1 Il teorema fondamentale delle superfici

Vedi Caddeo pag 701 e segg.

Teor. 1 **Unicità** *Siano S ed S' due superfici parametrizzate rispettivamente da P(u,v):U*$\mapsto\mathbb{R}^3$ *e Q(u,v):U*$\mapsto\mathbb{R}^3$ *e supponiamo che abbiano la stessa prima e seconda forma fondamentale. Allora esiste un movimento rigido che porta S su S'.*

Teor. 2 **Esistenza** *Sia D un aperto connesso di* $\mathbb{R}^2$ *con* $(u_0, v_0) \in D$ *e siano E,F,G,e,f,g funzioni da D in* $\mathbb{R}$.

Definiamo Γ^i_{jk}, *i,j,k=1,2 mediante*

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} = \dfrac{G\ E_u - 2F\ F_u + F\ E_v}{2(E\ G - F^2)} & \Gamma^2_{11} = \dfrac{2E\ F_u - E\ E_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma^1_{12} = \dfrac{G\ E_v - F\ G_u}{2(E\ G - F^2)} & \Gamma^2_{12} = \dfrac{E\ G_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma^1_{22} = \dfrac{2G\ F_v - G\ G_u - F\ G_v}{2(E\ G - F^2)} & \Gamma^2_{22} = \dfrac{E\ G_v - 2F\ F_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{cases}$$

Supponiamo che

- *E>0,G>0,E G -*F^2 *>0*
- *valgano le seguenti condizioni.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial u} = e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - g\Gamma^2_{11} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} - \dfrac{\partial g}{\partial u} = e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12} \\ -F\left(\dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) = \dfrac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial v} - \dfrac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} \end{cases}$$

Allora esiste un intorno U di (u_0, v_0) *ed una parametrizzazione da U in* $\mathbb{R}^3$ *avente E,F,G,e,f,g come coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.*

Teor. 3 *Siano S una superficie in* $\mathbb{R}^3$ *parametrizzata da P(u,v): D*$\mapsto\mathbb{R}^3$ *ed F: S* $\mapsto\mathbb{R}^3$ *una applicazione tale che F*$\circ$*P sia una superficie differenziabile parametrizzata su D. Supponiamo che F conservi le due forme fondamentali allora F è la restrizione ad S di un movimento euclideo di* $\mathbb{R}^3$.

Osserv. 1 *F conserva la prima e seconda f.f. nel senso che i coefficienti di tali forme rispetto alla parametrizzazione (u,v) nei punti P(u,v) ed F(P(u,v)) sono uguali.*

Osserv. 2 *L'uguaglianza della curvatura di Gauss e della curvatura media non è sufficiente perchè due superfici coincidano (sempre a meno di movimenti rigidi).Un esempio di due superfici con la stessa curvatura di Gauss e media che non sono una immagine dell'altra per movimenti rigidi, sono il catenoide, parametrizzato da (Cos u Cosh v, Sin u Cosh v, v) e l'elicoide parametrizzato da (Sinh v Cos u, Sinh v Sin u, u).*

2 Il teorema Egregium

Teor. 4 *La curvatura di Gauss dipende solo dai coefficienti della prima forma fondamentale (e dalle loro derivate prime e seconde).*

Dimostr. 1 *(vedi Caddeo Gray pagg. 28 e segg.)*Al solito sia S una superficie Nella formula

$$K = \frac{e\ g - f^2}{E\ G - F^2} \tag{1}$$

esprimiamo

- $e = P_{uu} \cdot \mathbf{N} = (x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}) \cdot \dfrac{P_u \wedge P_v}{E\ G - F^2}$
- $f = P_{uv} \cdot \mathbf{N} = (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}) \cdot \dfrac{P_u \wedge P_v}{E\ G - F^2}$
- $g = P_{vv} \cdot \mathbf{N} = (x_{vv}, y_{vv}, z_{vv}) \cdot \dfrac{P_u \wedge P_v}{E\ G - F^2}$

Poichè

$$P_u \wedge P_v = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

- $$e = det \begin{pmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

- $$f = det\begin{pmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

- $$g = det\begin{pmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

da cui

$$e\ g(E\ G - F^2) = det\begin{pmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} =$$

$$det\left(\begin{pmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}\right) = det\left(\begin{pmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}^t\right) =$$

facendo il prodotto righe per colonne

$$det\begin{pmatrix} P_{uu} \cdot P_{vv} & P_{uu} \cdot P_u & P_{uu} \cdot P_v \\ P_{vv} \cdot P_u & P_u \cdot P_u & P_u \cdot P_v \\ P_v \cdot P_{vv} & P_u \cdot P_u & P_v \cdot P_v \end{pmatrix} \tag{2}$$

In modo analogo

$$f\ f(E\ G - F^2) = det\begin{pmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} =$$

$$det\left(\begin{pmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}\right) = det\left(\begin{pmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}^t\right) =$$

facendo il prodotto righe per colonne

$$= det \begin{pmatrix} P_{uv} \cdot P_{uv} & P_{uv} \cdot P_u & P_{uv} \cdot P_v \\ P_{uv} \cdot P_u & P_u \cdot P_u & P_u \cdot P_v \\ P_v \cdot P_{uv} & P_u \cdot P_u & P_v \cdot P_v \end{pmatrix} \tag{3}$$

Derivando i coefficienti della prima f.f.

$$E_u = \frac{\partial P_u \cdot P_u}{\partial u} = 2P_{uu} \cdot P_u$$

$$E_v = \frac{\partial P_u \cdot P_u}{\partial v} = 2P_{uv} \cdot P_u$$

$$G_u = \frac{\partial P_v \cdot P_v}{\partial u} = 2P_{uv} \cdot P_v$$

$$G_v = \frac{\partial P_v \cdot P_v}{\partial v} = 2P_{vv} \cdot P_v$$

ed infine

$$F_v - \frac{1}{2}G_u = \frac{\partial P_u \cdot P_v}{\partial v} - P_{uv} \cdot P_v$$

$$= P_{uv} \cdot P_v + P_{vv} \cdot P_u - P_{uv} \cdot P_v = P_{vv} \cdot P_u$$

simmetricamente

$$F_u - \frac{1}{2}E_v = P_{uu} \cdot P_v$$

Mettendo insieme 2 e 3 sostituendo le precedenti relazioni restano da determinare solo $P_{uu} \cdot P_{vv}$ e $P_{uv} \cdot P_{uv}$. Si nota che nelle due matrice tali termini hanno lo stesso minore complementare $E\ G - F^2$ per cui sviluppando i due determinanti rispetto alla prima riga i due termini possono essere raggruppati ottenendo

$$(e\ g - f^2)(E\ G - F^2) =$$

$$= det \begin{pmatrix} P_{uu} \cdot P_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u \frac{1}{2}E_v \\ F_v \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} - det \begin{pmatrix} P_{uv} \cdot P_{uv} & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} = \tag{4}$$

$$= det \begin{pmatrix} P_{uu} \cdot P_{vv} - P_{uv} \cdot P_{uv} & \frac{1}{2}E_u & F_u \frac{1}{2}E_v \\ F_v \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} - det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \tag{5}$$

Verifichiamo che la differenza tra $A = P_{uu} \cdot P_{vv}$ e $B = P_{uv} \cdot P_{uv}$ dipende solo da derivate di coeffcienti della prima forma fondamentale, più precisamente vediamo che

$$A - B = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial P_u \cdot P_v}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial P_v \cdot P_v}{\partial u}\right)}{\partial u} = \frac{\partial P_u \cdot P_v v}{\partial u} = A + P_u \cdot P_{vvu} \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \dfrac{\partial P_u \cdot P_u}{\partial v}}{\partial v} = \frac{\partial P_u \cdot P_u v}{\partial v} = B + P_u \cdot P_{uvv} \tag{7}$$

sottraendo membro a membro ed utilizzando il teorema di Schwarz sulle derivate miste si ottiene l'asserto.

3 Un' applicazione del teorema Egregium di Gauss

Teor. 5 *Sia Σ una sfera di raggio R e sia S una superficie tale che esiste una mappa continua suriettiva $f : \Sigma \mapsto S$ localmente iniettiva che conservi la prima forma fondamentale allora S=Σ.*

Osserv. 3 *Una applicazione F:S $\mapsto$S' tra due superfici conserva la prima forma fondamentale se per ogni $P_0 \in S$ esistono una parametrizzazione di S vicino a P_0 ed una parametrizzazione di S' vicino a F(P_0) tali che i coefficienti della I.f.f. rispetto a queste parametrizzazioni coincidano.*

Da notare che il teorema fondamentale delle superfici richiede che venga conservata anche la seconda forma fondamentale in generale perchè le due superfici coincidano.

Si basa sul seguente teorema (Caddeo pag. 403 teor. 16.26)

Teor. 6 *Se M è una superficie regolare compatta in $\mathbb{R}^3$ allora esiste un punto $p_0 \in M$ in cui la curvatura di Gauss è positiva.*

Sia f(P(u,v))=$|P(u,v)|^2$. f ha un massimo su M in un punto P_0 che non puó essere l'origine.

Scelto un versore $\mathbf{v} \in T_{P_0}$ sia $\alpha(s)$ una curva su M che passi per P_0 ed abbia ivi tangente $\mathbf{v}$. f($\alpha(s)$) ha un massimo in P_0 quindi

$$\frac{d\ f}{d\ s}(P_0) = 0 \qquad \frac{d^2\ f}{d\ s^2}(P_0) \leq 0$$

Ne deriva che

$$\alpha'(P_0) \cdot P_0 = \mathbf{v} \cdot P_0 = 0 \qquad \alpha''(P_0) \cdot P_0 + \alpha'(P_0) \cdot \alpha'(P_0) \leq 0$$

la prima dice che $\mathbf{v}$ e $P_0 \neq 0$ sono ortogonali qualunque sia $\mathbf{v}$ per cui $P_0/|P_0|$ è un versore normale ad M e la seconda implica che

$$\frac{1}{|P_o|}(\alpha''(P_0) \cdot P_0 + \alpha'(P_0) \cdot \alpha'(P_0)) \leq 0.$$

Da cui risulta che la curvatura normale in una qualunque direzione è negativa, in particolare sono negative le due curvature principali e quindi la curvatura di Gauss è positiva.

Osserv. 4 *Una definizione piú ampia di superficie:*

Def. 1 *(Caddeo pag. 294)*

Un sottoinsieme M di $\mathbb{R}^n$ è una **superficie regolare** *se per ogni punto $P_0 \in M$ esistono un intorno V di P_0, un aperto U di $\mathbb{R}^2$ ed una applicazione $x{:}U \mapsto \mathbb{R}^n$ su $V \cap M$ tali che:*

- *x é differenziabile*
- *$x : U \mapsto V \cap M$ sia un omeomorfismo invertibile. (alias la topologia indotta da x coincide con quella indotta da quella di $\mathbb{R}^n$.)*
- *$V \cap M$ é una superficie regolare parametrizzata da x.*