x)$ una successione di funzioni sommabili su \mathbb{R} tali che

- 1) $f_k(x) \geq 0, \quad \forall k, \forall x;$
- 2) $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 1, \quad \forall k$
- 3) $\forall \delta > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} f_k(x) dx = 1.$

Allora $f_k(x) \rightarrow \delta(x)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ per $k \rightarrow \infty$.

Tabella 7.1-1. ALCUNE FAMIGLIE DI FUNZIONI CHE TENDONO ALLA DELTA DI DIRAC

$f(x)$	$\lambda f(\lambda x)$
$\chi_{[-1/2, 1/2]}(x)$	$\lambda \chi_{[-1/2\lambda, 1/2\lambda]}(x)$
$\chi_{[0, 1]}(x)$	$\lambda \chi_{[0, 1/\lambda]}(x)$
$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{1+\lambda^2 x^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	$\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 x^2}$
$(1- x)^+$	$\lambda(1-\lambda x)^+$
$\frac{1}{2} e^{- x }$	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x }$

7.2. Operazioni sulle distribuzioni

Combinazione lineare:

$$\langle c_1 f_1 + c_2 f_2, v \rangle := c_1 \langle f_1, v \rangle + c_2 \langle f_2, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (1)$$

Composizione con una funzione affine:

$$\langle f(ax + b), v(x) \rangle := \frac{1}{|a|} \langle f(x), v((x - b)/a) \rangle. \quad (2)$$

Derivata di una distribuzione:

$$\langle f'(x), v(x) \rangle := -\langle f(x), v'(x) \rangle. \quad (5)$$

Se $f(x)$ è continua su \mathbb{R} tranne in un punto x_0 in cui presenta una discontinuità di prima specie con salto $s := f(x_0^+) - f(x_0^-)$, e se per $x \neq x_0$ la funzione f è derivabile con derivata (in senso ordinario) $Df(x)$ continua, allora in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ha

$$f'(x) = Df(x) + s \delta(x - x_0).$$

■ **Proposizione 7.2-1.** Se per la distribuzione f si ha $f' = 0$, allora f è costante.

7.3. Distribuzioni temperate

Definizione 7.3-1. Diremo che la successione $v_k(x)$ di funzioni dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge alla funzione nulla se, per ogni coppia di numeri naturali p e q , la successione di funzioni $k \mapsto x^p D^q v_k(x)$ tende uniformemente a 0 su \mathbb{R} :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^p D^q v_k(x)\|_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p D^q v_k(x)| \right) = 0.$$

Diremo poi che $v_k(x)$ tende a $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se $v_k - v$ tende alla funzione nulla nel senso appena specificato.

Definizione 7.3-2. Chiameremo distribuzione temperata su \mathbb{R} ogni funzionale $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ lineare e continuo, nel senso che

$$(v_k \rightarrow v \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R})) \implies (\langle f, v_k \rangle \rightarrow \langle f, v \rangle). \quad (1)$$

Proposizione 7.3-1. La corrispondenza $v \mapsto \widehat{v}$ è lineare e continua dallo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in sé:

$$(v_k \rightarrow 0) \implies (\widehat{v}_k \rightarrow 0),$$

dove la convergenza s'intende nel senso della Definizione 7.3-1.

Proposizione 7.3-2. Per ogni coppia di funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Definizione 7.3-3. Per ogni $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si pone

$$\langle \widehat{f}, v \rangle := \langle f, \widehat{v} \rangle, \quad (5)$$

per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.



L. Schwartz

1915 - 2002

Tabella 7.3-1. ALCUNE TRASFORMATE DI FOURIER IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
(Simboli coerenti con la Definizione 6.1-1)

Variabile indipendente del segnale: x , variabile indipendente della trasformata: ω (pulsazione);
dunque: $\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$

Il gradino unitario (= funzione di Heaviside) è indicato $u(x)$, la distribuzione v.p. $(1/x)$ è indicata semplicemente $1/x$.

[La tabella prosegue nella pagina seguente]

$f(x)$	$\widehat{f}(\omega)$
$\delta(x)$	1
1	$2\pi \delta(\omega)$
$e^{i\lambda x}$	$2\pi \delta(\omega - \lambda)$
$\delta^{(k)}(x)$	$(i\omega)^k$
x^k	$2\pi i^k \delta^{(k)}(\omega)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\pi}{i} \operatorname{sign}(\omega) = -i\pi \operatorname{sign}(\omega)$
$\operatorname{sign}(x)$	$\frac{2}{i\omega} = \frac{-2i}{\omega}$
$u(x)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} = \pi \delta(\omega) - \frac{i}{\omega}$
$\sin x$	$\frac{\pi}{i} [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] = i\pi [\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)]$
$\cos x$	$\pi [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$
$\sin \lambda x$	$\frac{\pi}{i} [\delta(\omega - \lambda) - \delta(\omega + \lambda)] = i\pi [\delta(\omega + \lambda) - \delta(\omega - \lambda)]$
$\cos \lambda x$	$\pi [\delta(\omega - \lambda) + \delta(\omega + \lambda)]$

 $\lambda \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{N}^*$ $k \in \mathbb{N}^*$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Tabella 7.3-1'. ALCUNE TRASFORMATE DI FOURIER IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
(Simboli coerenti con la Definizione 6.1-1')

Variabile indipendente del segnale: t , variabile indipendente della trasformata: f (frequenza);
dunque: $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} x(t) dt$.

Il gradino unitario (= funzione di Heaviside) è indicato $u(t)$, la distribuzione v.p. $(1/t)$ è indicata semplicemente $1/t$; l'unità immaginaria viene indicata j .

[La tabella prosegue nella pagina seguente]

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi t_0 f}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\delta^{(k)}(t)$	$(j2\pi f)^k$
$(2\pi t)^k$	$j^k \delta^{(k)}(f)$
$\frac{1}{t}$	$\frac{\pi}{j} \text{sign}(f) = -j\pi \text{sign}(f)$
$\text{sign}(t)$	$\frac{1}{j\pi f} = \frac{-j}{\pi f}$
$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f} = \frac{\delta(f)}{2} - \frac{j}{2\pi f}$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] =$ $= \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(\omega - \lambda) + \delta(\omega + \lambda)]$

 $\lambda \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{N}^*$ $k \in \mathbb{N}^*$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

7.4. Distribuzioni periodiche

Sia $t \mapsto x(t)$ una funzione sommabile su \mathbb{R} ; se $x(t) = O(1/|t|^\alpha)$ con $\alpha > 1$ per $|t| \rightarrow \infty$, possiamo definire la *ripetizione periodica* di x di periodo T :

$$x_T(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT). \quad (1)$$

I coefficienti di Fourier c_n della funzione x_T si scrivono

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-in2\pi f_0 t} dt,$$

avendo posto $f_0 := 1/T$ (frequenza fondamentale). Si trova

$$c_n = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2-kT}^{T/2+kT} x(\tau) e^{-in2\pi f_0 \tau} d\tau.$$

Se indichiamo con $X(f)$ la trasformata di Fourier di x , abbiamo allora

$$c_n = f_0 X(n f_0). \quad (2)$$

Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica x_T si scrive dunque (↑ formula (3'')) del paragrafo 3.5)

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n f_0 t} = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n f_0) e^{i2\pi n f_0 t}. \quad (3)$$

Abbiamo ottenuto la *formula di sommazione di Poisson*. Per $t = 0$ (scambiando k con $-k$) si ha:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n f_0). \quad (4)$$