

Esercizi sugli integrali di superficie

- (1) (*Finestra di Viviani*) Calcolare l'area della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($r > 0$) interna al cilindro $x^2 + y^2 = rx$ e contenuta nel semispazio $z \geq 0$.
- (2) Sia E l'intersezione tra due palle di raggio 2 i cui centri distano 3. Calcolare l'area di ∂E .
- (3) Data l'elicoide E avente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = \varrho \cos t \\ y = \varrho \sin t \\ z = t. \end{cases}$$

con $(\varrho, t) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$, sia E_0 la parte di E compresa tra i piani $z = 0$ e $z = \pi$ ed interna al paraboloide $z = 2(x^2 + y^2)$. Calcolare

$$\int_{E_0} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}} d\sigma.$$

- (4) Calcolare $\int_S xyz d\sigma$ dove $S = \partial E$, con

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq 2z \leq 4 + x + y\}.$$

- (5) Calcolare $\int_S \frac{z}{x^2 + y^2} d\sigma$, con

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 4, (x - 2)^2 + y^2 \geq 4\}.$$

- (6) Calcolare $\int_S (y - \log z) \sqrt{1 + 2z} d\sigma$, con

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{x+y}, x \in [-1, 1], y \in [0, 1 - x]\}.$$

- (7) Calcolare $\int_S z^2 d\sigma$, con

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x}\sqrt{y}, x \in [1, 2], y \in [1, 2]\}.$$